Problème 3B : généralités sur les plasmas (extrait de Centrale PSI 2004)

Quelques généralités sur les plasmas.

A1- L'énergie potentielle d'un ion argon de charge e : $E_p^+ = +eV(r)$

L'énergie potentielle d'un électron de charge -e : $E_p^- = -eV(r)$

La loi proposée montre que, **pour chaque type de charge, la répartition dans l'espace est non uniforme, favorisée là où Ep est minimum, défavorisée là où Ep est élevée**.

Au voisinage d'un ion Ar^+, V(r) doit être positif et décroissant en s'éloignant : ainsi,

• $E_p^- = -eV(r)$ diminue quand $r \to 0$, ce qui favorise la présence des électrons proche de l'ion.

• $E_p^+ = +eV(r)$ augmente quand $r \to 0$, ce qui défavorise la présence des la présence des autres ions Ar^+ à proximité de l'ion Ar+ situé en O.

La loi montre également que **cet effet de « tri » s'atténue à température élevée** (quand $T \to \infty$, n_+ et $n_- \to n_e$ pour tout r : répartition uniforme)

Cette loi « statistique est la **loi de Boltzmann**.

A2a- $\boxed{\rho(\vec{r}) = e\left(n_+(\vec{r}) - n_-(\vec{r})\right) = n_e e\left(e^{-\frac{eV(r)}{k_B T}} - e^{\frac{eV(r)}{k_B T}}\right) = -2en_e \text{sh}\left(\frac{eV(r)}{k_B T}\right)}$

A2b- On peut procéder de différentes manières à cette question

Première méthode (dans le cadre actuel du cours) : théorème de Gauss.

La forme proposée du potentiel (à symétrie sphérique) impose $\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{dV}{dr}\vec{e_r} = E_r(r)\vec{e_r}$

Nous appliquons le théorème de Gauss en choisissant comme surface de Gauss la sphère de centre O et de rayon r :

$$\oiint_{P\in \text{Sphère}} \vec{E}(\vec{r_P})dS_p\overrightarrow{n_{ext}}(P) = \oiint_{P\in\text{Sphère}} E_r(r_P)dS_p = 4\pi r^2 E_r(r) \quad \text{car sur la sphère } r_P = cst = r$$

$$\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{\text{boule}} \rho(\overrightarrow{r_M})d\tau_M = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{r_M=0}^{r} \rho(r_M)4\pi r_M^2 dr_M$$

On a donc pour tout r : $\cancel{4\pi} r^2 E_r(r) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{r_M=0}^{r} \rho(r_M)\cancel{4\pi} r_M^2 dr_M$

En dérivant membre à membre par rapport à r : $\frac{d}{dr}\left(r^2 E_r(r)\right) = -\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV}{dr}\right) = \frac{\rho(r)r^2}{\varepsilon_0}$

Or $\frac{d^2(rV)}{dr^2} = \frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr} + V\right) = r\frac{d^2V}{dr^2} + 2\frac{dV}{dr}$ et

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV}{dr}\right) = 2r\frac{dV}{dr} + r^2\frac{d^2V}{dr^2} = r\frac{d^2(rV)}{dr^2}$$

On retrouve bien l'équation proposée : $r\frac{d^2(rV)}{dr^2} = -\frac{\rho(r)r^2}{\varepsilon_0}$ soit

$$\boxed{\frac{1}{r}\frac{d^2(rV)}{dr^2}=\frac{2n_e}{\varepsilon_0}\mathrm{sh}\left(\frac{eV(r)}{k_BT}\right)}$$

Deuxième méthode : en appliquant l'équation de Maxwell Gauss

$$\mathrm{div}\vec{E}=\frac{1}{r^2}\frac{d(r^2E_r)}{dr}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{avec } \frac{d(r^2E_r)}{dr}=-\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV}{dr}\right)=-\left(2r\frac{dV}{dr}+r^2\frac{d^2V}{dr^2}\right)=-r\frac{d^2(rV)}{dr^2}$$

Et on retrouve encore l'équation proposée

Troisième méthode : les 5/2 (à ce stade de l'année) ont également pu utiliser directement l'équation de Poisson : $\Delta V=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (où Δ est l'opérateur « laplacien » dont le texte donne l'expression en coordonnées sphériques.

L'équation proposée s'appelle justement l'équation de « Poisson Boltzmann ».

