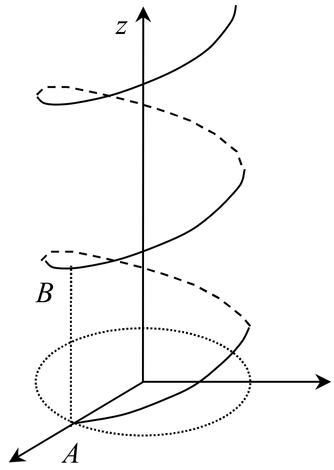
Mécanique : révisions de MPSI

A- REVISION DE MECANIQUE DU POINT

Exercice A1 : Mouvement le long d'une hélice.

(Oral Centrale)



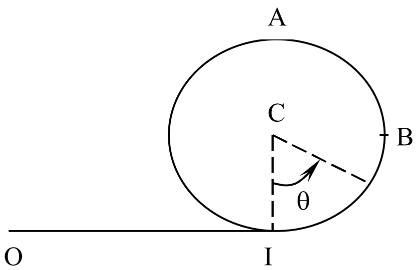
Un anneau M, assimilé à un point matériel de masse m, est enfilé sur un rail hélicoïdal le long duquel il glisse sans frottements. Ce rail est une hélice droite d'axe vertical (Oz), de rayon R et de pas h, c'est-à-dire que l'altitude varie linéairement avec l'angle de rotation autour de l'axe (Oz) et augmente de h à chaque tour (voir schéma ci-contre).

L'anneau est lâché sans vitesse initiale depuis le point B situé à la verticale du point A du rail situé dans le plan horizontal (Oxy). On note g l'accélération de la pesanteur.

Calculer la durée de la chute de l'anneau de B à A.

Exercice A2 : Le grand 8.

(*Oral Mines Ponts & Mines Télécom*)



Une bille, assimilée à un point matériel M de masse m, est lancée sur un guide constitué d'une partie rectiligne horizontale et d'une partie circulaire de centre O, de rayon ℓ, située dans un plan vertical. La jonction entre les parties rectiligne et circulaire se fait en un point I.

On suppose que la bille n'est soumise à aucun frottement. On la lance avec une vitesse $\overrightarrow{V_0}$ depuis un point O de la partie rectiligne, en direction du point I. Une fois sur le guide circulaire, la bille est repérée par l'angle $\theta = \left(\overrightarrow{CI}\,;\,\overrightarrow{CM}\right)$.

1- Calculer, lorsque la bille est sur le rail circulaire, sa vitesse ainsi que le module de la réaction du support en fonction de l'angle θ.

2- A quelle condition sur le module V_I de $\overrightarrow{V_I}$ la bille effectue-t-elle un tour complet ?

3- On suppose que cette condition n'est pas réalisée. Montrer que, suivant la valeur de V_I, la bille peut soit rebrousser chemin après avoir atteint un angle maximal θ_a (« a » pour arrêt), soit décoller du guide pour un angle θ_d (« d » pour décollage !). On donnera clairement les expressions de θ_a et θ_d en fonction de g, ℓ et V_I et on discutera leur position par rapport à $\pi/2$. On exprimera également la valeur critique de V_I entre les deux régimes en fonction de g et ℓ et on récapitulera les différents mouvements possibles en fonction de la valeur de V_I.

4- Faire un schéma de la trajectoire observée dans le cas où la bille décolle. Quelle est la nature de la trajectoire après le décollage ?

Exercice A3 : Mouvement d'un proton dans un liquide

On étudie le mouvement horizontal d'un proton dans un liquide sursaturant (des bulles de gaz se créent au passage du proton et matérialisent sa trajectoire).
Dans cette région de l'espace règne un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B} = B.\vec{e_z}$
Un proton de masse m, de charge e, considéré comme un point matériel, a une vitesse initiale en O $\vec{v_o}$ orthogonale au champ magnétique.
Le liquide exerce sur ce proton une force de frottement fluide $\vec{f} = -k.\vec{v}$ où k est une constante positive et $\vec{v}$ est la vitesse du proton dans le référentiel d'étude galiléen **R**.
On posera $\omega = \dfrac{e.B}{m}$ et $\tau = \dfrac{m}{k}$
On désigne par Oxyz un trièdre orthogonal direct lié au référentiel d'étude et par $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ la base de vecteurs unitaires qui lui est associée. On choisit $\vec{B} = B.\vec{e_z}$ et $\vec{v_o} = v_o.\vec{e_x}$
On donne, pour les applications numériques : $m = 9{,}1\ 10^{-31}$ kg et $e = 1{,}6\ 10^{-19}$ C.

