DM de PHYSIQUE n°3 - 5/2
Mardi 5 novembre 2024

Problème I : Amortissement des vibrations mécaniques

Dans de nombreuses situations (automobiles, machines industrielles, constructions antisismiques), on souhaite diminuer la réponse d'un système aux vibrations mécaniques de son support. Ce problème est consacré à l'étude de quelques aspects de l'amortissement de ces vibrations mécaniques. Il se compose de trois parties. La seconde partie ne dépend de la première que pour l'application numérique finale.

On note $\Re(\underline{z})$ la partie réelle d'un nombre complexe $\underline{z}$.

Donnée numérique : $g = 9,81$ m.s^{-2}

I. Mouvement sans suspension

Dans cette partie, le système est un solide, assimilé à une masse ponctuelle M, initialement posé sur le sol, considéré plan et horizontal. Les mouvements du sol et de la masse sont supposés purement verticaux. L'axe vertical (Oz), de vecteur unitaire $\vec{u}_z$ est orienté vers le haut.

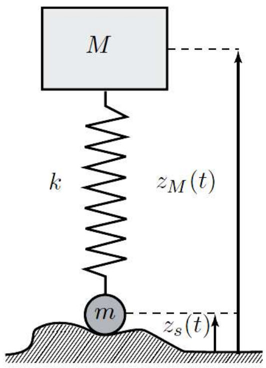


Figure 1

À partir de l'instant $t = 0$, le sol est animé de vibrations verticales d'élongation :

$$z_s(t) = z_0\left(1 - \cos(\omega t)\right)$$

1. a) Écrire une équation dynamique caractérisant le mouvement de la masse M.

b) Montrer qu'il existe deux régimes pour le mouvement de M, en fonction des caractéristiques de la vibration du sol. Donner la valeur a_M de l'accélération $a_s(t)$ du sol qui sépare les deux régimes. Préciser le mouvement de M dans le cas où $|a_s(t)| < |a_M|$ à tout instant.

2. On suppose maintenant que l'accélération du sol peut dépasser a_M en valeur absolue.

a) Montrer que la masse quitte le sol lorsqu'elle atteint une altitude z_D que l'on déterminera.

b) En déduire l'altitude maximale z_M atteinte en fonction de z_0, ω et g.

c) Calculer la durée de la phase de vol libre comprise entre l'instant du décollage de la masse et celui où elle repasse par l'altitude z_D.

3. Application : on considère une route imparfaitement plane, comportant une succession de bosses que l'on assimilera à une sinusoïde de période spatiale 2 m et de hauteur crête-crête 5 cm.

a) Quelle est la vitesse maximale à laquelle un véhicule totalement rigide peut parcourir cette route sans décoller ?

b) Quelle est la hauteur atteinte par un véhicule roulant à une vitesse de 60 km/h ?

c) Pendant combien de temps perd-on totalement le contrôle de ce véhicule?

II. Suspension sans amortisseur

La liaison entre la masse *M*, d'altitude z_M, et le sol se fait maintenant par l'intermédiaire d'un ressort de raideur *k*, de longueur à vide l_0 et de masse négligeable (figure 1). À l'extrémité inférieure de ce ressort, le contact avec le sol se fait par l'intermédiaire d'une petite masse $m < M$.

Dans cette partie, on néglige tout amortissement.

À partir de l'instant $t = 0$, la vibration verticale du sol a pour élongation :

$$z_s(t) = z_0\left(1-\cos(\omega t)\right)$$

1.a) En supposant que la masse *m* reste en contact avec le sol, montrer que l'équation différentielle régissant le mouvement de *M*, s'écrit sous la forme :

$$\ddot{z}_M + \omega_0^2\left(z_M - l_1\right) = a\left(1-\cos(\omega t)\right)$$

où l_1, ω_0 et a sont des constantes à déterminer.

b) Résoudre cette équation différentielle en supposant que :

$$z_M(t=0) = l_1 \text{ et } \dot{z}_M(t=0) = 0$$

c) Soient $z_{M\,max}$ et $z_{M\,min}$ respectivement les altitudes maximale et minimale atteintes par la masse *M* au cours du temps. Montrer que, à part pour quelques valeurs particulières de la pulsation ω, on a :

$$\Delta z = z_{\max} - z_{\min} \simeq c\frac{\omega^2+\omega_0^2}{\left|\omega^2-\omega_0^2\right|}z_0$$

où c est un facteur numérique que l'on déterminera. Représenter schématiquement, dans cette approximation, Δz en fonction de ω/ω_0.

