

DEVOIR SURVEILLÉ n°2
Samedi 19 octobre 2024

L'utilisation des calculatrices est autorisée. Toute réponse non justifiée ne sera pas considérée.

Deux problèmes 3 sont proposés : l'un est issue d'une épreuve de Centrale, l'autre de CCINP ; vous ne traiterez que l'un de ces deux problèmes

Problème 1 : Diodes à jonction PN (extrait de Mines MP 2013)

Attention : si certaines questions sont très proches du cours, d'autres sont assez difficiles, mais heureusement elles ne conditionnent pas la suite ; soyez tactiques ! Et ne vous laissez pas impressionner par la quantité de texte ...

Données numériques :

- Permittivité électrique du vide $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$
- Permittivité diélectrique relative du silicium $\epsilon_r = 11,8$
- Perméabilité magnétique du vide $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$
- Célérité de la lumière dans le vide $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
- Charge de l'électron $-e = -1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- Constante de Boltzmann $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$
- Masse d'un électron $m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

Pour les applications numériques on fournira 3 chiffres significatifs.

Aucune connaissance préalable sur les diodes n'est nécessaire pour traiter ce sujet. Le symbole électrique d'une diode est donné sur la figure 1. Idéalement, la diode est un composant électronique ayant la propriété de ne laisser passer le courant que dans un sens.

- Si $V \leq 0$ l'intensité I est nulle et la diode est dite bloquée point
- Si la tension V tend à devenir positive, la diode se débloque et se comporte comme un fil (ce qui annule aussitôt V). L'intensité i est alors positive et la diode est dite passante.

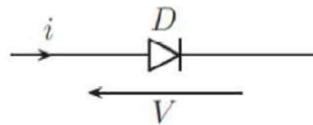


FIGURE 1 – Schéma électrique d'une diode.

Les diodes actuelles sont construites en matériau semi-conducteur. Le silicium pur est un semi-conducteur intrinsèque. Il s'y produit des ionisations thermiques (à température ambiante par exemple) : $\text{Si} = \text{Si}^+ + e^-$

Un ion Si^+ plus est appelé « trou » positif. On dit que l'ionisation crée une paire électron-trou. Le silicium étant neutre, il y a autant de porteurs de charge N (électrons négatifs) que de porteurs de charge P (trous positifs).

Lorsqu'un champ électrique est appliqué, les électrons *et les trous* se déplacent, assurant la conduction électrique. En réalité, un ion Si^+ ne se déplace car il fait partie du réseau cristallin. Cependant, il prend un électron à son atome de Si voisin, redevenant Si tandis que son voisin est devenu Si^+ . Ainsi, tout se passe comme si l'ion Si^+ avait migré. Du point de vue de la conduction, les trous positifs se comportent donc comme des porteurs mobiles donc la charge est opposée de celle de l'électron.

1- Comment évolue la conductivité d'un semi-conducteur lorsque la température augmente ? (justifier). Ce comportement est-il le même que pour les métaux ?

Semi-conducteur extrinsèque dopé N par un donneur d'électrons.

Dans du silicium (de valence 4), on peut introduire une faible proportion d'atomes de valence 5 (un atome de phosphore pour 10^{10} atomes de silicium par exemple). L'agitation thermique ionise le phosphore selon $P \rightarrow P^+ + e^-$. Cela libère un électron (porteur N) qui peut conduire le courant. En revanche, l'ion P^+ est fixe dans le réseau cristallin de silicium. Comme ses plus proches voisins sont des atomes de silicium et non de phosphore, l'ion P^+ ne peut pas échanger d'électron avec un atome de phosphore voisin et ainsi donner l'illusion qu'il se déplace. Il ne constitue donc pas un trou positif mobile. Ainsi l'ajout d'atomes de phosphore augmente le nombre de porteurs mobiles négatifs (N) sans changer le nombre de porteurs mobiles positifs (P). Les porteurs mobiles N sont donc majoritaires : le semi-conducteur est dit « dopé N », les atomes de phosphore étant qualifiés de donneurs d'électrons

Semi-conducteur extrinsèque dopé P par un accepteur d'électrons.

Dans du silicium (de valence 4), on peut introduire une faible proportion d'atomes de valences 3 (comme le bore par exemple). Un atome de bore capture un électron à un silicium voisin, ce qui crée un ion B⁻ et un ion sSi⁺. L'ion B⁻ est fixe dans le réseau cristallin et ses plus proches voisins sont des atomes de silicium et non de bore. Il ne peut donc pas, par échange d'électron avec un atome de bore voisin donner l'illusion qu'il se déplace. Ce n'est donc pas un porteur mobile de type négatif (N). En revanche, l'ion Si⁺ constitue un trou positif (P) mobile car il est toujours entouré de nombreux atomes de Si dans le réseau de silicium cristallin. Ainsi l'ajout d'atomes de bore augmente le nombre de porteurs mobiles P sans changer le nombre de porteurs mobiles N. Les porteurs mobiles P sont donc majoritaires : le semi-conducteur est dit « dopé P », les atomes de bore étant qualifiés d'accepteurs d'électrons.

Les semi-conducteurs dopés sont globalement neutres car les charges des porteurs libres sont compensées par les charges fixes.

On crée une jonction PN en accolant deux blocs de silicium dopés P et N respectivement (voir figure 3).

- Le semi-conducteur P est dopé avec N_A accepteurs d'électrons par unité de volume
- Le semi-conducteur N est dopé avec N_D donneurs d'électrons par unité de volume.

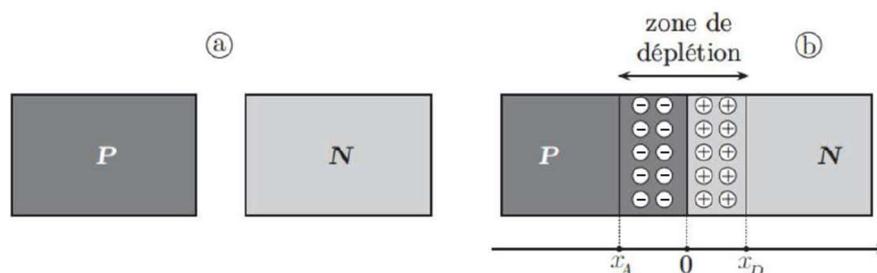


FIGURE 3 – Réalisation d'une jonction PN en $x = 0$.

Lors de l'établissement de la jonction, les électrons du semi-conducteur N diffusent dans le semi-conducteur P car il y a un gradient de concentration en électrons. De même, les trous du semi-conducteur P diffusent dans le semi-conducteur N à cause du gradient de concentration en trous.

La diffusion, non étudiée ici, se poursuit jusqu'à atteindre l'état d'équilibre (simplifié) suivant.

- La région $[x_A, 0]$, initialement neutre, est complètement vidée des trous positifs apportés par ses atomes accepteurs. Elle devient chargée négativement avec la densité volumique de charge ρ_1 , supposé uniforme pour simplifier. (Cette charge est négative car elle résulte de la présence d'accepteur ionisés, fixes dans le réseau cristallin)
- La région $[0, x_D]$, initialement neutre, est complètement vidée des électrons apportés par atomes donneurs. Elle devient chargée positivement avec la densité volumique de charge ρ_2 , supposé uniforme pour simplifier. (Cette charge est positive car elle résulte de la présence des donneurs ionisés, fixes dans le réseau cristallin)
- En dehors de $[x_A, x_D]$, le matériau n'est pas modifié.

