Analyse vectorielle

I- Divergence d'un champ vectoriel

A- Théorème d'Ostrograski et opérateur divergence

Soit $\vec{G}$ un champ vectoriel « suffisamment » régulier.

Il existe un unique champ **scalaire** appelé « divergence de $\vec{G}$ » noté $\operatorname{div}\vec{G}$ tel que

$$\boxed{\text{Pour toute surface fermée } \Sigma_f\,,\ \oiint_{P\in\Sigma_f} \vec{G}(P)\,dS_p\,\overrightarrow{n_{ext}}(P) = \iiint_{M\in V_{\text{int à }\Sigma_f}} \operatorname{div}\vec{G}(M)\,d\tau_M}$$

Expression en coordonnées cartésiennes $\boxed{\operatorname{div}\vec{G} = \vec{\nabla}\vec{G} = \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z}}$

B- Equations locales relatives aux propriétés du flux des champs électrostatiques et magnétostatiques.

$\boxed{\operatorname{div}\vec{B} = 0}$ Equation de Maxwell Thomson

$\boxed{\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$ Equation de Maxwell Gauss

C- Equation locale de conservation de la charge

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

II- Rotationnel d'un champ vectoriel

A- Théorème de Stokes et opérateur rotationnel

Soit $\vec{G}$ un champ vectoriel « suffisamment » régulier.

Il existe un unique champ **vectoriel** appelé « rotationnel de $\vec{G}$ » noté $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{G}$ tel que

$$\boxed{\text{Pour tout contour fermé orienté } \Gamma_f\,,\ \oint_{P\in\Gamma_f} \vec{G}(P)\,\overrightarrow{dl_p}(P) = \iint_{\substack{M\in\Sigma_{\text{délimité}}\\ \text{par }\Gamma}} \overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{G}(M)\,dS_M\,\vec{n}(M)}$$

Expression en coordonnées cartésiennes $\boxed{\overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{G} = \vec{\nabla}\wedge\vec{G} = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z} \\ \frac{\partial G_x}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial x} \\ \frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y} \end{pmatrix}}$

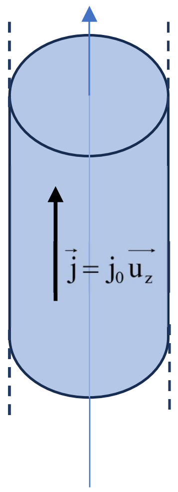
B- Equations locales relatives aux propriétés du flux des champs électrostatiques et magnétostatiques.

$\boxed{\overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{E} = 0}$ Equation de Maxwell Faraday de l'électrostatique

$\boxed{\overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{B} = \mu_0\vec{j}}$ Equation de Maxwell Ampère de la magnétostatique

C- Intérêt des équations locales

Exemple : Calcul d’un champ magnétique, cas du cylindre rectiligne infini, parcouru par un courant uniformément réparti en volume



Etudes des symétrie et invariance : $\vec{B} = B_\theta(r)\vec{u_\theta}$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rB_\theta)\vec{u_z} = \begin{cases} \mu_0 j_0 \vec{u_z} & \text{si } r < R \\ \vec{0} & \text{si } r > R \end{cases}$$

Si $r < R$ $\quad \frac{d}{dr}(rB_\theta) = \mu_0 j_0 r \Rightarrow \quad rB_\theta = \frac{1}{2}\mu_0 j_0 r^2 + A$

$$\Rightarrow \quad B_\theta = \frac{1}{2}\mu_0 j_0 r + \underbrace{\cancel{\frac{A}{r}}}_{\substack{0 \\ \text{non divergent}}}$$

Si $r > R$ $\quad \frac{d}{dr}(rB_\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad B_\theta = \frac{\alpha}{r} \underset{\text{continuité}}{=} \frac{1}{2}\mu_0 j_0 \frac{R^2}{r}$

Remarque : en général, les théorèmes de Gauss et d’Ampère sont à privilégier

III- Compositions usuelles d’opérateur

A- Rotationnel du gradient

Propriété : Pour tout champ scalaire f $\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\, f\right) = \vec{0}}$

Preuve :

On peut faire le calcul à l’aide de l’expression en coordonnées cartésiennes de $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$ puis du rotationnel *(à faire en exercice)*.