2.a) Établir l'équation du mouvement de la masse *m*.

b) En déduire la condition pour que la masse *m* ne décolle pas du sol.

c) Mettre cette condition sous la forme $f(\omega) < K$ où $K = \left(g/\omega_0^2 z_0\right)\times\left(1+m/M\right)$ et $f(\omega)$ est le maximum d'une fonction temporelle de la forme $A\cos(\omega_0 t) + B\cos(\omega t)$, A et B étant des coefficients sans dimension que l'on explicitera en fonction de ω, ω_0, m, M.

d) Préciser la valeur de $f(\omega)$ à l'aide des paramètres adimensionnés $X = \omega^2/\omega_0^2$ et $\beta = m/M$. En étudiant les changements possibles de signe de A et B, montrer que :

$$\begin{cases} 0 < X < X_0 = 1 & \Rightarrow \quad f(\omega) = \dfrac{2X+\beta(1-X)X}{1-X} \\ X_0 = 1 < X < X_1 = 1+\dfrac{1}{\beta} & \Rightarrow \quad f(\omega) = \dfrac{2X+\beta(1-X)X}{X-1} \\ X_1 = 1+\dfrac{1}{\beta} < X & \Rightarrow \quad f(\omega) = \beta X \end{cases}$$

3. Application numérique : On considère une route de même profil qu'en **I.3** et un véhicule dont la masse suspendue vaut $M = 1280$ kg et la masse non suspendue $m = 160$ kg.

a) En régime statique, le ressort se comprime de $\delta l = l_0 - l_1 = 10$ cm sous l'effet de *M*. Calculer numériquement g/ω_0^2 puis la constante *K*.

b) On peut alors calculer, pour chacune des trois bandes de pulsations obtenues en **II.2.d,** les plages de valeur de *X* pour lesquelles la condition $f(\omega) < K$ est satisfaite, et en déduire qu'au final, le véhicule étudié ici ne décolle pas du sol à condition que :

$$0 < X < 0{,}69 \quad \text{ou} \quad 1{,}7 < X < 36$$

En déduire les plages de vitesse, exprimées en km/h, permises pour que les roues du véhicule restent en contact permanent avec le sol.

4.a) Des études montrent qu'une automobile est ressentie comme bien suspendue lorsque la fréquence propre du système est de l'ordre de 1,5 Hz. Les valeurs numériques données plus haut correspondent-elles à ce critère ?

b) Que deviennent les plages de valeur de X pour lesquelles la condition $f(\omega) < K$ est satisfaite, lorsqu'on diminue fortement la masse non suspendue m, les autres paramètres restant inchangés ? Un tel allègement est-il favorable ? Si oui, citer des exemples de solutions techniques qu'on peut imaginer dans ce but.

III. Suspension avec amortisseur

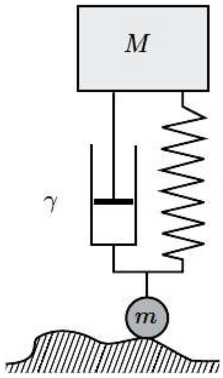


Figure 2

On ajoute maintenant, en parallèle avec le ressort de sus amortisseur (figure 2) qui exerce sur la masse M une force de ty donnée par :

$$\vec{F} = -\gamma \frac{dl}{dt} \vec{u}_z$$

où $l = z_M - z_m$, est la longueur instantanée du ressort et γ une consta précédemment, la vibration verticale du sol a une élongation donnée à 0 par :

$$z_s(t) = z_0\left(1 - \cos(\omega t)\right)$$

1.a) Écrire l'équation du mouvement de la masse M, dans le cas où m reste en contact avec le sol, à l'aide de z_m, $\dot{z}_m$ et des constantes ω_0, l_1 et $1/\tau = \gamma/M$.