1-a- Si la force de frottement était négligeable quelle serait la trajectoire du proton. Donner les caractéristiques de cette trajectoire.
1-b- Montrer que le module de la vitesse du proton décroît au cours du mouvement. Qualitativement, quelles sont les modifications apportées par la force de frottement sur la trajectoire donnée en 1-a-.

2-a- Etablir les équations du mouvement en coordonnées cartésiennes. On introduira la pulsation cyclotron ω ainsi que le temps caractéristique τ usuellement appelé « temps de collision » dans le milieu. On donnera clairement les expressions de ces deux grandeurs en fonction des données.
2-b- On introduit le complexe $\underline{u} = x + i.y$ (i tel que $i^2 = -1$). Déterminer $\underline{u}(t)$ en fonction de v_0, ω et τ.
2-c- Montrer que la trajectoire s'arrête en un point M_∞ de coordonnées polaires (ρ, α) que l'on exprimera en fonction de v_0, τ et ω.
2-d- Montrer que les équations horaires du mouvement sont :

$$\begin{cases} x(t) = \rho\cos(\alpha) - \rho\, e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega t + \alpha) \\ y(t) = \rho\sin(\alpha) - \rho\, e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega t + \alpha) \end{cases}$$

Exprimer, en fonction de t et des paramètres ρ et τ, la distance d entre la position M de l'électron à l'instant t et la position finale M_∞.

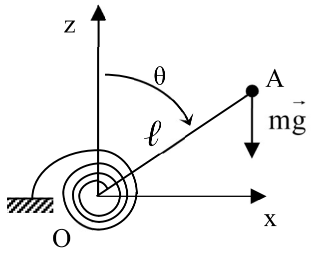
3- L'électron a acquis la vitesse $\vec{v_o}$ dans un accélérateur linéaire où il a été accéléré, à partir d'une vitesse initiale négligeable, sous une tension de 100 V. En outre, la trajectoire est observée dans une chambre à bulles où l'on mesure les valeurs suivantes : $\rho = 6{,}5\,\text{cm}$ et $\alpha = 45°$.

3-a- Déterminer numériquement B et h, ainsi que le temps au bout duquel la distance d ne vaut plus que le centième de sa valeur initiale. Représenter l'allure de la trajectoire.

3-b- On note M_n le point où la trajectoire coupe le segment $[OM_\infty]$ pour la $n^{\text{ème}}$ fois. Exprimer la distance M_nM_∞ en fonction de ρ et n puis calculer les distances M_1M_∞ et M_2M_∞.

4- Quel est le travail de la force d'interaction avec le milieu au cours de la totalité du mouvement ? Donner sa valeur en électronvolt.

Exercice A4 : pendule de Howlewck-Leiav



Une masse ponctuelle m est placée à l'extrémité A d'une tige de masse négligeable, de longueur ℓ = OA, relié au bâti par une liaison pivot parfaite d'axe Oy ; un ressort spiral exerce en plus sur cette tige un couple de rappel de moment par rapport à l'axe Oy : $-C\theta$, où θ désigne l'angle que fait la tige avec la verticale ascendante Oz. On désigne par g l'intensité du champ de pesanteur.

On étudie le mouvement du point matériel {tige + point matériel}

1- Le système est-il conservatif ? Donner l'expression de l'énergie potentielle totale du système étudié E_p en fonction de θ, m, g, ℓ et λ, avec $\lambda = \frac{C}{mg\ell}$. Sur la figure 1, nous avons tracé $f(\theta) = \cos(\theta) + \frac{\lambda}{2}\theta^2$ pour différentes valeurs de λ à quoi correspond f ?