On peut également utiliser le théorème de Stokes : soit Σ une surface quelconque délimitée par le contour fermé orienté Γ_f : $\oint_{\Gamma_f} \overrightarrow{\text{grad}} f . \overrightarrow{dl} \underset{\substack{\text{propriété} \\ \text{du gradient}}}{=} 0 = \iint_{M\in\Sigma} \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{grad}}(M) dS_M \vec{n}(M)$

Réciproque :

Si un champ vectoriel $\vec{X}$ est tel que $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{X} = \vec{0}$, alors il existe un potentiel scalaire f tel que $\vec{X} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, f$ (même définition qu’en électrostatique, $\vec{X}$ étant à circulation conservative)

Le potentiel scalaire $f(\vec{r}, t)$ est défini à une fonction dépendant du temps près.

B- Divergence du rotationnel

Propriété : Pour tout champ vectoriel $\vec{G}$, $\boxed{\text{div}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{G}\right) = 0}$

Preuve :

On peut faire le calcul à l’aide de l’expression en coordonnées cartésiennes de $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{G}$ puis de la divergence *(à faire en exercice)*.

On peut également utiliser le théorème d'Ostrogradski : soit V un volume quelconque délimité par la surface fermée Σ_f : $\iiint_{P\in V} \operatorname{div}\left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{G}\right)(M).d\tau_M = \oiint_{P\in\Sigma_f} \overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{G}(P)dS_P\vec{n}(P) = \int_{\substack{A\to A\\ \text{contour}\\ \text{réduit à}\\ \text{un point}}} \vec{G}(N)\vec{dl}(N) = 0$

Réciproque :

Si un champ vectoriel $\vec{X}$ de divergence nulle $\operatorname{div}\vec{X} = 0$, alors il existe un champ vectoriel $\vec{G}$ (appelé potentiel vecteur) tel que $\vec{X} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{G}$

IV- Laplacien d'un champ scalaire

A- Définition et expression en coordonnées cartésiennes

Définition : Soit f un champ scalaire suffisamment régulier. On appelle Laplacien de f noté Δf, le champ scalaire défini par :

$$\boxed{\Delta f = \operatorname{div}\left(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,f\right)}$$

Remarque :

- Attention Δf n'a rien à voir avec $f_{final} - f_{initial}$
- $\dim(\Delta f) = \dim(f).L^{-2}$

Expression en coordonnées cartésiennes :

$$\boxed{\Delta f = \frac{\partial\left(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,f\right)_x}{\partial x} + \frac{\partial\left(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,f\right)_y}{\partial y} + \frac{\partial\left(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,f\right)_z}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}$$

B- Utilisation du Laplacien en électrostatique : équation de Poisson

En électrostatique : $\begin{cases} \vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}V \\ \operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \end{cases} \Rightarrow \quad \Delta V = \operatorname{div}\left(\overrightarrow{\operatorname{grad}}V\right) = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

$$\boxed{\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$ **équation de Poisson**

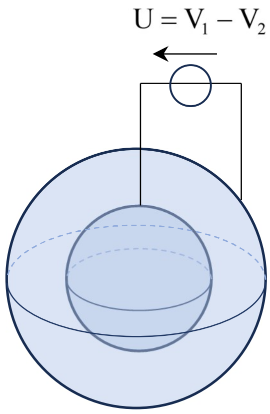
Cette équation est centrale en électrostatique cas elle permet une approche simple et rigoureuse de V (et donc de $\vec{E}$). En effet il existe un théorème d'unicité (je le cite ci-dessous, simplement pour votre culture, il est hors programme) :

Soit f un champ scalaire, $\mathcal{D}$ un domaine de l'espace délimité par Σ_f fermée. Si on connait Δf pour tout M de $\mathcal{D}$ et f ou $\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,f$ en tout point de Σ_f (condition aux limites) alors f est connu de manière unique pour tout M de $\mathcal{D}$

C- Application aux condensateurs

Problème du condensateur : Soit V1 et V2 les potentiels des deux armatures (on montrera que dans un condensateur, les deux armatures sont équipotentielles) ; **que vaut le potentiel V(M) dans l'espace interarmature** ?

(Sous-entendu, sans ajouter d'hypothèse sur la répartition des charges du type « σ uniforme » ou « $Q_1 = -Q_2$ » et donc sans avoir recours au principe de Curie, comme on l'a fait lors de la première présentation des condensateurs)



Principe de résolution :

On va résoudre l'équation de Poisson $\Delta V = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$ dans l'espace interarmature vide avec comme condition aux limites $V = V_1$ sur l'armature 1 et $V = V_2$ sur l'armature 2.

Pour cela, on va chercher $V(\vec{r})$ avec des symétries a priori compatibles avec les conditions aux limites. Si on trouve une solution, ce sera l'unique solution du problème.