b) Montrer que le mouvement de M comporte un régime transitoire qui s'atténue au cours du temps. Donner une description qualitative des divers régimes que l'on peut rencontrer ; les discuter selon la valeur du paramètre $\alpha = 1/\omega_0^2\tau^2$.

c) On se place dorénavant en régime sinusoïdal forcé, c'est-à-dire que l'on suppose le régime transitoire achevé. On pose :

$$Y_M = z_M - l_1 - z_0 = \Re\left(\underline{Y_M}\right).$$

Expliciter $\underline{Y_M}$ en notation complexe en fonction de z_0, ω, ω_0 et τ.

d) On s'intéresse à l'amplitude de vibration de M en fonction de ω. Montrer qu'elle s'exprime, en posant $X = \omega^2/\omega_0^2$, sous la forme :

$$\frac{|\underline{Y_M}|}{z_0} = \sqrt{\frac{1 + \alpha X}{(1 - X)^2 + \alpha X}}$$

Étudier qualitativement sa variation en fonction de X ; on précisera en particulier les valeurs de X pour lesquelles ce rapport vaut 1. Calculer numériquement la position et le maximum de ce rapport pour $\alpha = 4$ et $\alpha = 1$.

e) En comparant l'amplitude d'oscillation de M en fonction de la fréquence au résultat obtenu en **II.1.c**, quelles améliorations ou inconvénients vous semble apporter l'amortissement ?

2. Avec l'amortisseur, la condition pour que, en régime sinusoïdal forcé, la masse non suspendue m demeure en contact permanent avec le sol, se met sous la forme :

$$|F(\omega)| < (1+\beta)g/z_0\omega_0^2$$

où $X = \omega^2/\omega_0^2$, $\alpha = 1/\omega_0^2\tau^2$, $\beta = m/M$ et $|F(\omega)| = X\sqrt{\dfrac{(1+\beta-\beta X)^2 + (1+\beta)^2\alpha X}{(1-X)^2+\alpha X}}$.

a) Avec successivement les deux valeurs $\alpha = 4$ et $\alpha = 1$ du paramètre d'amortissement, calculer $|F(\omega)|$ pour $X = X_1/2, X_1$ et $2X_1$ où X_1 est la valeur de X obtenue en **II.2.d)**.

b) On utilise les mêmes données numériques qu'en **II.3** et **II.3.a)**. En comparant les valeurs de $|F(\omega)|$ aux résultats de **II.3.b)**, qu'en concluez-vous sur l'effet bénéfique ou néfaste de l'amortissement aux fréquences élevées ? Pour ces fréquences, quel est, à votre avis, l'élément de l'ensemble non suspendu d'une automobile qui peut améliorer la situation ?

* *
*

Problème 2

Un point matériel M, de masse m, est soumis à une force centrale newtonienne attractive de centre O fixe dans le référentiel d'étude R galiléen : $\vec{F} = -\frac{k}{r^2}.\overrightarrow{u_r}$ avec k constante positive et $\overrightarrow{OM} = r.\overrightarrow{u_r}$.

Les grandeurs cinématiques et dynamiques, associées au mouvement de M dans R sont notées :
$\vec{v}$ pour $\vec{v}(M/R)$, $\vec{L}_O$ pour $\vec{L}_O(M/R)$ moment cinétique en O de M dans R etc.....

A- Moment cinétique - énergie - vecteur excentricité

1- Quelle est la définition d'un référentiel galiléen ?

2- Montrer que le mouvement est plan et qu'il vérifie « la loi des aires » (on pourra se contenter de montrer que la constante dite « des aires » est effectivement une constante)

3- Montrer que l'énergie est une constante du mouvement. Donner son expression (on prendra l'énergie potentielle nulle pour $r \to \infty$).