2- Chercher l'équation en θ correspondant aux positions d'équilibre du point matériel. On ne cherchera pas à résoudre cette équation, mais on donnera la solution triviale et on montrera (éventuellement graphiquement) que :

si $\lambda \geq 1$ le système n'admet qu'une position d'équilibre (la solution triviale)
si $\lambda < 1$ le système admet trois positions d'équilibre (au moins).

3- A l'aide des courbes tracées à la figure 1, discuter de la stabilité des différentes positions d'équilibre en fonction de la valeur de λ.
Vérifier ces résultats pour la solution triviale $\theta_{eq} = 0$.

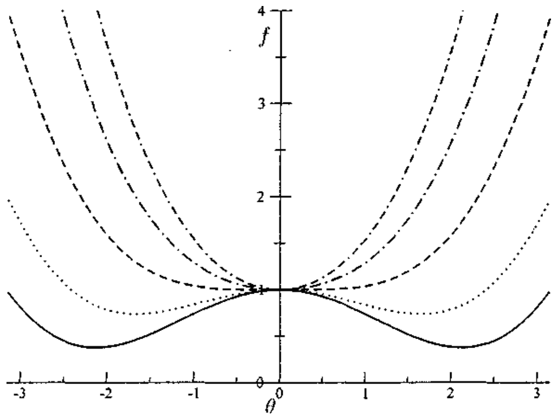


figure 1 : f(θ) pour différentes valeurs de λ

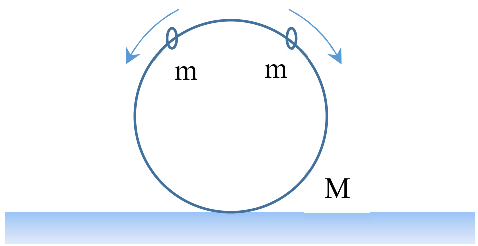
4- Dans le cas $\lambda > 1$, calculer la période T des petites oscillations au voisinage de la (ou de l'une des) position(s) d'équilibre stable.

5- Maintenant $\lambda = 1$; simplifier l'énergie potentielle de M au voisinage de $\theta = 0$ puis retrouver la stabilité de l'équilibre en 0, en déduire une intégrale première du mouvement et enfin une équation différentielle du second ordre caractéristique des oscillations. Cette équation peut-elle être intégrée simplement ? Les oscillations sont-elles harmoniques ?

6- Donner une expression intégrale de la période T des oscillations puis en déduire une expression semi-numérique approchée de T en fonction de g, ℓ, et de l'amplitude θ_0 sachant que : $\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} \simeq 1{,}31$. (on pourra également proposer un code python pour évaluer cette intégrale)

Exercice A5 :

Deux perles de masse m sont placées au sommet d'un cerceau de masse M et de rayon R qui tient vertical sur le sol. On donne une légère perturbation aux deux perles qui se mettent à glisser sans frottement sur l'anneau, l'une vers la droite et l'autre vers la gauche. Quelle est la plus faible valeur du rapport m/M pour laquelle l'anneau décolle du sol ?



B- FORCE CENTRALE

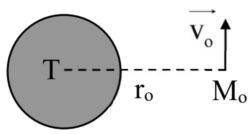
Exercice B1 : Lancement d'un satellite artificiel

On désire placer un satellite S de masse m sur une orbite circulaire de centre T, centre de la Terre, et de rayon r_o. Un premier lanceur amène le satellite au point M_o situé à la distance r_o du centre de la Terre. Puis des moteurs permettent alors de communiquer une vitesse initiale $\vec{v_o}$ au satellite.

1- Rappeler les conditions sur $\vec{v_o}$ pour que le satellite soit sur l'orbite circulaire de rayon r_0.

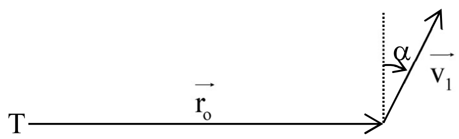
On envisage dans la suite des erreurs lors de la mise en orbite

2- La vitesse initiale $\vec{v_o}$ est orthogonale à $\overrightarrow{TM_o}$. Mais la norme vaut $v_o^2 = \alpha \dfrac{GM_T}{r_o}$ (M_T = masse de la Terre) où α est une constante sans dimension



A quelle condition sur α la trajectoire sera-t-elle elliptique ? Dessiner l'allure de la trajectoire de S.
Déterminer, en fonction de R_T, rayon terrestre et de r_o la condition sur α pour que le satellite ne s'écrase pas à la surface de la Terre.