La zone $[x_A, x_D]$ est appelée **zone de déplétion** ou **zone de charge d'espace**. En résumé :

$$\begin{cases} \rho(x) = 0 & \text{pour } x < x_A \text{ et } x > x_D \\ \rho(x) = \rho_1 & \text{pour } x \in [x_A, 0] \\ \rho(x) = \rho_2 & \text{pour } x \in [0, x_D] \end{cases}$$

La largeur de la zone de déplétion est très faible devant les dimensions des blocs de semi-conducteurs. On négligera donc tout effet de bord dans les directions orthogonales au vecteur unitaire \vec{u}_x

- 2- Exprimer les densités volumiques de charges ρ_1 et ρ_2 en fonction de N_A , N_D et la charge élémentaire e (on justifiera avec soin les relations suivantes $\rho_1 = -N_A e$ et $\rho_2 = -N_D e$)
- 3- Etablir, en la justifiant, une relation simple entre N_A , N_D , x_A et x_D .

On admet que le champ électrique dans le matériau est nul en dehors de la zone de charge d'espace. Dans le silicium, les lois de l'électrostatique s'appliquent en remplaçant ϵ_0 par $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ où $\epsilon_r = 11,8$ est la permittivité diélectrique relative du silicium.

- 4- Déterminer le champ électrique $\vec{E}(x)$ en tout point de la zone de charge d'espace ($x \in [x_A, x_D]$). En précisant les valeurs remarquables sur le graphe, tracer la composante non nulle du champ en fonction de x (pour x variant sur un intervalle strictement plus grand que $[x_A, x_D]$)

Conventionnellement, l'origine des potentiels sera prise en $x = 0$.

- 5- En déduire l'expression du potentiel électrostatique $V(x)$ dans tout le matériau. Tracer $x \mapsto V(x)$ pour x variant sur un intervalle strictement plus grand que $[x_A, x_D]$. Préciser les valeurs remarquables sur le graphe.
- 6- Exprimer la différence de potentiel $V_0 = V(x_D) - V(x_A)$ entre deux points situés de part et d'autre de la jonction. On exprimera V_0 en fonction de e , ϵ , N_A , N_D , x_A et x_D .
- 7- Expérimentalement, on constate que $V_0 = 0,70 \text{ V}$ pour une jonction caractérisée par $N_A = 1,00 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-3}$ et $N_D = 2,00 \cdot 10^{23} \text{ m}^{-3}$. Exprimer et calculer numériquement la largeur $w = x_D - x_A$ de la zone de charge d'espace dans ce cas.

La jonction PN peut être polarisée par une différence de potentiel V imposée par un générateur extérieur. Dans ce cas, on admet que le modèle précédent reste valable mais :

- La différence de potentiel entre les régions N et P devient $V_0 - V$;
- Les valeurs de x_A et x_D s'en trouvent modifiées.

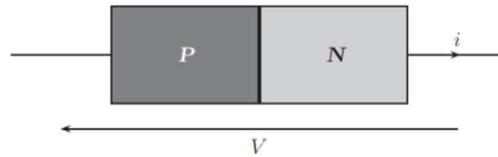


FIGURE 4 – Jonction PN polarisée par une différence de potentiel extérieure V . Les détails de la zone de déplétion n'ont pas été représentés.

8- Par une étude complète (non effectuée ici), on peut montrer que la caractéristique théorique courant-tension est donnée par $i = I_s \left(\exp\left(\frac{eV}{k_B T}\right) - 1 \right)$ avec les orientations de la figure 4, et où :

- e est la charge élémentaire ;
- k_B est la constante de Boltzmann,
- T est la température
- $I_s > 0$ est appelé « courant inverse de saturation ». Son amplitude, pour les calculs on prendra $1,00 \cdot 10^{-5}$ A, est habituellement négligeable dans les montages électroniques.

Pour une température donnée, représenter la caractéristique i en fonction de V de la diode en précisant les éléments remarquables sur le graphe. Préciser la valeur de V correspondant à $i = 1,00$ A à la température ambiante $T = 293$ K . Que représente physiquement le facteur $k_B T$?

Dans la suite, on impose une différence de potentiel extérieure V négative aux bornes de la diode. La diode, bloquée dans ce cas, est dite polarisée en inverse. On posera $U = -V$ avec $U > 0$

9- On note S la surface de la jonction PN (aire de contact des deux semi-conducteurs dopés). Exprimer les quantités Q_A et Q_D respectivement stockées dans les régions $[x_A, 0]$ et $[0, x_D]$ en fonction de e , ϵ , S , N_A , N_D , V_0 et U . Donner les valeurs numériques de Q_A et Q_D pour $S = 1,00 \text{ mm}^2$ et $U = 4,00$ V .

10- Lorsque U devient $U + \delta U$ où $|\delta U| \ll U$, les quantités de charges Q_A et Q_D sont modifiées de δQ_A et δQ_D (car la largeur de la zone de déplétion l'est). Déterminer la **capacité dynamique de jonction**, définie par : $C = \frac{\delta Q_D}{\delta U}$

Cette capacité dépend, entre autres, de la tension U . Donner sa valeur numérique pour $U = 4,00$ V

Problème 2 : Géophysique de la planète Terre (extrait de Centrale-Supélec MP 2018)

Ce sujet propose de traiter de diverses applications de la physique à l'étude de la planète Terre. On s'intéresse dans un premier temps aux méthodes de mesure du champ de pesanteur terrestre (gravimétrie) puis à leurs applications dans le génie civil. Dans un deuxième temps, on étudie les méthodes de prospection électrique des sols utilisées pour sonder des terrains.

Un ensemble de valeurs numériques est disponible en fin d'énoncé.

Certaines questions peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

I Champ gravitationnel et champ de pesanteur terrestre

I.A – Champ gravitationnel créé par la Terre

Q 1. Énoncer le théorème de Gauss appliqué à la gravitation en précisant les analogies entre forces électrostatiques et gravitationnelles. On notera $\vec{\mathcal{G}}$ le champ gravitationnel.

La Terre est assimilée à une boule homogène de rayon R_T , de centre C et de masse M_T uniformément répartie en volume. On repère un point M de l'espace dans le système de coordonnées sphériques d'origine C , associé à la base locale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$. On appelle $z = r - R_T > 0$ l'altitude d'un point M situé à l'extérieur de la Terre et on associe à ce point un axe (Oz) (verticale du lieu) dont l'origine O est en $r = R_T$ et tel que $\vec{e}_z = \vec{e}_r$.

Q 2. Déterminer l'expression du champ gravitationnel $\vec{\mathcal{G}}_T$ créé par la Terre à une altitude $z > 0$.

I.B – Variation du champ gravitationnel avec l'altitude

Soit un corps de masse m , assimilé à un point matériel, situé à la distance $r = R_T$ du centre C de la Terre (altitude $z = 0$). On définit le vecteur unitaire local \vec{u} perpendiculaire à l'axe (Δ) de rotation de la Terre sur elle-même (figure 1).

