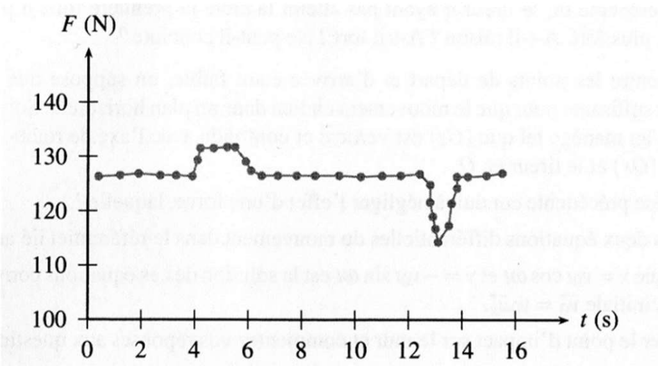
Référentiels non galiléens

Exercice 1 : dans un ascenseur…

Afin de mesurer l'accélération verticale d'un ascenseur, on décide d'utiliser le capteur de force du plateau d'une console de jeu. L'ascenseur est initialement à l'arrêt. On pose le plateau sur le sol de l'ascenseur et l'on dépose un parpaing de masse m sur le plateau. On actionne ensuite l'ascenseur pour passer d'un étage à un autre. Un ordinateur permet d'enregistrer la force mesurée par le capteur en fonction du temps. La figure présente les résultats de l'enregistrement (F désigne la norma de la force mesurée et t le temps) :



1- A quel instant démarre l'ascenseur ?

2- Quelle est la masse du parpaing ?

3- Interpréter les variations de F en fonction du temps. L'ascenseur monte-t-il ou descend-t-il pendant l'expérience ?

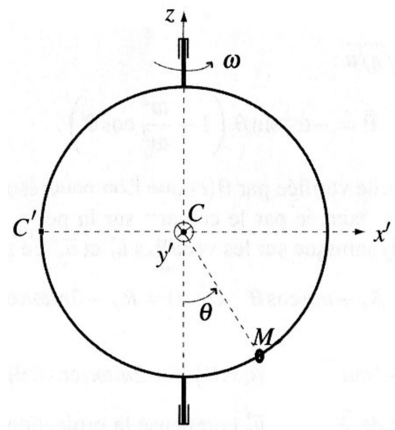
4- En analysant les données expérimentales, estimes numériquement :

4a- la vitesse avec laquelle l'ascenseur se déplace en dehors des phases d'accélération.

4b- la distance qui séparer les étages de départ et d'arrivée. A combien d'étages cela correspond-il ?

Exercice 2 : Point matériel en mouvement le long d'un rail circulaire.

On étudie un anneau de masse *m* qui glisse sans frottements le long d'un rail circulaire de rayon *R*. Ce rail en anneau est monté sur un axe vertical passant par son centre *C* et tourne autour de cet axe à vitesse angulaire ω constante (*figure* ci-contre). On note *g* l'accélération de la pesanteur.



1- Déterminer l'équation différentielle régissant la position angulaire $\theta(t)$ de l'anneau.

2- Discuter l'existence de positions d'équilibre et leurs stabilités.

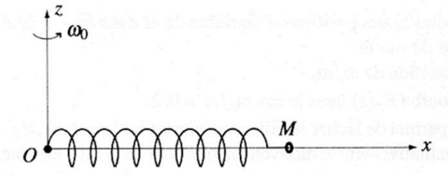
3- On suppose que $\omega^2 = 4\dfrac{g}{R}$ et qu'on lâche la bille depuis la position $\theta = 0$ sans vitesse initiale par rapport au rail. Déterminer l'expression de la vitesse de la bille par rapport au rail en fonction de l'angle θ et décrire qualitativement le mouvement qui sera observé.

4- On suppose maintenant que $\omega^2 = 0{,}5\dfrac{g}{R}$. Déterminer la période des petites oscillations autour de la position d'équilibre stable.

5- Reprendre les questions 1 et 2 si l'axe de rotation n'est plus l'axe vertical passant par *C*, mais l'axe vertical tangent au rail passant par *C'*.

