

Champ gravitationnel terrestre et gravimétrie. (Extrait de Centrale MP 2018)

I- Champ gravitationnel et champ de pesanteur terrestre

1 Le théorème de Gauss stipule que

$$\oiint_{\Sigma} \vec{\mathcal{G}} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{\text{int}}$$

avec M_{int} la masse contenue dans le volume défini par la surface Σ . On peut alors rassembler dans un tableau les analogies entre les forces électrique et gravitationnelle :

Électrostatique	Gravitation
$\vec{F}_{\text{elec}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 d^2} \vec{e}_r$	$\vec{F}_{\text{grav}} = -\frac{G m_1 m_2}{d^2} \vec{e}_r$
q	m
$\frac{1}{4\pi \epsilon_0}$	$-G$

2 Tout plan passant par M contenant le vecteur \vec{e}_r est plan de symétrie de la distribution de masse. D'où

$$\vec{\mathcal{G}}_T = \mathcal{G}_T(M) \vec{e}_r$$

De plus, la distribution de masse est à symétrie sphérique donc

$$\mathcal{G}_T(M) = \mathcal{G}_T(r)$$

Appliquons ensuite le théorème de Gauss gravitationnel, avec Σ une sphère de rayon $r > R_T$ et de centre C. La masse intérieure à cette sphère vaut M_T . Or,

$$\oiint_{\Sigma} \vec{\mathcal{G}}_T \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 \mathcal{G}_T(r)$$

d'où

$$4\pi r^2 \mathcal{G}_T(r) = -4\pi G M_T$$

donc

$$\mathcal{G}_T(r) = -\frac{G M_T}{r^2}$$

Avec $r = R_T + z$,

$$\vec{\mathcal{G}}_T = -\frac{G M_T}{(R_T + z)^2} \vec{e}_r$$

3 D'après la question précédente, la norme du champ gravitationnel s'écrit

$$\mathcal{G}_T(z) = \frac{GM_T}{R_T^2} \frac{1}{(1 + z/R_T)^2}$$

Ici, $z \ll R_T$. Avec le développement limité $(1 + x)^\alpha \simeq 1 + \alpha x$, il vient

$$\mathcal{G}_T(z) \simeq \frac{GM_T}{R_T^2} \left(1 - \frac{2z}{R_T}\right)$$

4 L'altitude z cherchée vérifie la relation suivante

$$\mathcal{G}_T(z) = 0,99 \mathcal{G}_T(0)$$

On injecte la forme de $\mathcal{G}_T(z)$ trouvée à la question précédente pour obtenir

$$\frac{GM_T}{R_T^2} \left(1 - \frac{2z}{R_T}\right) = 0,99 \frac{GM_T}{R_T^2}$$

d'où
$$0,01 = \frac{2z}{R_T}$$

Finalement

$$z = 0,005 \times R_T = 3,2 \cdot 10^4 \text{ m}$$

z est bien très inférieur à R_T , ce qui valide l'utilisation de la formule approchée. Attention : **pas plus de 2 chiffres significatifs** car ce calcul découle d'un DL1 en z/R_T !

5 Le gradient vertical du champ gravitationnel s'écrit, dans l'approximation $z \ll R_T$

$$\frac{d\mathcal{G}_T}{dz} = -\frac{2GM_T}{R_T^3}$$

Il correspond à la variation de l'intensité de \mathcal{G}_T par unité de hauteur, c'est-à-dire à la déviation par unité d'altitude de la valeur de g_0 à la surface de la Terre.