Exemple du condensateur sphérique :

On cherche $\vec{E}(\vec{r})$, $V(\vec{r})$ pour tout M dans D en sachant que

$\forall M \in \mathcal{D}, \qquad \Delta V = 0$

En coordonnées sphériques : $\begin{cases} \forall(\theta,\varphi) \quad V(R_1,\theta,\varphi) = V_1 \\ \forall(\theta,\varphi) \quad V(R_2,\theta,\varphi) = V_2 \end{cases}$

Les conditions aux limites sont à symétrie sphérique donc on va « commencer » par chercher un potentiel ayant cette même symétrie $V(r,\theta,\varphi) = V(r)$

$$\Delta V = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\left(rV(r)\right) = 0 \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} V(R_1) = V_1 \\ V(R_2) = V_2 \end{cases}$$

Résolution : $rV(r) = a.r + b \qquad V(r) = a + \dfrac{b}{r}$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} V_1 = a + \dfrac{b}{R_1} \\ V_2 = a + \dfrac{b}{R_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \dfrac{V_1 - V_2}{\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}} \\ a = \dfrac{R_1V_1 - R_2V_2}{R_1 - R_2} \end{cases}$$

Donc $\boxed{V(r) = \dfrac{R_1V_1 - R_2V_2}{R_1 - R_2} + \dfrac{V_1 - V_2}{\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}}\dfrac{1}{r}}$ $\qquad \boxed{\vec{E} = \dfrac{V_1 - V_2}{\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}}\dfrac{1}{r^2}\overrightarrow{u_r}}$

On verra dans la suite du cours qu'à la surface du métal :

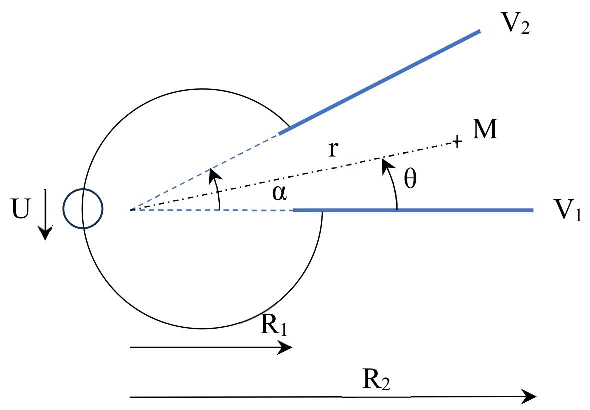
$$\vec{E}(R_1) = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}\overrightarrow{u_r} = \frac{V_1 - V_2}{\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}}\frac{1}{R_1^2}\overrightarrow{u_r}$$

$$\vec{E}(R_2) = -\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}\overrightarrow{u_r} = \frac{V_1 - V_2}{\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}}\frac{1}{R_2^2}\overrightarrow{u_r}$$

On en déduit $\begin{aligned} Q_1 &= 4\pi R_1^2\sigma_1 = 4\pi\varepsilon_0\dfrac{V_1 - V_2}{\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}} \\ Q_2 &= 4\pi R_2^2\sigma_2 = -4\pi\varepsilon_0\dfrac{V_1 - V_2}{\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}} \end{aligned}$. On retrouve bien $Q_1 = -Q_2$ et $C = \dfrac{4\pi\varepsilon_0}{\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}}$

Exercices :

Traiter le cas du condensateur plan et du condensateur dièdrique (cf schéma ci-dessous)



IV- Laplacien vectoriel d'un champ vectoriel

Définition :

Soit $\vec{G}$ un champ vectoriel suffisamment régulier.

On appelle laplacien vectoriel de $\vec{G}$, noté $\vec{\Delta}\vec{G}$, le champ défini en coordonnées cartésiennes par :

$$\vec{\Delta}\vec{G} = \Delta G_x \overrightarrow{u_x} + \Delta G_y \overrightarrow{u_y} + \Delta G_z \overrightarrow{u_z}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 G_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G_x}{\partial z^2} \right) \overrightarrow{u_x} + \left(\frac{\partial^2 G_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_y}{\partial y^2} \frac{\partial^2 G_y}{\partial z^2} \right) \overrightarrow{u_y} + + \left(\frac{\partial^2 G_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_z}{\partial y^2} \frac{\partial^2 G_z}{\partial z^2} \right) \overrightarrow{u_z}$$

Autre définition « intrinsèque » :

$$\vec{\Delta}\vec{G} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\,\vec{G}\right) - \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{G}\right)$$