IAc- Si $eV \ll k_BT$, on linéarise le sh (ou les exp) et on obtient : $\boxed{\frac{1}{r}\frac{d^2(rV)}{dr^2}-\frac{2n_e}{\varepsilon_0}\frac{e^2V(r)}{k_BT}=0}$;

ou en utilisant la fonction u donnée par le texte $\boxed{\frac{d^2u}{dr^2}-\underbrace{\frac{2n_e}{\varepsilon_0}\frac{e^2}{k_BT}}_{\frac{1}{\lambda_D^2}}u=0}$

On posera donc $\boxed{\lambda_D=\sqrt{\frac{\varepsilon_0k_BT}{2n_ee^2}}}$ homogène à une longueur (d'après l'équation différentielle)

C'est la longueur de Debye que le texte demande d'introduire à la question suivante, mais elle apparaît parfaitement ici dans l'équation différentielle.

Solution $\boxed{u=A_1e^{-\frac{r}{\lambda_D}}+A_2e^{\frac{r}{\lambda_D}}}$ soit $\boxed{V=\frac{A_1}{r}e^{-\frac{r}{\lambda_D}}+\frac{A_2}{r}e^{\frac{r}{\lambda_D}}}$

IAd- D'après les indications fournies par le texte

$V\xrightarrow[r\to\infty]{}0$ dont $A_2=0$

Au voisinage immédiat de l'ion Ar^+ ($r\to 0$), on doit avoir $V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r}$ qui correspond au potentiel créé par l'ion Ar^+ seul ; ceci impose $A_1=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}$

Ainsi $\boxed{V=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}e^{-\frac{r}{\lambda_D}}}$

Commentaire : V(r) décroît beaucoup plus vite avec r que si Ar^+ était seul $\left(e^{-\frac{r}{\lambda_D}}\ll 1 \text{ pour } r>\text{qq }\lambda_D\right)$. Physiquement ceci est dû à l'accumulation de charges négatives au voisinage de Ar^+ qui compensent partiellement ses effers électrostatiques : on parle d'**effet d'écran** (ou d'**écrantage**) des électrons sur l'ion. λ_D est ka taille caractéristique au de la de laquelle l'ion est totalement écranté par les électrons qui l'entourent.

Ainsi bien que l'interaction électrostatique ait la même forme et donc la même portée (infinie) que l'interaction gravitationnelle, l'interaction électrostatique a une portée effective beaucoup plus courte que l'interaction gravitationnelle. Ainsi cette interaction régit les mouvements à l'échelle microscopique et à notre échelle, elle est responsable de toutes les actions de contact (réaction d'un support, force de rappel élastiques …) alors que les mouvements planétaires sont eux régit par l'interaction gravitationnelle.

Remarque : une justification complète des hypothèse de l'énoncé sur le potentiel se fait grâce au théorème de Gauss : le flux de $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$ à travers une sphère de rayon r s'écrit :

$\Phi(r) = -\dfrac{dV}{dr}4\pi r^2 = 4\pi\left(A_1\left(1+\dfrac{r}{\lambda_D}\right)e^{-\frac{r}{\lambda_D}} + A_2\left(1-\dfrac{r}{\lambda_D}\right)e^{\frac{r}{\lambda_D}}\right)$ et vaut $\dfrac{Q(r)}{\varepsilon_0}$ où Q(r) est la charge intérieure à la sphère.

Si $r \to \infty$, $Q(r) \to 0$ par l'électroneutralité de l'ensemble du plasma d'où $\Phi(r) \to 0$, ce qui impose $A_2 = 0$ et $V \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$

Si $r \to 0$, $Q(r) \to e$: charge de l'ion Ar^+ située en O d'où $\Phi(r) \to \dfrac{e}{\varepsilon_0}$; ce qui impose $A_1 = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0}$ et $V \underset{r\to 0}{=} \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}$

IA3- On a vu que $\rho(r) \approx 2n_e\dfrac{e^2V(r)}{k_BT}$ d'où $\boxed{\rho(r) = 2n_e\dfrac{e^3}{4\pi\varepsilon_0 k_BT}\dfrac{e^{-\frac{r}{\lambda_D}}}{r} = -\dfrac{e}{4\pi\lambda_D^2}\dfrac{e^{-\frac{r}{\lambda_D}}}{r}}$

Q(r) peut se calculer de deux façons :

De façon intégrale : $Q(r) = \underbrace{\iiint_{\text{boule}} \rho(\overrightarrow{r_M})d\tau_M}_{\text{charge des ions et des électrons autour de O}} + \underbrace{e}_{\text{charge de l'ion } Ar_+ \text{ situé en O}}$

Par le théorème de Gauss : $Q(r) = \varepsilon_0\Phi(\vec{E},\text{Boule})$ (mieux)

(cela rejoint la remarque faite au **IAd-**)

On obtient $\boxed{Q(r) = \varepsilon_0 4\pi r^2\left(-\dfrac{dV}{dr}\right) = e\left(1+\dfrac{r}{\lambda_D}\right)e^{-\frac{r}{\lambda_D}}}$

et on retrouve bien $Q(r) \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$ ce qui traduit l'électroneutralité de l'ensemble du plasma

$Q(r) \xrightarrow[r\to 0]{} e$ ce qui traduit la présence de l'ion Ar^+ en O.