6 Numériquement,

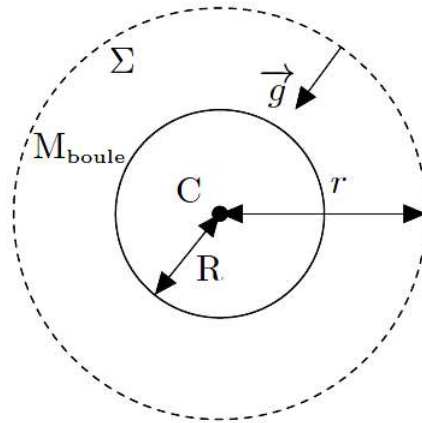
$$\left| \frac{d\mathcal{G}_T}{dz} \right| = 3,1 \mu\text{Gal.cm}^{-1}$$

Sachant que le champ gravitationnel au sol est de l'ordre de $9,8 \text{ m.s}^{-2} \approx 10^3 \text{ gal}$, une variation de 1% de ce champ (donc de 10 gal) nécessite une variation d'altitude de l'ordre de $3 \cdot 10^6 \text{ cm} = 3 \cdot 10^4 \text{ m} = 30 \text{ km}$. Ceci montre que le champ de gravité peut être considéré **uniforme à l'échelle de la troposphère** ($\approx 10 \text{ km}$) avec une très bonne approximation.

IV- Applications de la gravimétrie.

Rq : Dans cette partie, on nous parle de champ de pesanteur tout en nous faisant utiliser le théorème de Gauss gravitationnel i.e en nous faisant calculer le champ gravitationnel. Cela est justifié pour 2 raisons : 1) la partie I du problème a montré que la contribution à g du terme inertiel est faible ; 2) on s'intéresse ici à des études à latitude fixe où le terme inertiel est uniforme et où les seules variations spatiales de g sont dues à des variations de champ gravitationnel (corps sphérique enterré par exemple).

28 Par des arguments de symétries et d'invariances analogues à ceux développés dans la question 2, on peut écrire \vec{g} sous la forme $\vec{g} = g(r) \vec{e}_r$.



On applique ensuite le théorème de Gauss gravitationnel avec Σ une sphère de rayon $r > R$ et de centre C pour obtenir

$$4\pi r^2 g(r) = -4\pi G M_{\text{boule}}$$

c'est-à-dire
$$g(r) = -\frac{G M_{\text{boule}}}{r^2}$$

Or $M_{\text{boule}} = \mu' \frac{4}{3} \pi R^3$,
$$g(r) = -\frac{4 G \pi R^3 (\mu_m + \Delta\mu)}{3r^2}$$

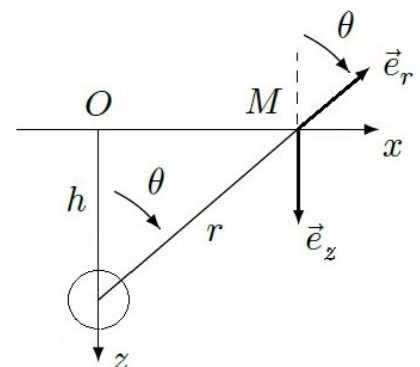
d'où
$$\vec{g} = -\frac{4 \pi G R^3 (\mu_m + \Delta\mu)}{3r^2} \vec{e}_r$$

29 $g_{B_z} = \vec{g} \cdot \vec{e}_z$ et $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_z = -\cos \theta$