Q 3. Montrer que l'intensité du champ gravitationnel selon la verticale s'écrit, pour $z \ll R_T$: $\mathcal{G}_T(z) \approx \frac{GM_T}{R_T^2} \left(1 - 2\frac{z}{R_T}\right)$.

Q 4. Calculer l'altitude dont il faut s'élever pour observer une variation de 1,00% de \mathcal{G}_T .

Q 5. Donner l'expression du gradient vertical du champ gravitationnel. Que représente-t-il physiquement ?

Q 6. Les géophysiciens utilisent comme unité de mesure du champ de pesanteur le gal avec $1 \text{ gal} = 1,00 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-2}$. Évaluer la valeur du gradient exprimée en $\mu\text{gal}\cdot\text{cm}^{-1}$ et commenter.

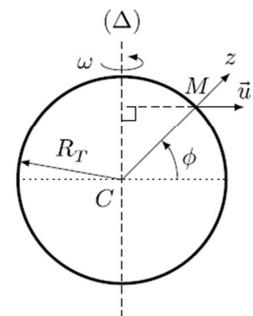


Figure 1

IV Applications de la gravimétrie

La gravimétrie est l'étude des variations du champ de pesanteur dans l'espace et dans le temps. Elle permet de déterminer la répartition des masses au sein de la Terre et d'avoir ainsi accès à sa structure. Par exemple, la gravimétrie est utilisée pour déterminer la forme de la Terre (géodésie), pour détecter des cavités (génie civil ou archéologie), pour suivre les stockages d'eau (hydrologie continentale).

Dans cette partie, nous allons déterminer, par une analyse gravimétrique, les dimensions d'un corps sphérique enterré dans un sol de masse volumique moyenne μ_m (figure 7).

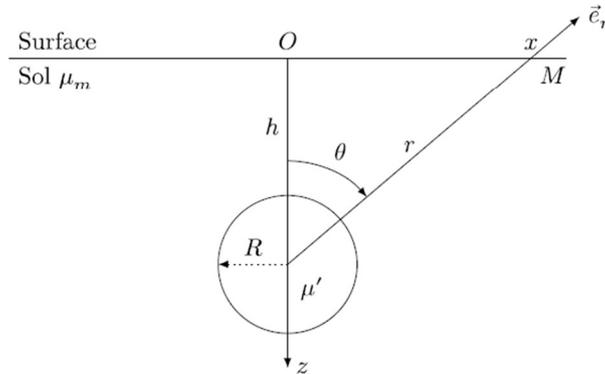


Figure 7

Q 28. En utilisant le théorème de Gauss gravitationnel, déterminer l'expression du champ de pesanteur en un point M situé à l'extérieur d'une sphère homogène de rayon R et de masse volumique $\mu' = \mu_m + \Delta\mu$ en fonction de μ_m , $\Delta\mu$, G , R , r , distance de M au centre de la sphère, et du vecteur unitaire \vec{e}_r (figure 7).

Le corps sphérique se trouve à une profondeur h dans le sol. Loin de la sphère (pour $r \gg R$), le champ de pesanteur est vertical selon Oz de valeur g_0 .

Q 29. Déterminer $g_{\beta z}$, la composante verticale du champ de pesanteur créé par la boule au point M situé à une distance x de la verticale.

Q 30. Montrer que l'anomalie gravimétrique $\Delta g = g_z - g_0$, qui fait varier le champ de pesanteur apparent en un lieu, est identique au champ de pesanteur g'_z créé par une sphère de masse volumique $\Delta\mu$.

Q 31. Montrer que l'anomalie gravimétrique s'écrit

$$\Delta g = \frac{4\pi G \Delta\mu R^3 h}{3(x^2 + h^2)^{3/2}}$$

Q 32. Tracer l'allure de la courbe Δg en fonction de x pour des sphères identiques enterrées à deux profondeurs différentes h_1 et $h_2 > h_1$.

Q 33. Quel est le lien entre la profondeur h et la largeur à mi-hauteur de la courbe ? Que vaut l'anomalie gravimétrique maximale ?

Q 34. Déterminer, à l'aide la courbe de la figure 8, la profondeur h et le rayon R de la sphère enterrée.

Q 35. Comment rendre indétectable par analyse gravimétrique de l'or stocké dans une grotte sphérique ?

Q 36. La grotte de 1 m de rayon est à 4 m de profondeur. Quelle masse d'or est-il possible de cacher par cette méthode ? Pour information, la masse volumique de l'or est $\rho_{\text{or}} = 19\,300 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Q 37. Une étude archéologique préalable prévoit la disposition de deux grottes sphériques de même dimension (figure 9). Tracer l'allure de la courbe de l'anomalie gravimétrique attendue $\Delta g = f(x)$ en vous aidant de la figure 10.

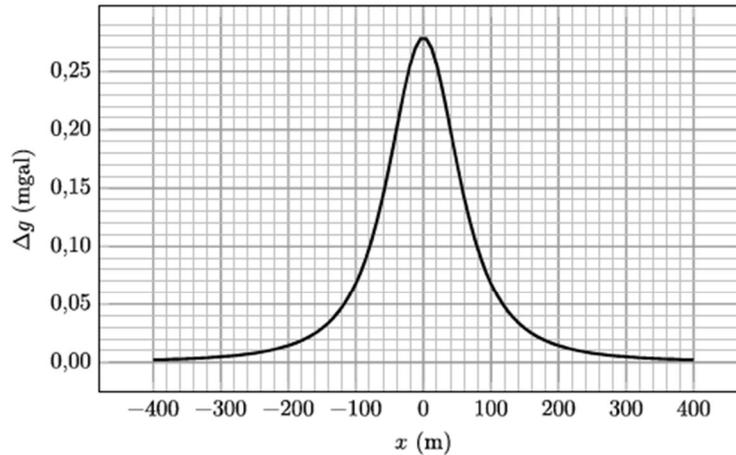


Figure 8 Anomalie gravimétrique Δg pour une sphère enterrée avec $\Delta\mu = 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$

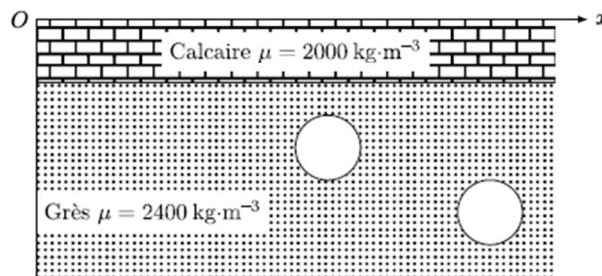


Figure 9

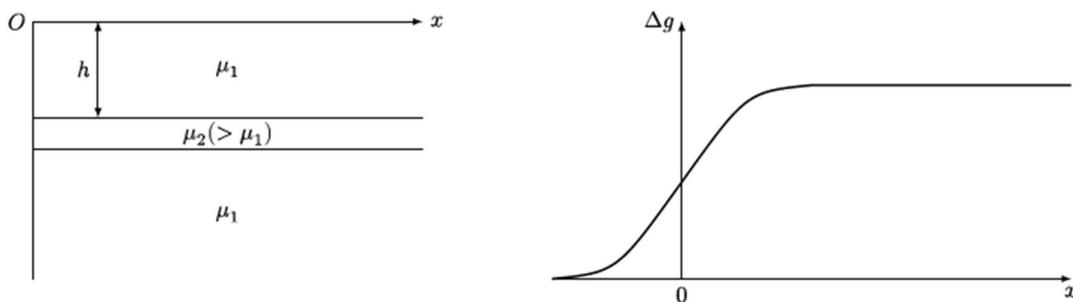


Figure 10 Anomalie gravimétrique pour une plaque horizontale semi-infinie

V Prospection électrique des sols

La prospection électrique est l'une des plus anciennes méthodes de prospection géophysique. Elle repose sur l'interprétation de la résistance électrique du terrain. Ces mesures doivent être réalisées *in situ*, cette mesure ne pouvant être réalisée en laboratoire sur un échantillon sorti de son environnement. Elles sont particulièrement adaptées à l'étude des faibles profondeurs.