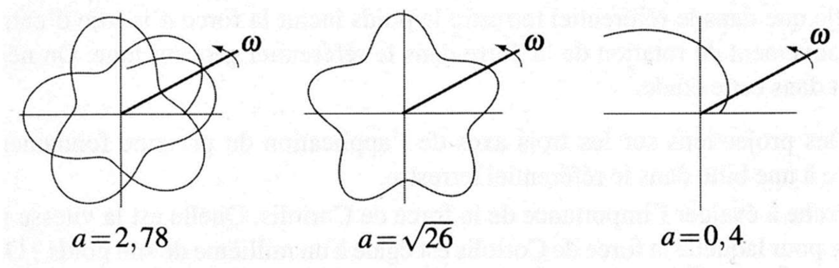
Exercice 3 : Point matériel en mouvement le long d'une tige.

Une petite perle, assimilée à un point matériel M, glisse sans frottement sur une tige horizontal (axe Ox) tournant à vitesse constante ω_0 autour de la verticale (Oz). La perle est liée au point O par un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0. A l'instant initial, le ressort n'est nu comprimé ne tendu et la perle a une vitesse nulle par rapport à la tige. On note $\omega^2 = \frac{k}{m}$ et $a = \frac{\omega}{\omega_0}$



1- Etablir les équations du mouvement.

2- On donne l'allure de la trajectoire de M pour différentes valeurs de a : comment ces trajectoires.



A quelle(s) condition(s) sur a la trajectoire de la perle est-elle fermée ? Dans la suite on suppose que $a > 1$

3- Montrer que le ressort est toujours tendu.

4- Déterminer la force que la tige exerce sur la perle.

Exercice 4 : mécanique dans un manège.

On s'intéresse à la trajectoire d'une balle en mousse, assimilée à un point matériel M de masse m, lancée dans un manège circulaire de rayon a = 2,5 m, tournant relativement rapidement à la vitesse angulaire constante ω = 10 tours / min et dans le sens trigonométrique autour d'un axe vertical ascendant noté (Oz). Ce genre de manège existe par exemple au palais de la découverte à Paris. On note $\Re$ le référentiel lié au manège et $\Re_0$ celui du sol qui est supposé galiléen. L'étude est menée dans le référentiel $\Re$ et, sauf avis contraire, on repère M en coordonnées cylindro-polaires d'axe (Oz).

Une personne se trouvant au centre du manège, que nous appellerons Alice[1], demande à une personne assise à la périphérie du manège, que nous appellerons Bob, de lui lancer la balle ; Bob la lui lance

[1] Les noms Alice et Bob ont été choisis en hommage aux articles de ces 25 dernières années sur la téléportation quantique (voir par exemple La Recherche n° 386 de mai 2005). Le nom Stephen a été choisi en hommage à Stephen Hawking, décédé le 14 mars 2018.

avec une vitesse $\vec{V}_0$ horizontale et purement radiale dans $\Re$, de module $V_0 = 15$ m.s^{-1}, mais la balle n'atteint pas Alice…

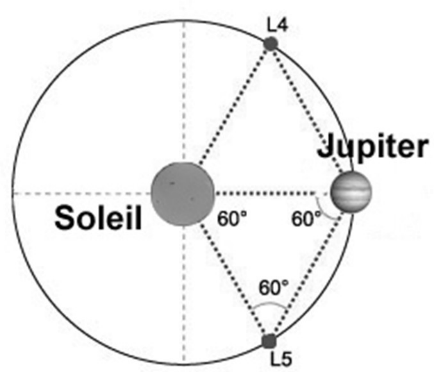
1- Expliquer pourquoi et faire une représentation plane, vue de dessus, du manège et de l'allure de la trajectoire de la balle dans $\Re$. Indiquer sur le schéma la distance minimum d'approche r_{min} de la balle à Alice.

2- Ecrire les trois équations scalaires obtenues en projetant le principe fondamental de la dynamique appliqué à M sur la base des coordonnées cartésiennes puis sur la base des coordonnées cylindro-polaires. En déduire que les mouvements verticaux et horizontaux sont découplés et donner la loi $z(t)$ du mouvement vertical. Le mouvement dans le plan horizontal peut-il être obtenu simplement en intégrant l'un ou l'autre des jeux d'équations précédents ?

3- On souhaite obtenir une équation d'évolution pour la variable r seule : montrer qu'au cours du mouvement de la balle les variables r et θ sont liées par une relation de la forme : $r^2\left(\dot{\theta}+\omega\right)=C$ où C est une constante que l'on exprimera en fonction des données. En déduire une équation différentielle du second ordre sur la variable $r(t)$ puis l'expression de la distance minimum d'approche r_{min} de la balle à Alice en fonction des données. Effectuer l'application numérique.