d'où
$$g_{B_z} = -\frac{4 \pi G R^3 (\mu_m + \Delta\mu)}{3r^2} (-\cos \theta)$$

Avec $\cos \theta = h/r$ et $r = (x^2 + h^2)^{1/2}$, on a

$$g_{B_z} = \frac{4 \pi G R^3 (\mu_m + \Delta\mu)}{3(x^2 + h^2)^{3/2}} h$$

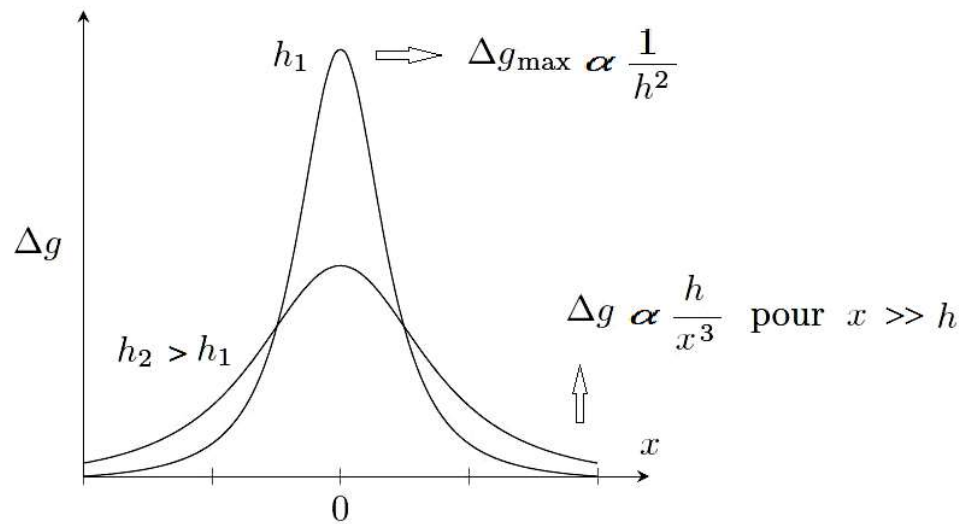


30 La distribution des masses qui crée le champ vertical g_z est la Terre, de masse volumique μ_m , évidée d'une sphère de rayon R que l'on a remplacée par un corps sphérique de masse volumique μ' . Or, cette distribution peut être vue comme la superposition d'une Terre non évidée, créant le champ g_0 usuel, et d'un corps sphérique de masse volumique $\mu' - \mu_m = \Delta\mu$ créant un champ vertical g'_z . Ainsi, par le **théorème de superposition**, on peut affirmer que g_z vaut $g_0 + g'_z$, donc que $\Delta g = g_z - g_0$ vaut à g'_z .

31 D'après la question précédente, l'anomalie gravimétrique est identique au champ de pesanteur g'_z créé par une sphère de masse volumique $\Delta\mu$. D'après la question 29,

$$\Delta g = \frac{4 \pi G R^3 \Delta\mu h}{3(x^2 + h^2)^{3/2}}$$

32 Le graphe pour 2 hauteurs h_1 et $h_2 > h_1$ est le suivant.



Si on demandait de justifier cette allure, voici ce que j'écrirais (mais rien n'est demandé ici donc on se contente de tracer l'allure, en donnant éventuellement quelques infos directement sur le graphique comme je l'ai fait ci-dessus) :

- * La fonction est paire, maximale en $x = 0$ et nulle à l'infini.
- * Son maximum est en $1/h^2$ (cf. formule demandée question suivante) donc décroît si h augmente, ce qui est bien intuitif : lorsqu'on se positionne juste au-dessus de l'anomalie, son effet est d'autant plus fort qu'elle se situe proche de la surface.
- * Pour $|x| \gg h$, sa forme asymptotique est en $h/|x|^3$ et elle croît donc avec h , à x fixé ; ainsi, contrairement à ce qui se passe en $x = 0$, l'effet de l'anomalie à grande distance est d'autant plus faible que celle-ci est proche de la surface ; ceci est lié à un effet d'angle, l'anomalie mesurée étant selon la verticale uniquement (et c'est pourquoi les 2 courbes correspondant à h_1 et h_2 « se croisent »).

Rq : Cette allure peut être obtenue à l'aide de la calculatrice en remarquant que :

$$\Delta g = \Delta g_{\max} \times (1 + u^2)^{-3/2} \text{ avec } u = x/h \text{ et en traçant le graphe de : } u \mapsto (1 + u^2)^{-3/2}$$

33 Déterminons la relation entre largeur à mi-hauteur et h . Notons $x_{1/2}$ l'abscisse à mi-hauteur. On a

$$\frac{\Delta g_{\max}}{2} = \frac{2 \pi G R^3 \Delta \mu}{3 h^2} = \frac{4 \pi G R^3 h \Delta \mu}{3(h^2 + x_{1/2}^2)^{3/2}}$$