IA4 : AN $\lambda_D(T = 1000K) = 2{,}8.10^{-8}$ m $\qquad \lambda_D(T = 10000K) = 8{,}9.10^{-8}$ m

on obtient un ordre de grandeur de 10 à 100 fois la taille atomique.

Pour discuter la validité de l'approximation $eV \ll k_BT$, évaluons $\dfrac{eV}{k_BT}$ en fonction de $\dfrac{r}{\lambda_D}$

$$\frac{eV(r)}{k_BT}=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 k_BT}\frac{e^{-\frac{r}{\lambda_D}}}{r}=\underbrace{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 k_BT\lambda_D}}_{\text{noté K}}\frac{e^{-\frac{r}{\lambda_D}}}{\frac{r}{\lambda_D}}$$

Pour $T=1000\,\text{K}$ (valeur la plus restrictive de T pour tester l'approximation) on a $K=0,59$ (proche de 1).

Ainsi $\frac{eV(r)}{k_BT}\ll 1 \Leftrightarrow \frac{e^{-\frac{r}{\lambda_D}}}{\frac{r}{\lambda_D}}\ll 1$; l'approximation n'est donc valable que pour

$\boxed{r>2 \text{ ou } 3\ \lambda_D}$ (résultat obtenu après avoir tracé à la calculatrice la fonction $x\to\frac{e^x}{x}$) ; ce qui est peu satisfaisant puisque c'est précisément entre r = 0 et quelques λ_D que V est significativement non nul et que l'étude nous intéresse !

Pour $T=10000\,\text{K}$ on a $K=1,9.10^{-2}$ ce qui permet d'avoir $\frac{eV(r)}{k_BT}\ll 1$ dès que $\frac{e^{-\frac{r}{\lambda_D}}}{\frac{r}{\lambda_D}}<1$,

soit dès que $\boxed{r>0,5\ \lambda_D}$: c'est déjà beaucoup plus intéressant !

IB1- Dire que le volume est incompressible signifie qu'une quantité donnée de fluide à un **volume invariable**. Ainsi on a

$$\text{Volume final}=\frac{4}{3}\pi\left((R+r_1)^3-r_0^3\right)=\text{Volume initial}=\frac{4}{3}\pi R^3$$

Comme $r_1\ll R$, $(R+r_1)^3=R^3\left(1+\frac{r_1}{R}\right)^3\underset{\text{ordre1}}{=}R^3\left(1+3\frac{r_1}{R}\right)$ et il vient $\boxed{r_1(t)=\frac{r_0(t)^3}{3R^2}}$

remarque : on pourrait aussi écrire $\frac{4}{3}\pi r_0^3$ = Volume grisé sur le schéma = $\underbrace{4\pi R^2}_{\substack{\text{surface de}\\ \text{la sphère}}}\cdot\underbrace{r_1}_{\substack{\text{petite}\\ \text{épaisseur}}}$

IB2- La symétrie sphérique des charges et des courants (les électrons sont en mouvement radial) impose : $\vec{E}(M,t)=E_r(r,t)\overrightarrow{u_r}$

En appliquant le théorème de Gauss a une sphère de rayon r, il vient :

$$4\pi r^2E_r(r,t)=\frac{Q_{int}(r,t)}{\varepsilon_0}=\frac{1}{\varepsilon_0}\underbrace{Q_{\substack{\text{ions contenus dans}\\ \text{la sphère de rayon } r_0(t)}}}_{n_e\frac{4}{3}\pi r_0^3(t)}$$ car entre r_0 et r $n_+=n_-$ pour tout M soit $\rho=0$

Conclusion : $\boxed{\vec{E}(M,t)=\frac{n_e e}{3\varepsilon_0}\frac{r_0(t)^3}{r^2}\overrightarrow{u_r}}$ et $\boxed{\vec{F}_{\substack{\text{sur un électron}\\ \text{en M à t}}}=-e\vec{E}(M,t)=-\frac{n_e e^2}{3\varepsilon_0}\frac{r_0(t)^3}{r^2}\overrightarrow{u_r}}$