On définit la résistivité d'un conducteur ohmique par la loi d'Ohm locale : $\vec{E} = \rho \vec{j}$ où \vec{E} est le champ électrique et \vec{j} le vecteur densité volumique de courant.

V.A – Sol homogène

Q 38. Exprimer la résistance électrique d'un parallélépipède homogène de longueur L , de section A et de résistivité $\rho = 1/\sigma$ où σ est la conductivité électrique du matériau (figure 11).

(On pourra supposer \vec{j} et \vec{E} uniformes et on montrera que $R = \rho \frac{L}{A}$)

Q 39. Dans la pratique on utilise un courant alternatif très basse fréquence. Pour quelle raison ?

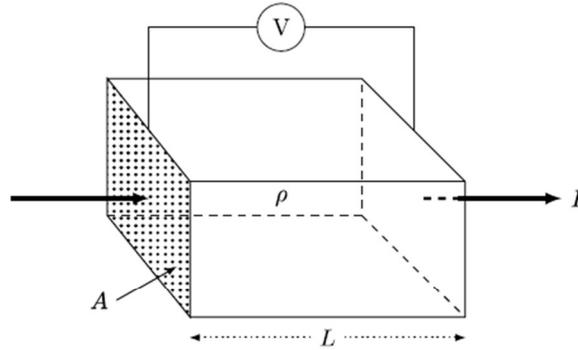


Figure 11

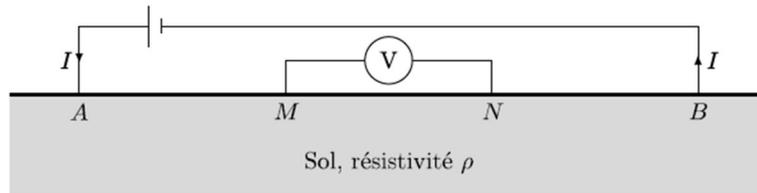


Figure 12

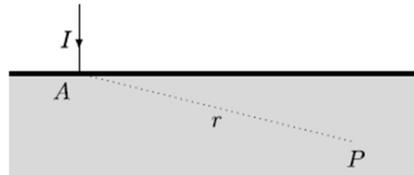


Figure 13

Q 40. Considérons seulement l'électrode placée en A (figure 13). On note $\vec{j}(r)$ le vecteur densité volumique de courant au point P . La terre est considérée comme homogène. Quelle est la forme des lignes de courant dans la terre ? Donner l'expression de $\vec{j}(r)$ en fonction notamment de l'intensité du courant I et de r .

Q 41. Exprimer le champ électrique $\vec{E}(r)$ et le potentiel électrique $V_A(r)$ au point P en fonction de I , r et ρ . On suppose que la valeur du potentiel est nulle à grande distance.

Q 42. Dans le cas des deux électrodes (figure 14), exprimer le potentiel électrique V au point P en fonction de ρ , r_A , r_B et I . On suppose que la valeur du potentiel est nulle à grande distance. Quelle relation définit les équipotentielles ?

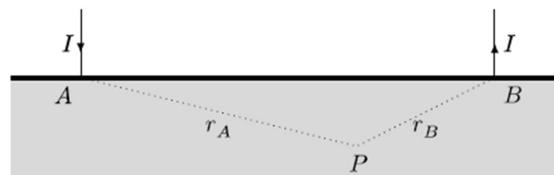


Figure 14

Q 43. Exprimer la différence de potentiel $\Delta V = V_M - V_N$ lue sur le voltmètre (figure 12). Montrer que la résistivité s'écrit $\rho = \frac{2\pi\Delta V}{If}$ où f est le facteur géométrique à exprimer en fonction des distances MA , MB , NA et NB .

Q 44. Dans le cas de la configuration dite de Wenner (figure 15), les points A , M , N et B sont équidistants espacés de la longueur ℓ . Exprimer le facteur géométrique f .



Figure 15

Q 45. Les courbes de la figure 16 présentent le résultat de la simulation des équipotentiels tracées pour deux électrodes distantes de 10 m situées en $\pm 5,0$ m plantées dans un terrain de résistivité $\rho = 100 \Omega\cdot\text{m}$. L'intensité du courant est $I = 0,50$ A. Que vaut le facteur géométrique correspondant dans la configuration de Wenner ? Cette valeur est-elle en accord avec la simulation de la figure 16 ?