3- Lors du lancement $\vec{v_1}$ a une intensité correcte $(v_1 = v_o)$ mais une direction qui s'écarte d'un angle α par rapport à la direction théorique.
Déterminer la nature de la trajectoire réelle du satellite. A quelle condition sur α le satellite ne s'écrase-t-il pas à la surface de la Terre



Exercice B2 : Comète de Kohoutek

(inspiré d'oraux de Centrale et X)

La comète parabolique de Kohoutec (K) est passée le 28 décembre 1973 à son périhélie P, sa distance au soleil étant SP = d = 21.10^6 km. L'orbite terrestre est assimilée à un cercle de rayon a= 150.10^6 km parcouru à la vitesse u = 30 km.s^{-1}.

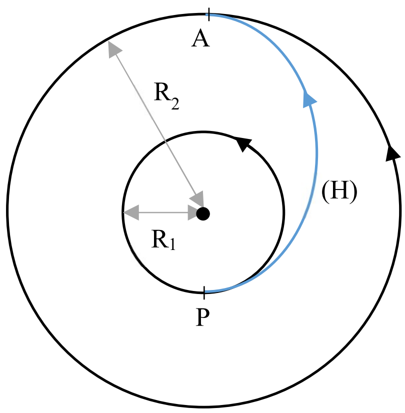
1- Calculer la vitesse v_K de K en P.

2- L'équation polaire de la parabole d'axe $\overrightarrow{Sx} = \overrightarrow{SP}$ est donnée par : $r = \dfrac{2.d}{1+\cos(\theta)}$ avec $\theta = (\overrightarrow{SP}, \overrightarrow{SK})$. Calculer les valeurs de l'angle θ aux dates où l'orbite de K rencontre l'orbite terrestre.

3- A quelle date K est-elle entrée à l'intérieur de l'orbite terrestre ? A quelle date en est-elle sortie ?

On donne $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\cos^4 \frac{\theta}{2}} = 2\left(\tan\frac{\theta}{2} + \frac{1}{3}\tan^3\frac{\theta}{2}\right)$

Exercice B3 : transfert de Hohmann



On étudie le transfert d'un satellite depuis une orbite circulaire basse de rayon R_1 vers une orbite circulaire de plus grand rayon R_2.
Ce transfert s'effectue suivant une trajectoire (H) elliptique, appelée trajectoire de Hohmann, qui est tangente à la fois aux deux orbites circulaires (voir schéma ci – contre).
Afin de réaliser le changement de trajectoire en P puis en A, un dispositif de propulsion embarqué à bord du satellite est activé pendant une durée très brève, que l'on pourra négliger.

Données numériques :

Constante de gravitation universelle : $G = 6{,}67\ 10^{-11}$ uSI.
Rayon de la terre : $R_T = 6370$ km ;
Masse de la terre : $M_T = 5{,}98\ 10^{24}$ kg.

On note $\mu = G.M_T$.

1- On note v_1 et v_2 les vitesses du satellite sur les trajectoires circulaires de rayons R_1 et R_2 ; exprimer ces vitesses en fonction de μ et des rayons.
Sachant que le satellite est à l'altitude $h_1 = 210$ km sur la première orbite et qu'il est géostationnaire sur la seconde, calculer numériquement v_1 et v_2. On rappellera les propriétés de l'orbite géostationnaire en justifiant soigneusement.

2- Indiquer qualitativement comment les module et direction de la vitesse doivent être modifiés au point P puis au point A pour réaliser le transfert d'orbite voulu.