Compte tenu du **IB1-**, ceci se réécrit : $\boxed{\vec{E}(M,t)=\frac{n_e e}{\varepsilon_0}\frac{R^2r_1(t)}{r^2}\overrightarrow{u_r}}$ et $\boxed{\vec{F}=-\frac{n_e e^2}{\varepsilon_0}\frac{R^2r_1(t)}{r^2}\overrightarrow{u_r}}$

IB3- Par incompressibilité, le volume d'électrons traversant toute sphère centrée en O est le même pour tout t (sauf pour r < r_0 évidemment parce qu'il n'y a pas d'électrons)

Or ce volume n'est autre que le flux du champ de vitesse des électrons (comme le courant électrique est la quantité de charge qui traverse une surface et également le flux de $\vec{j} = \rho\vec{v}$ à travers cette surface)

Donc $4\pi R^2 \times \underbrace{v(r = R, t)}_{\dot{r}_1(t)} = 4\pi r^2 \times v(r, t)$ pour tout r et à chaque instant

Ainsi pour tout r et tout t : $\boxed{v(r,t) = \dot{r}_1(t)\dfrac{R^2}{r^2}}$

IB4- Appliquons la deuxième loi de Newton à un électrons situé en M à t (dans le référentiel d'étude supposé galiléen) : $m\vec{a} = \vec{F}$

Le mouvement étant purement radial :

$$\overrightarrow{OM} = OM\overrightarrow{u_r} \qquad \vec{v} = \frac{dOM}{dt}\overrightarrow{u_r} \qquad \vec{a} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_r} = \frac{d^2OM}{dt^2}\overrightarrow{u_r}$$

En projection sur $\overrightarrow{u_r}$ on a donc $m\dfrac{dv}{dt} = m\dfrac{d}{dt}\underbrace{\left(\dot{r}_1(t)\dfrac{R^2}{r^2}\right)}_{\substack{v(r,t) \\ \text{qu'il faudra dérivéer} \\ \text{à r fixé}}} = -\dfrac{n_e e^2}{\varepsilon_0}\dfrac{R^2 r_1(t)}{r^2}$

On obtient donc $m\ddot{r}_1(t)\dfrac{R^2}{r^2} = -\dfrac{n_e e^2}{\varepsilon_0}\dfrac{R^2 r_1(t)}{r^2}$ soit $\ddot{r}_1(t) = -\dfrac{n_e e^2}{m\varepsilon_0}r_1(t)$

ou encore $\boxed{\ddot{r}_1(t) + \omega_p^2 r_1(t) = 0 \qquad \text{avec} \qquad \omega_p = \sqrt{\dfrac{n_e e^2}{m\varepsilon_0}}}$

Le comportement collectif est donc une oscillation à la pulsation ω_p.

Remarque : dans l'expression $v(r,t) = \dot{r}_1(t)\dfrac{R^2}{r^2}$ désigne la vitesse de la particule qui se trouve en r à l'instant t ; à un instant t + dt ultérieur, cette particule se trouvera donc à un distance différente r + dr ; dans l'expression du champ de vitesse r n'est donc pas comme en mécanique du point r(t) coordonnée qui « suit » le système étudié au cours du temps.

IB5- Dans l'étude du mouvement, on s'est intéressé à la vitesse moyenne des électrons, c'est-à-dire au **mouvement moyen** qui est radial. En réalité, à ce mouvement radial se superpose un **mouvement désordonné d'agitation thermique** qui conduit chaque électrons à subir des **collisions** avec les particules de son voisinage (et temporairement des recombinaison électron-ion). Ces collisions constituent un **processus dissipatif** qui pourrait être **modélisé par une force de frottement** dans l'étude du mouvement moyen (modèle de Drüde) et qui est responsable de **l'amortissement des oscillations.**

IB6- AN à 10 000 K : $\boxed{\omega_p = 3{,}1.10^{12}\ \text{rad.s}^{-1}}$ soit $\begin{cases} f_p = \dfrac{\omega_p}{2\pi} = 4{,}9.10^{11}\ \text{Hz} \\ T_p = \dfrac{1}{f_p} = 2{,}0.10^{-12}\ \text{s} \end{cases}$

La fin de la question est HORS PROGRAMME (la notion de section efficace a disparu du programme l'année qui a suivi ce sujet). Il arrive parfois que des questions soient hors programme et il faut savoir « passer » ces questions (c'est pourquoi je l'ai laissée …)