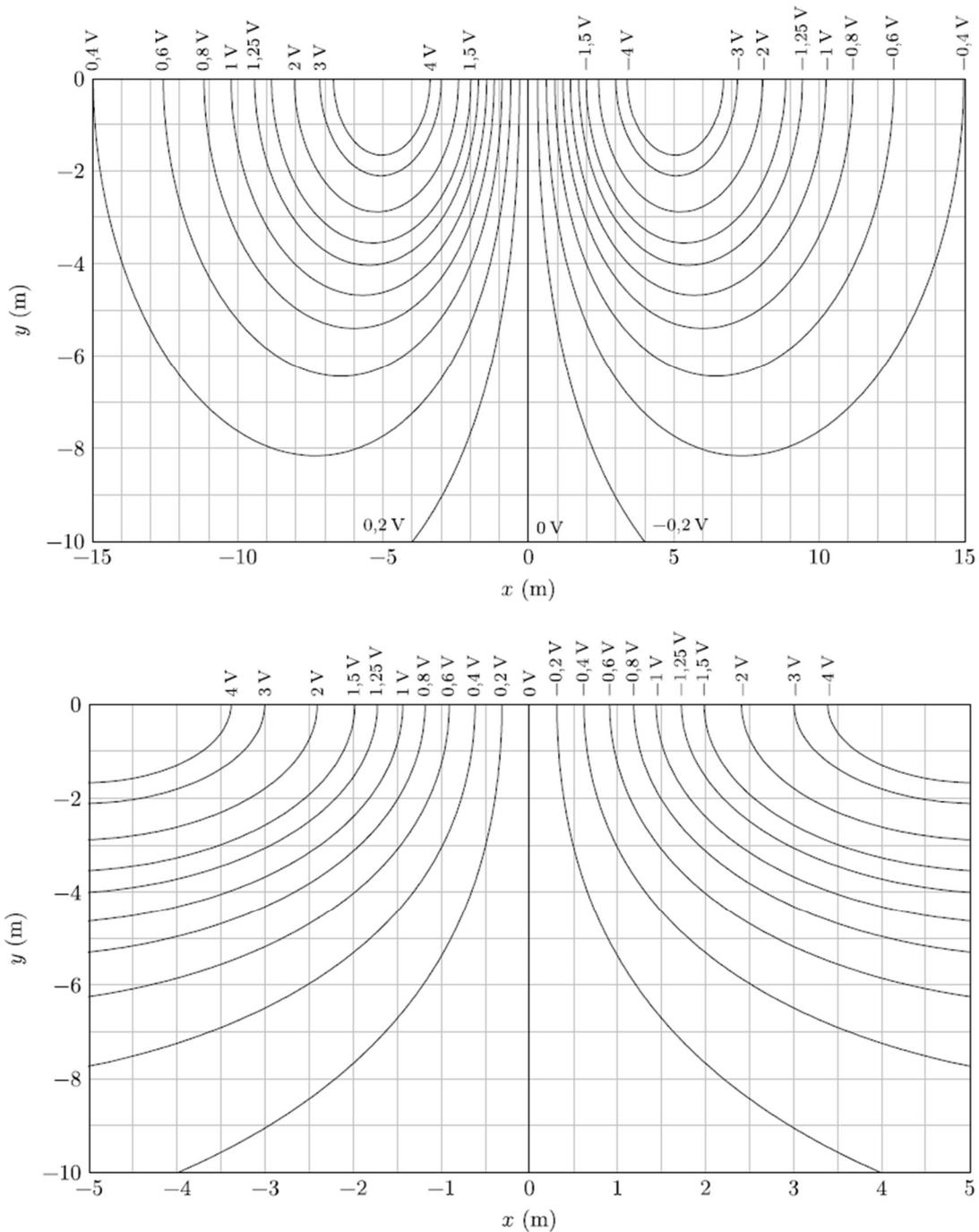


Figure 16

Q 46. Tracer, en expliquant votre démarche, l'allure des lignes de courant.

V.B – Modèle à deux terrains

Dans le cas d'un milieu inhomogène on parle de résistivité apparente. Dans le modèle dit à deux terrains, le sol est constitué de deux couches superposées de résistivité ρ_1 et d'épaisseur h_1 pour la couche supérieure et de résistivité ρ_2 et d'épaisseur infinie pour la couche inférieure (figure 17). La résistivité apparente est mesurée pour différents espacements entre électrodes (distance AB variable).

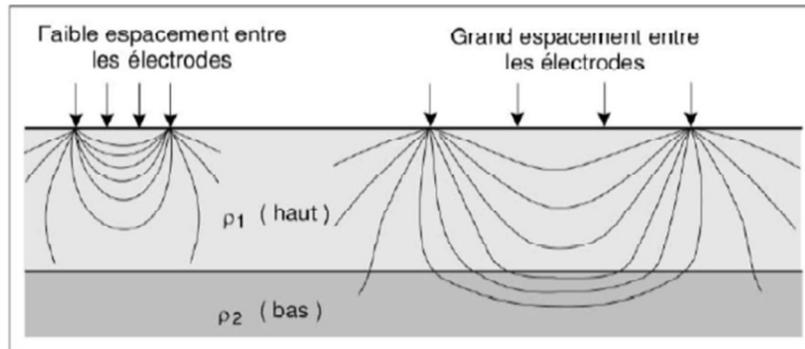


Figure 17 Illustration du sondage électrique (d'après Chouteau et Giroux (2006)), allure des lignes de courant

Q 47. Vers quelle valeur tend à priori la résistivité apparente lorsque AB est faible ? lorsque AB est très grande ?

Q 48. La courbe de la figure 18 représente la résistivité apparente ρ_a mesurée expérimentalement en fonction de la distance $AB/2$. Déterminer la résistivité ρ_1 et ρ_2 des terrains ainsi qu'une estimation de la valeur h_1 , épaisseur de la couche supérieure. On s'aidera de l'abaque CH1 donné figure 19 qui représente ρ_a/ρ_1 en fonction de $AB/2h_1$ en échelle bi-logarithmique. Chaque courbe de cet abaque correspond ainsi à la courbe d'un sondage électrique exécuté sur un sous-sol composé de deux terrains où la première couche a une épaisseur h_1 et une résistivité ρ_1 .