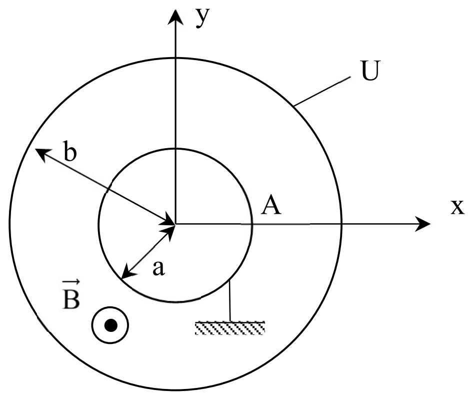
3- On note v_1' et v_2' les vitesses respectives du satellite en P et A sur la trajectoire elliptique ; exprimer ces vitesses en fonction de μ et des rayons.

4- Calculer numériquement les variations de vitesse Δv et Δv' que l'on doit imposer au satellite en P et A.

5- Exprimer en fonction de μ et des rayons, puis calculer en heures et minutes, la durée du transfert sur l'orbite de Hohmann.

Exercice B4 :

(oral Mines)



On s'intéresse à un condensateur constitué de 2 plaques cylindriques coaxiales d'axe (Oz) entre lesquelles règne un vide poussé. L'armature centrale, de rayon a, est à la masse et l'armature externe de rayon b, est porté au potentiel U > 0

On admet[1] que le potentiel électrostatique à l'intérieur du condensateur s'écrit : $\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{e_r}$ avec $E_r(r) = -\dfrac{U}{r\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)} = -\dfrac{\Gamma}{r}$

1- Comment créer un champ magnétique uniforme selon Oz ?

On cherche à décrire les phénomènes qui ont lieu à l'intérieur du condensateur en présence d'un champ magnétique uniforme, lorsqu'on émet, depuis un point A situé sur l'armature centrale, des électrons avc une énergie cinétique négligeable. Pour cela, on associe au référentiel du condensateur un repère orthonormé direct (Oxyz), (Ox) étant l'axe normal à (Oz) passant par A et on choisit d'utiliser les coordonnées cylindriques d'axe (Oz).

2- Faire le bilan des forces appliquées sur un électron émis en A et représenter qualitativement la trajectoire qui sera observée.

3- Ecrire les 3 équations scalaires obtenues en projetant le principe fondamental de la dynamique sur la base des coordonnées cylindriques. Quand peut-on dire du mouvement suivant l'axe (Oz) ? Le mouvement dans le plan (Oxy) peut-il être obtenu simplement en intégrant les équations précédentes ?

4- On souhaite obtenir une équation d'évolution pour la variable r seule ; pour cela, on adopte la démarche suivante :

4a- En intégrant une des projections du PFD, montrer qu'au cours du mouvement de l'électron les variables r et θ sont liées par la relation :

$$mr^2\dot{\theta} = \frac{1}{2}eB\left(r^2 - a^2\right) . \qquad \text{(Equation 1)}$$

4b- Montrer que le système est conservatif et calculer l'énergie potentielle de l'électron. En déduire une seconde relation entre r ; $\dot{r}$ et $\dot{\theta}$: (Equation 2)

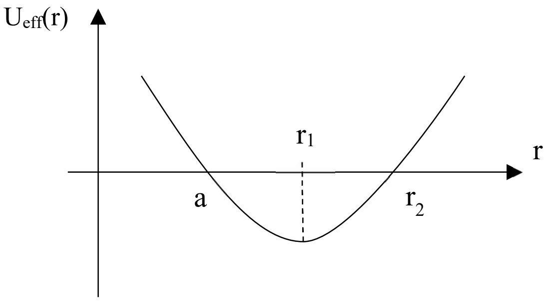
4c- Montrer qu'au cours du mouvement on a

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{eff}(r) = E_0 \qquad \text{(Equation 3)}$$

avec $U_{eff}(r) = C\left(\dfrac{r}{a}\right)^2\left(1 - \left(\dfrac{a}{r}\right)^2\right)^2 - C'\ln\left(\dfrac{r}{a}\right)$

où E_0, C et C' sont des constantes qu'on exprimera en fonction des données.

5- A partir des équations 1 et 3, effectuer une étude qualitative de la trajectoire. Le graphe de $U_{eff}(r)$ est donné ci-contre.
Comment choisir le module du champ magnétique pour éviter que l'électron ne percute l'électrode externe ?



[1] Les 5/2 pourront retrouver cette expression.