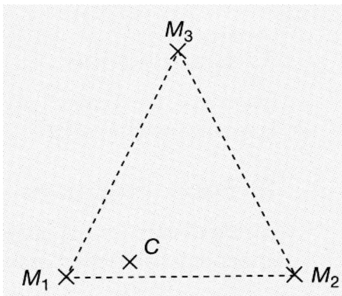
4- Une tierce personne située à l'extérieur du manège, appelons-la Stephen*, observe la scène. Décrire la trajectoire observée depuis l'extérieur (faire une représentation en vue de dessus dans $\Re_0$), expliquer pourquoi la balle manque sa cible et retrouver la distance minimum d'approche r_{min}.

Exercice 6 : Points de Lagrange L_4 et L_5.



On constate qu'il existe sur la trajectoire de Jupiter deux points particuliers appelé point de Lagrange L_4 et L_5 (voir figure ci-contre), en rotation autour du Soleil à la même vitesse angulaire ω que Jupiter, où orbitent de grandes quantités d'astéroïdes, appelés « troyens »[2].

Afin de comprendre cette propriété, on se propose d'étudier trois masses m_1, m_2 et m_3 en rotation dans un même plan et à la même vitesse angulaire autour d'un axe fixe, orthogonal à ce plan et passant par leur centre de masse C (voir figure ci-contre).



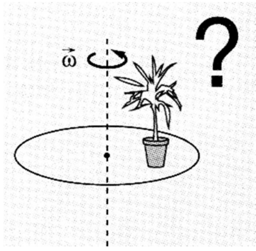
1- Montrer que si ces trois masses se situent aux trois sommets M_1, M_2 et M_3 d'un triangle équilatéral de côté d, elles peuvent être en équilibre relatif les unes par rapport aux autres, pour une vitesse ω particulière que l'on exprimera en fonction de m_1, m_2, m_3, d et la constante de gravitation universelle G.

[2] Les astéroïdes troyens portent ce nom du fait d'une convention qui les nomme d'après les personnages de la guerre de Troie. Les astéroïdes situés au point L_4 portent le nom d'un héros ou d'un concept grec et sont appelés « camp grec » ou « groupe d'Achille » (Achille, Nestor, Agamemnon, Odyssée, etc.). Ceux situés au point L_5 portent des noms de héros troyens et sont collectivement nommés « camp troyen » (Priam, Énée, etc.). Cependant, chacun des groupes possède un transfuge : Hector, nommé d'après le héros troyen Hector, est situé autour du point L_4 et inversement Patrocle, bien que portant le nom du héros grec Patrocle, est situé au point L_5. Pour compliquer la chose, le camp troyen est parfois nommé « groupe de Patrocle », cet astéroïde étant l'un des plus grands de cet ensemble…

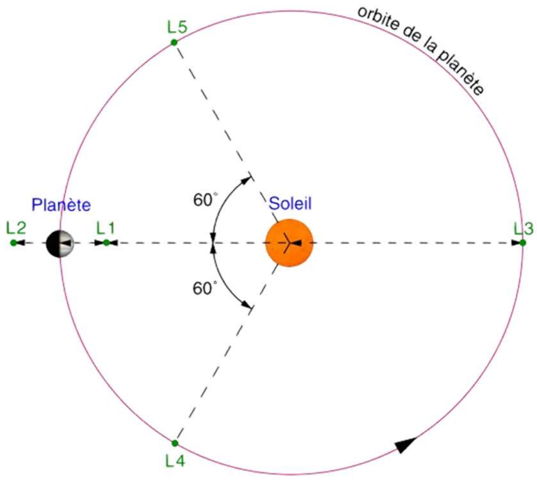
2- Utiliser ce résultat pour discuter l'existence des points de Lagrange L_4 et L_5 de Jupiter.[3]

Quelques questions qualitatives.

- Expliquer que certaines planètes ne puissent conserver leur atmosphère et justifier par un calcul que ce n'est pas le cas de la Terre.
- Expliquer pourquoi on a une sensation d'impesanteur dans un avion qui effectue un vol parabolique (on parle de caravelle « zéro-g »).
- Supposons que l'on fasse germer une graine puis pousser un arbre sur un plateau en rotation à vive vitesse angulaire autour d'un axe fixe. Comment le tronc s'oriente-t-il ? Verticalement, penché vers l'axe de rotation ? vers l'extérieur ?