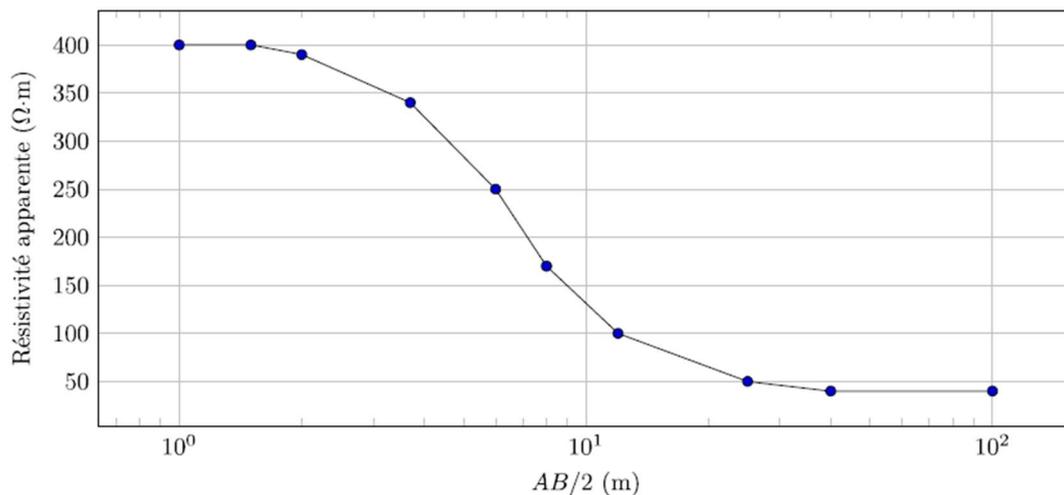


Figure 18 Mesure deux terrains

Données numériques

Constante de gravitation universelle

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$$

Rayon de la Terre

$$R_T = 6,37 \times 10^3 \text{ km}$$

Masse de la Terre

$$M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$$

Unité de mesure de la pesanteur

$$1 \text{ gal} = 1,00 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$$

Ordre de grandeur de la sensibilité des gravimètres actuels

$$\Delta g = 1 \text{ } \mu\text{gal}$$

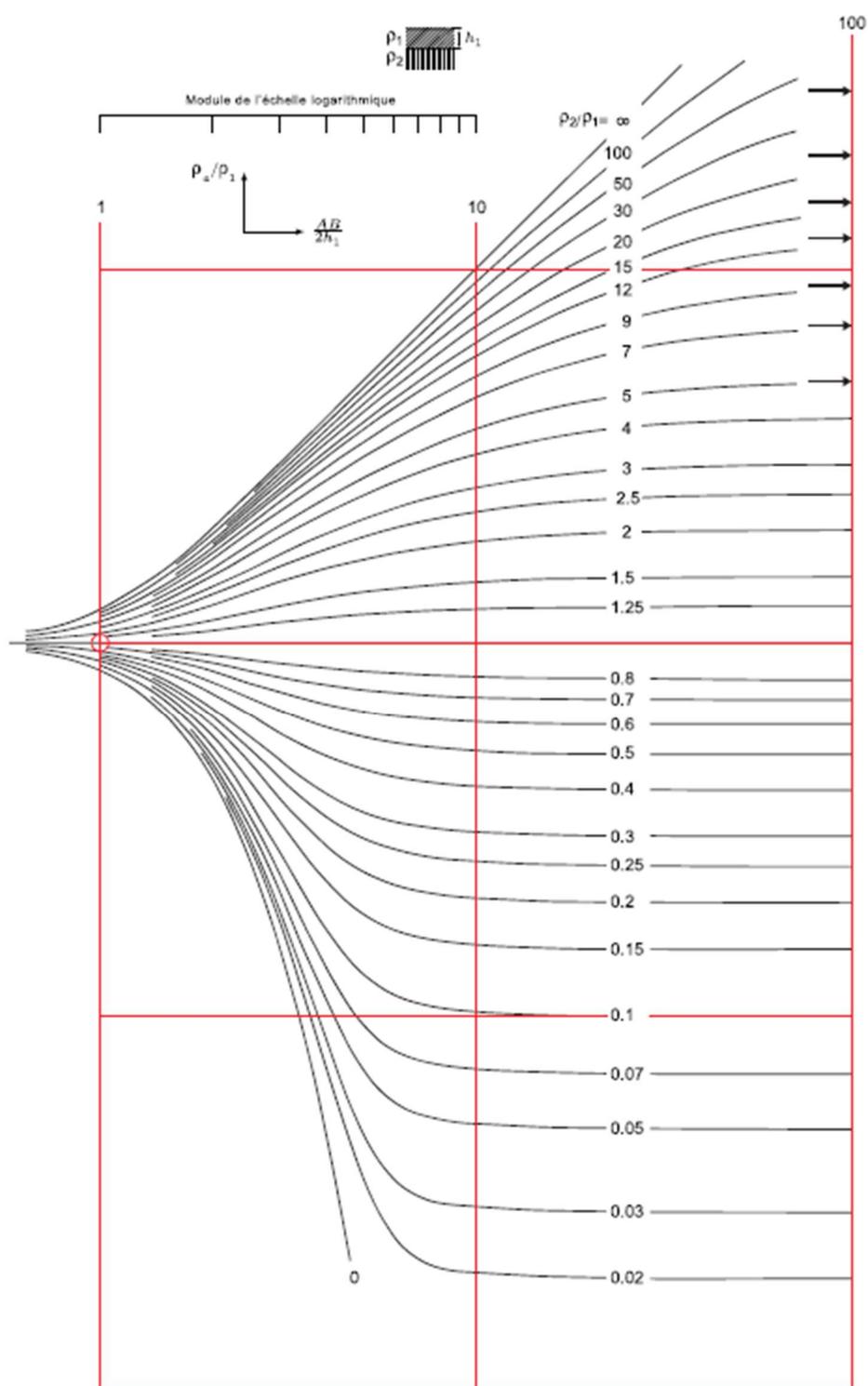


Figure 19 Abaque CH1

Problème 3 AU CHOIX

Problème 3A : de la physique du vivant (extrait de CCINP 2021)

Au cours de leur évolution, de nombreux systèmes biologiques dans la nature ont développé d'incroyables spécificités pour s'adapter à leur environnement. Ce sujet propose l'étude de certaines de ces spécificités. On s'intéressera ainsi dans la **partie I** aux qualités d'adhésion du gecko, avec l'étude d'interactions entre molécules polaires en **sous-partie I.1**, puis le calcul de la force d'adhérence d'un gecko au plafond en **sous-partie I.2**. Dans la **partie II**, on aborde les facultés d'isolation thermique du manchot empereur avec quelques généralités sur les transferts thermiques en **sous-partie II.1**, avant le calcul du métabolisme d'un manchot en **sous-partie II.2**. Enfin, la **partie III** propose quelques études autour des propriétés de superhydrophobie de la feuille de lotus avec l'analyse de deux expériences : la mesure d'une tension superficielle en **sous-partie III.1** et la mesure de l'angle de contact d'une goutte posée sur un substrat solide par interférométrie optique en **sous-partie III.2**. La **sous-partie III.3** développe une application de la superhydrophobie en microfluidique.

Seule la partie I sera traitée dans la suite.

Données

- Opérateur gradient d'un champ scalaire U :
 - $\overline{\text{grad}}(U) = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{u}_z$ en coordonnées cartésiennes
 - $\overline{\text{grad}}(U) = \frac{\partial U}{\partial \rho} \vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{u}_z$ en coordonnées cylindriques
 - $\overline{\text{grad}}(U) = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$ en coordonnées sphériques
- Opérateur laplacien vectoriel d'un champ vectoriel $\vec{a} = a_x \vec{u}_x + a_y \vec{u}_y + a_z \vec{u}_z$ en coordonnées cartésiennes : $\Delta \vec{a} = (\Delta a_x) \vec{u}_x + (\Delta a_y) \vec{u}_y + (\Delta a_z) \vec{u}_z$ où $\Delta a_{i=x,y,z} = \frac{\partial^2 a_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_i}{\partial z^2}$
- Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
- Constante de Boltzmann : $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
- Constante de Stefan : $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$
- Intensité de la pesanteur : $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
- Masse volumique de l'eau : $\rho_e = 1,00 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- Viscosité dynamique de l'eau à 20 °C sous 1 bar : $\eta_e = 1,00 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$
- Coefficient de tension superficielle de l'interface eau/air à 20 °C : $\gamma_e = 73 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$
- Définition du debye (D) : $1 \text{ D} = 3,33 \cdot 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$

Partie I - Le gecko

Source : Autumn K., L'insusable adhésif des pattes du gecko, *Pour la Science*, n° 343, 2006, p. 82-88.

Le gecko est un petit lézard capable de se déplacer à des vitesses de plusieurs mètres par seconde sur les murs ou les plafonds de pratiquement toutes natures, dans presque toutes les conditions. Des expériences menées en 2002 par l'équipe de l'américain Kellar Autumn ont montré que la spectaculaire faculté d'adhésion de l'animal est uniquement due à des forces de Van der Waals. L'adhésion est possible grâce à l'anatomie particulière des coussinets des doigts du lézard. Ces derniers sont recouverts de poils microscopiques, les sétules, ramifiés en des centaines de branches terminées par une spatule pouvant s'approcher à quelques nanomètres de la surface de contact.

I.1 - Interactions entre molécules polaires

On considère une molécule polaire située dans le vide, modélisée par un dipôle électrique rigide de moment dipolaire électrique permanent $\vec{p}_1 = p_1 \vec{u}_z$. Le dipôle, centré en un point O , est constitué de deux charges ponctuelles opposées, $+q$ et $-q$ (avec $q > 0$), situées sur l'axe (O, \vec{u}_z) aux points respectifs P et N distants de $a = PN$ (**figure 1**). On repère tout point M de l'espace par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) dans le repère $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$.