4- Soit le vecteur excentricité défini par : $\vec{e} = \overrightarrow{u_\theta} - \frac{L_o}{k}.\vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse de M dans R ;

$\overrightarrow{u_z} = \frac{\overrightarrow{L_0}}{\left\|\overrightarrow{L_0}\right\|}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ le vecteur unitaire orthoradial de la base de coordonnées cylindriques $\left(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z}\right)$;

Remarque: $\vec{e}$ n'est pas un vecteur unitaire, contrairement aux vecteurs $\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z}$ introduits précédemment.

4a- Montrer que le vecteur $\vec{e}$ est une constante du mouvement.

4b- On choisit l'origine de l'angle polaire θ (c'est à dire l'axe polaire) pour avoir $\theta = \left(\vec{e}, \overrightarrow{u_\theta}\right)$.

Montrer, en considérant le produit scalaire $\vec{e}.\overrightarrow{u_\theta}$, que l'équation de la trajectoire peut se mettre sous la forme :

$r(\theta) = \frac{p}{1 - e.\cos(\theta)}$ où e est la norme du vecteur $\vec{e}$.

En déduire, selon les valeurs de e, la nature de la trajectoire.
Esquisser les différentes trajectoires.
Exprimer p en fonction de L_o, k et m.

4c- Montrer que $e^2 = 1 + \frac{2L_0^2}{mk^2}E_m$ où E_m est l'énergie mécanique du point M. Commenter cette relation.

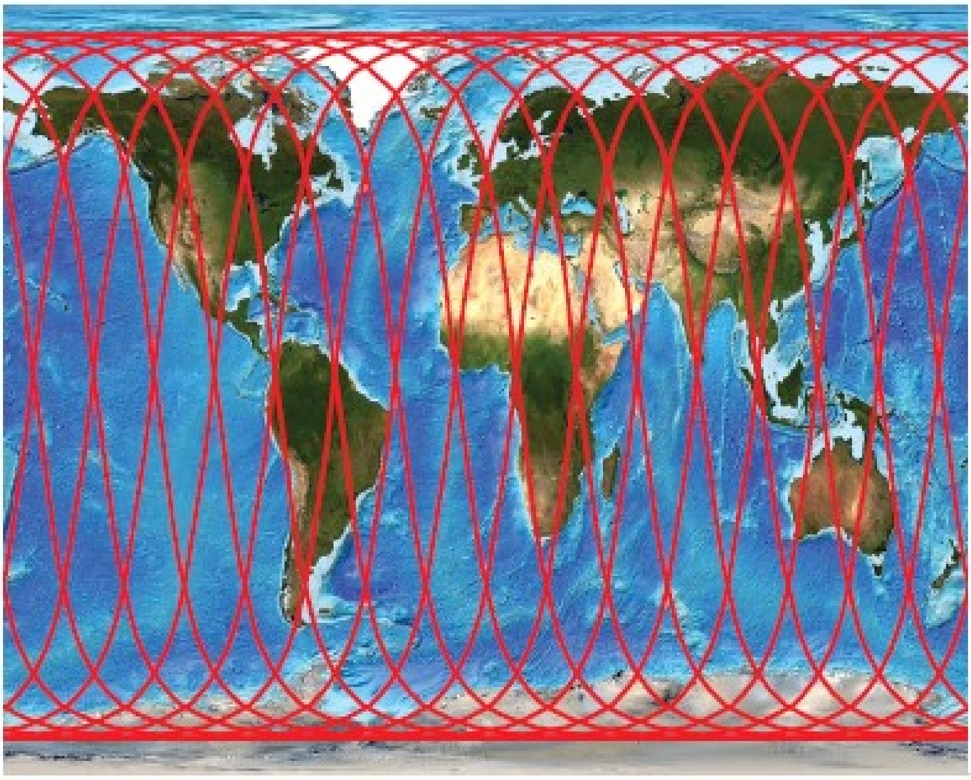
B- Satellites terrestres : étude du satellite GOCE

Le satellite GOCE, assimilé à un point matériel M de masse m est soumis à l'interaction gravitationnelle de la Terre.
La Terre est assimilée à une sphère de centre O, de rayon R = 6400 km et de masse $M = 6.10^{24}$ kg, sa répartition de matière possédant la symétrie sphérique de centre O.
On désigne par G la constante gravitationnelle, $G = 6{,}67.10^{-11}$ $N.m^2.kg^{-2}$.
L'étude est faite dans le référentiel géocentrique $R_{géo}$ considéré galiléen.