[3] Plus généralement, on peut associer des points de Lagrange L_4 et L_5 à toute planète du système solaire. En outre, il existe également trois autres points de Lagrange notés L_1, L_2 et L_3 et situés le long de l'axe Soleil-planète (schéma ci-contre). Tous les points de Lagrange constituent des positions d'équilibre relatif dans le champ de gravitation de la planète et du Soleil, au sens où nous l'avons défini dans cet exercice.
Indiquons enfin que tous ces points correspondent à des positions d'équilibre théoriquement instables ! Toutefois, pour un corps situé au voisinage de L_4 (ou L_5) et qui tend à s'éloigner, la force de Coriolis qui apparaît (on raisonne dans le référentiel non galiléen en rotation) maintient le corps au voisinage de L_4 (ou L_5) ; L_4 et L_5 sont ainsi appelés points de Lagrange « stables », tandis que L_1, L_2 et L_3, qui ne bénéficient pas de cette propriété, sont dits « instables ».



Exercice supplémentaire : Effet de la force de Coriolis sur un tir balistique. Déviation vers la droite.

Un point A situé dans l'hémisphère nord, à la surface de la terre dont le centre sera noté O, est repéré par sa latitude λ, angle que fait la droite OA avec le plan de l'équateur. On se propose d'étudier un tir balistique au voisinage de A dans le référentiel terrestre, associé à un repère $Axyz$, défini de la façon suivante :

- Ax est tangent au méridien en A et orienté vers le Sud,
- Ay est tangent au parallèle en A et orienté vers l'Est,
- Az est porté par le rayon terrestre OA et orienté vers le zénith.

On assimile le référentiel géocentrique à un référentiel galiléen et on suppose le champ de pesanteur terrestre uniforme de norme $g = 9{,}81$ m.s^{-2}. Toute résistance de l'air est par ailleurs négligée. On note Ω la vitesse angulaire de rotation de la terre autour de l'axe des pôles.

1- Faire un schéma clair de l'hémisphère Nord, comprenant le parallèle et le méridien passant par A, ainsi que le trièdre Axyz.

On s'intéresse à un obus de masse m tiré depuis un canon situé en A et dont la vitesse initiale $\vec{v}_0$ fait avec le plan horizontal Axy un angle α. Le demi-plan de tir, défini par $\vec{v}_0$ et la verticale ascendante Az, fait avec l'Est un angle θ, compté positivement vers le Nord.

On introduit alors un nouveau repère direct Ax'y'z , toujours associé au référentiel terrestre mais mieux adapté pour décrire le tir, Ax' désignant l'intersection du plan horizontal et du demi-plan de tir.

2- Faire un nouveau schéma (ou plusieurs schémas plans) positionnant clairement ce nouveau repère.

3- Etudier le mouvement approché de l'obus en négligeant la force de Coriolis ; calculer en particulier la portée du tir pour $\alpha = 30°$ et $v_0 = 800$ m.s^{-1}.

4- Montrer que le vecteur rotation du référentiel terrestre dans le référentiel géocentrique s'écrit, en projection sur les vecteurs de base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ du repère $Ax'y'z$:

$$\vec{\Omega} = \Omega\left(\cos\lambda \sin\theta.\vec{i} + \cos\lambda\cos\theta.\vec{j} + \sin\lambda.\vec{k}\right).$$

En déduire les équations différentielles du mouvement dans le repère $Ax'y'z$.

5- En admettant que l'effet de la force de Coriolis n'est qu'une perturbation par rapport au mouvement obtenu au *a)*, donner une expression approchée de cette force au cours du tir ; en déduire une expression approchée de $y'(t)$.

6- Montrer que dans cette approximation, l'ordonnée y_i' du point d'impact de l'obus s'écrit :

$$y_i' = 4\frac{\Omega}{g^2} v_0^{\,3} \sin^2\alpha\left(\frac{1}{3}\cos\lambda\sin\theta\sin\alpha - \sin\lambda\cos\alpha\right)$$

Calculer y_i' numériquement avec les mêmes valeurs de α et v_0 qu'au *a)*, sachant en outre que le tir est effectué en direction du Sud à partir d'un point A de latitude 45° Nord.

7- A quelle condition sur l'angle α a-t-on, quelle que soit la direction du tir effectué depuis la France, une déviation de l'obus vers la droite du plan de tir ? Commenter.