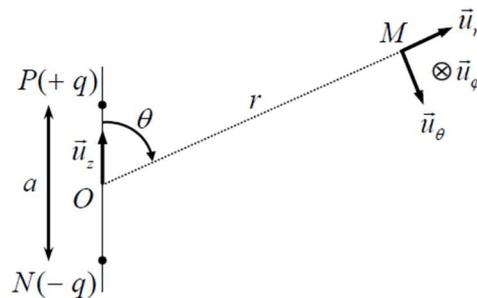


Figure 1 - Dipôle électrique centré en un point O

- Q1.** Expliquer, en prenant l'exemple de la molécule de chlorure d'hydrogène (HCl), l'origine du moment dipolaire permanent de certaines molécules. Donner l'expression en fonction de a et q du moment dipolaire électrique \vec{p}_1 de la molécule polaire.
- Q2.** Établir l'expression du potentiel électrostatique $V_1(M)$ créé en M par la molécule polaire dans le cadre de l'approximation dipolaire qu'on explicitera. On donnera le résultat en fonction de p_1 , ε_0 et des coordonnées sphériques du point M .
- Q3.** En déduire que le champ électrostatique $\vec{E}_1(M)$ créé en M par la molécule polaire s'écrit en coordonnées sphériques :
$$\vec{E}_1(M) = \frac{p_1}{4\pi\varepsilon_0 r^3} (2 \cos(\theta) \vec{u}_r + \sin(\theta) \vec{u}_\theta).$$

Une seconde molécule polaire, modélisée par un dipôle rigide de moment dipolaire électrique permanent \vec{p}_2 , est située au point M sur l'axe (O, \vec{u}_z) tel que $\theta = 0$, à la distance r fixe du point O . À un instant donné, son moment dipolaire forme un angle α avec cet axe (**figure 2**). Dans ces conditions, la molécule plongée dans le champ électrostatique dû à l'autre molécule située au point O subit un couple de forces de moment : $\vec{\Gamma} = \vec{p}_2 \wedge \vec{E}_1(M)$. On rappelle l'expression de l'énergie potentielle d'interaction des deux molécules : $\mathcal{E}_{12} = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1(M)$.

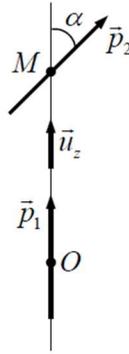


Figure 2 - Interaction entre deux molécules polaires

Q4. Quel est l'effet du couple de forces subi par la molécule fixée au point M ? Justifier l'orientation de son moment dipolaire électrique lorsqu'elle est en équilibre stable.

Les deux molécules sont supposées identiques, de moments dipolaires électriques de même valeur $p_1 = p_2 = p = 1 \text{ D}$.

Q5. Estimer l'énergie potentielle d'interaction des deux molécules, distantes de $r = 0,5 \text{ nm}$, en supposant leurs moments dipolaires électriques alignés. Comparer cette énergie à l'énergie d'agitation thermique qui est de l'ordre de $k_B T$ où k_B est la constante de Boltzmann, à la température ambiante $T = 293 \text{ K}$. Conclure.

Q6. Du fait de l'agitation thermique, on doit considérer l'énergie potentielle d'interaction moyenne entre deux dipôles situés à une distance r dont les orientations relatives sont sujettes à des variations aléatoires. À température suffisamment élevée, on montre que cette énergie potentielle d'interaction moyenne est de la forme : $\langle \mathcal{E}_{12} \rangle = -\frac{C_K}{r^6}$ où

$$C_K = \frac{1}{k_B T} \left(\frac{p^2}{2\pi\epsilon_0} \right)^2.$$

Donner un ordre de grandeur de C_K à la température ambiante $T = 293 \text{ K}$. Vérifier que la force $\vec{F}_{1/2}$ qui dérive de cette énergie potentielle est attractive. On rappelle que $\vec{F}_{1/2} = -\overline{\text{grad}} \langle \mathcal{E}_{12} \rangle$.

I.2 - Calcul de la force d'adhérence du gecko au plafond

La force, calculée à la question précédente, correspond à une interaction de Van der Waals entre molécules polaires. Si on considère maintenant deux plans infinis parallèles, distants de D et séparant chacun un milieu solide (**figure 3**), on montre en prenant en compte l'ensemble des interactions de Van der Waals que la force surfacique entre les deux milieux s'écrit : $f(D) = \frac{A}{6\pi D^3}$.

La constante A , appelée constante de Hamaker, dépend de la nature des interactions de Van der Waals et des densités moléculaires des deux solides en interaction.

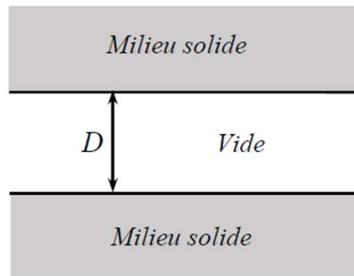


Figure 3 - Deux milieux plans infinis en interaction

- Q7.** Vérifier que la constante de Hamaker A est homogène à une énergie.
- Q8.** Un gecko de masse $m = 50$ g est suspendu par ses quatre pattes au plafond. Le gecko possède au total 6 millions de sétules, comportant chacune en moyenne 500 spatules. En modélisant une spatule par une surface carrée de $0,2 \mu\text{m}$ de côté située à une distance $D = 1$ nm du plafond, estimer le pourcentage de sétules utilisées par le gecko pour soutenir sa masse. On prendra $A = 10^{-19}$ J et on négligera tout effet de bord.
- Sachant que l'équipe de Kellar Autumn a constaté qu'un gecko de 50 g utilise à son maximum d'adhérence uniquement 0,04 % de ses sétules pour soutenir sa masse, peut-on bien imputer les facultés d'adhérence du gecko aux interactions de Van der Waals ? Pourquoi le gecko mobilise-t-il certainement davantage de sétules pour assurer son adhérence ?
- Q9.** À un instant pris pour origine, on suppose que le gecko lâche le plafond et chute de 10 cm avant de se rattraper à l'aide d'une patte à une surface verticale. Sachant que l'équipe de Kellar Autumn a pu mesurer une force de cisaillement (opposée au glissement) de l'ordre de 10 N par patte, estimer la distance que doit parcourir le gecko lorsque sa patte est en contact avec le mur pour s'arrêter. On supposera qu'il mobilise 50 % de la capacité de cisaillement maximale de sa patte.

Cette question fait appel à une démarche de résolution de problème. Il est notamment attendu de préciser chaque notation introduite, de présenter de façon claire les hypothèses retenues, de mener de bout en bout un calcul littéral, puis d'effectuer l'application numérique attendue.

Problème 3B : généralités sur les plasmas (extrait de Centrale PSI 2004)

Les plasmas sont des milieux macroscopiquement neutres, partiellement ou totalement ionisés. Naturels ou artificiels, on les rencontre sous de nombreuses formes : arc et décharges électriques, foudres, vent solaire, ionosphère, étoiles, laser à gaz ...