On pose $\overrightarrow{OM} = r.\overrightarrow{u_r}$ ($r \geq R$).

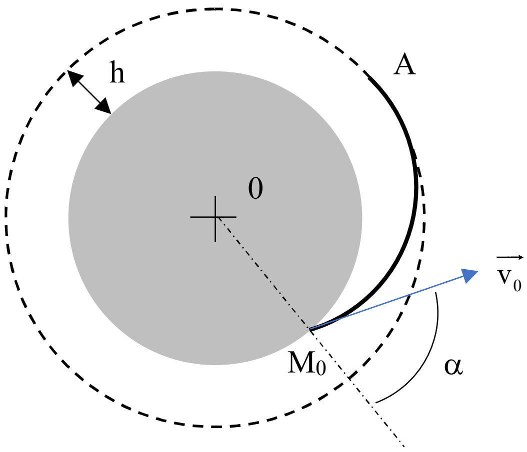
On néglige l'attraction gravitationnelle exercée par tous les astres autres que la Terre.

Le document ci-dessous représente la projection de la trajectoire **circulaire** du satellite GOCE sur le planisphère de la Terre **pendant une journée.**



1- Décrire la trajectoire du satellite autour de la Terre (dans le référentiel géocentrique) et déterminer la période de rotation T du satellite.
2- En déduire le rayon et l'altitude h de l'orbite circulaire du satellite (résultat à redémontrer)
On prendra dans la suite $h = 270\,\mathrm{km}$

Lors du lancement du satellite depuis un point M_0 à la surface de la Terre, on communique au lanceur une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ faisant un angle α avec $\overrightarrow{u_r}$ (cf schéma ci-dessous). On souhaite que la trajectoire M_0A amène le satellite au point A de l'orbite circulaire souhaitée (d'altitude h) avec une vitesse en A ayant la même orientation que sur l'orbite circulaire. Il suffira donc ensuite de modifier en A la vitesse du satellite (au moyen de petits moteurs intégrés au satellite) pour modifier la norme de la vitesse de façon à la placer sur l'orbite circulaire.



3- Quelle est la nature de la trajectoire M_0A. Que représente le point A pour cette trajectoire (à justifier) ?
4- Quelle est la valeur du moment cinétique initiale du satellite en O : $\overrightarrow{L_0}(M, t=0)$?

5- Déterminer la relation que doivent vérifier $v_0 = \left\| \overrightarrow{v_0} \right\|$ et α pour que le satellite arrive en A avec la vitesse ayant l'orientation souhaitée.

6- Dans le cas où $\alpha = 0$ représenter l'allure de la trajectoire de transfert M_0A, donner l'expression de la vitesse initiale v_0 à communiquer au satellite lors du lancement en M_0. Quelle serait alors la vitesse v_A' du satellite en A sur la trajectoire de transfert et l'énergie $\Delta E_m(A)$ à lui communiquer pour effectuer le transfert d'orbite (permettre le passage de la trajectoire M_0A à l'orbite circulaire de rayon $r_A = R + h$)

7- Dans toute la suite on s'intéresse au lancement avec $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Montrer qu'alors

$$v_0 = \sqrt{2GM\frac{r_A}{R}.\frac{1}{r_A + R}} \text{ avec } r_A = R + h$$

8- Dessiner alors l'allure de la trajectoire M_0A. Que représente le point M_0 pour la trajectoire ? Calculer l'énergie mécanique initiale et commenter l'expression trouvée.

9- Quelle est la durée du transfert de M_0 à A ?

10- Déterminer littéralement puis numériquement la vitesse v_A' du satellite en A sur la trajectoire de transfert.

Déterminer littéralement puis numériquement l'énergie à fournir en A, $\Delta E_m(A)$ pour effectuer les transferts d'orbite (et permettre le passage de la trajectoire M_0A à l'orbite circulaire de rayon $r_A = R + h$)