On donne le laplacien en coordonnées sphériques d'une fonction $f(r)$ (non indispensable) :

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r.f(r))}{\partial r^2}$$

Les données numériques nécessaires à la résolution de ce problème sont données ci-dessous :

Permittivité diélectrique du vide	$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$	Constante de Boltzmann	$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	Masse d'un électron	$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Constante de Planck	$h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$	Nombre d'Avogadro	$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Energie d'ionisation de l'atome d'Argon	$E_{\text{ion}} = 15,7 \text{ eV}$	Masse molaire de l'argon	$M = 39,9 \text{ g.mol}^{-1}$
Constante des gaz parfaits	$R = 8,31 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$	Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$

On considère un plasma d'argon contenant, en moyenne et par unité de volume, n_e électrons libres de masse m_e et de charge $-e$, $n_i = n_e$ ions Ar^+ de masse m_i et n_0 atome Ar de masse m_0 . On définit le

degré d'ionisation de ce plasma par le rapport : $\alpha = \frac{n_e}{n_e + n_0}$.

On considère d'autre part que le plasma est en équilibre thermodynamique local, ce qui permet de définir la température thermodynamique T de ce plasma.

Partie A : Etude de l'écart local à la neutralité : longueur de Debye

Considérons un ion argon Ar^+ particulier, placé en O, et pris comme origine. Du fait de l'attraction Coulombienne, au voisinage de cet ion, on observe un surplus de charge négative, responsable d'un écart local à la neutralité globale du plasma. Soit $V(r)$ le potentiel qui règne en un point M situé à la distance r de l'ion Ar^+ situé en O (l'origine des potentiels est prise à l'infini). Les densités volumiques d'ions et d'électrons en M s'écrivent respectivement :

$$n_+ = n_e \exp\left(-\frac{eV(r)}{k_B T}\right), \text{ et } n_- = n_e \exp\left(\frac{eV(r)}{k_B T}\right) \text{ avec } k_B \text{ la constante de Boltzmann.}$$

A1- Quelle(s) remarque(s) vous suggèrent les expressions de n_+ et n_- ? Quel nom donne-t-on usuellement à ces lois de répartition ?

A2a- Donner l'expression de la densité volumique totale de charges au point M, $\rho_c(r)$ pour $r \neq 0$

A2b- Montrer que $V(r)$ obéit à l'équation différentielle : $\frac{1}{r} \frac{d^2(rV)}{dr^2} - \frac{2n_e e}{\epsilon_0} \text{sh}\left(\frac{eV(r)}{k_B T}\right) = 0$

A2c- On se place dorénavant dans l'hypothèse $eV(r) \ll k_B T$. Simplifier l'équation obtenue à la question A2b- et la résoudre en introduisant la fonction $u(r) = rV(r)$. On introduira pour cela deux constantes d'intégration A_1 et A_2 .

A2d- On admet que $V(\infty) = 0$ et qu'au voisinage immédiat de l'ion Ar^+ , l'influence de sa charge, supposée ponctuelle l'emporte sur celle des charges électroniques distribuées en volume. Déterminer les constantes A_1 et A_2 . Donner ensuite l'expression du potentiel $V(r)$ en fonction de e , ϵ_0 , r et d'une distance caractéristique λ_D (appelée longueur de Debye) que l'on exprimera en fonction de ϵ_0 , k_B , T , n_e et e . Commenter le résultat obtenu.

A3- En déduire la densité volumique totale de charge $\rho_c(r)$ en $r \neq 0$, puis la charge totale $Q(r)$ (y compris la charge ponctuelle centrale) contenue dans une sphère de centre O et de rayon r en fonction e , λ_D et r . Discuter les cas $r \rightarrow 0$ et $r \rightarrow \infty$. Conclure.

A4- Application numérique : on donne pour ce plasma d'Argon $n_e = 3,0 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-3}$. Calculer la valeur numérique de λ_D à la température de 1 000K, puis de 10 000K. Discuter la validité de l'approximation faite en **A2c-**.

Partie B : Comportement collectif d'un plasma pulsation plasma.

Tout gaz ionisé dont la dimension caractéristique est grande devant la longueur de Debye λ_D est dominé par les effets collectifs induits par la charge d'espace, effets qui viennent masquer les comportements individuels étudiés dans la partie **A**. Pour illustrer le comportement collectif, qui se manifeste notamment lorsqu'on observe à une boule de plasma de centre O et de rayon R , qu'on considérera comme la superposition de deux fluides incompressibles : un fluide d'électrons, susceptibles de se mouvoir, et un fluide d'ions qu'on suppose au repos (les densités ioniques et électroniques de deux fluides précédents sont considérées comme uniformes). On admet qu'à l'instant t , le gaz d'électrons s'est déplacé radialement et qu'il occupe la région de l'espace comprise entre deux sphères, une sphère de rayon $r_0(t)$ et une sphère de rayon $R + r_1(t)$ avec $r_1(t)$ très petit devant R (voir figure 1).

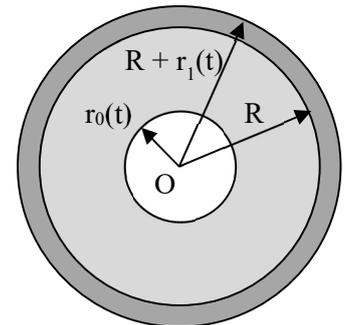


Figure 1

B1- Sachant que le fluide d'électrons est supposé incompressible, quelle est la relation qui relie $r_0(t)$ à $r_1(t)$ et R ?

B2- On considère un électron de ce fluide, situé au point M à la distance r de O , avec $r \in [r_0, R]$. Déterminer, en fonction de e , n_e , r et $r_0(t)$ puis de e , n_e , R , r , ϵ_0 et $r_1(t)$, le champ électrique $\vec{E}(M, t)$ régnant en M à l'instant t . En déduire la force électrique s'exerçant sur l'électron situé en M .

B3- Un électron, évoluant à la distance moyenne R du point O , possède à l'instant t le vecteur vitesse $\dot{r}_1(t) \vec{u}_r$. De même, le vecteur vitesse d'un électron oscillant autour du point M précédent est $\vec{v}(r, t) = v(r, t) \vec{u}_r$. En utilisant l'incompressibilité du gaz d'électrons, écrire la relation existant entre la vitesse $v(r, t)$ de l'électron, $\dot{r}_1(t)$, r et R .

B4- Dédurre des deux questions précédentes l'équation différentielle satisfaite par $r_1(t)$. Mettre en évidence l'existence d'une pulsation ω_p caractéristique de ce comportement collectif, appelée pulsation plasma, dont on donnera l'expression en fonction de n_e , e , m_e et ϵ_0 .

B5- Quel phénomène vient en pratique amortir les oscillations collectives du plasma ?

B6- Calculer, pour un plasma d'argon de densité électronique $n_e = 3,0 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-3}$ à la température de 10 000K, la valeur de la pulsation plasma ω_p . En réalité, à un éventuel mouvement pulsatoire collectif, radial, se superpose le mouvement désordonné du plasma, dû à l'agitation thermique de ses constituants. L'ordre de grandeur de la section efficace moyenne σ_{eff} lors d'une collision élastique ion-électron est de $5 \cdot 10^{-17} \text{ m}^2$. On donne d'autre part

l'expression de la valeur moyenne du module de la vitesse d'un électron : $\bar{v} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m_e}}$.

Compte tenu de ces valeurs, le mouvement collectif peut-il être mis en évidence ?

Pro