Alors
$$2h^3 = (h^2 + x_{1/2}^2)^{3/2}$$

Il en résulte que : $2^{2/3}h^2 = h^2 + x_{1/2}^2$ soit : $x_{1/2} = \pm h \sqrt{2^{2/3} - 1}$

donc une largeur à mi-hauteur :
$$\Delta x_{1/2} = 2h \sqrt{2^{2/3} - 1}$$

L'anomalie gravimétrique maximale vaut :
$$\Delta g_{\max} = \frac{4 \pi G R^3 \Delta \mu}{3h^2}$$

34 On lit sur la figure 8 que l'anomalie maximale vaut 0,28 mGal. La largeur à mi-hauteur vaut $\Delta x_{1/2} = 120$ m. On en déduit h avec la question précédente puis le rayon R par la deuxième relation de cette même question :

$$h = \frac{120}{2\sqrt{2^{2/3} - 1}} = 78 \text{ m} \quad \text{et} \quad R = \sqrt[3]{\frac{3 h^2 \Delta g_{\max}}{4 \pi G \Delta \mu}} = 39 \text{ m}$$

35 Pour rendre indétectable l'or dans la cavité, il faut faire en sorte que le $\Delta \mu$ de la cavité rende Δg indétectable. Pour ce faire, il faut **introduire de l'air en plus de l'or** dans la cavité pour diminuer sa masse volumique.

Pour rendre l'or totalement indétectable quel que soit le gravimètre utilisé, il faudrait une boule d'or de rayon R_{or} au centre d'une cavité sphérique de rayon R telle que :

$$M_{\text{or}} = \frac{4}{3} \pi R_{\text{or}}^3 \times \rho_{\text{or}} = \frac{4}{3} \pi R^3 \times \mu_{\text{m}}$$

Si on néglige la masse de l'air devant celle de l'or, cette condition assure que $\Delta \mu = 0$ donc $\Delta g = 0$. On peut en réalité stocker un peu plus d'or sans qu'il soit détecté, à condition que Δg reste inférieur à la sensibilité Δg_{seuil} des gravimètres actuels (= 1 μgal).

36 Avec la condition d'indétectabilité parfaite, une cavité de rayon $R = 1$ m et une masse volumique $\mu_{\text{m}} = 2000 \text{ kg.m}^{-3}$ ou 2400 kg.m^{-3} , prise égale à celle du calcaire ou du grès (cf. figure 9), il vient directement :

$$M_{\text{or}} = \frac{4}{3} \pi R^3 \times \mu_{\text{m}} = \begin{cases} 8,4.10^3 \text{ kg pour le calcaire} \\ 10,1.10^3 \text{ kg pour le grès} \end{cases}$$

Mais comme l'énoncé demande un résultat en fonction de h , il faut manifestement faire intervenir la sensibilité $\Delta g_{\text{seuil}} = 1 \mu\text{gal} = 10^{-8} \text{ m.s}^{-2}$ des gravimètres actuels et écrire :

$$\Delta g_{\text{max}} = \frac{4\pi G R^3 \Delta\mu}{3h^2} \leq \Delta g_{\text{seuil}} \quad \text{soit encore} \quad \Delta\mu \leq \frac{3h^2}{4\pi G R^3} \Delta g_{\text{seuil}}$$

Or la masse volumique de la cavité vérifie

$$\mu' = \frac{M_{\text{air}} + M_{\text{or}}}{V_{\text{boule}}} \simeq \frac{M_{\text{or}}}{V_{\text{boule}}} = \frac{3 M_{\text{or}}}{4\pi R^3} \quad \text{donc} \quad \Delta\mu = \frac{3 M_{\text{or}}}{4\pi R^3} - \mu_m$$

Donc la masse d'or maximale vérifie

$$\frac{3 M_{\text{or,max}}}{4\pi R^3} - \mu_m = \frac{3h^2}{4\pi G R^3} \Delta g_{\text{seuil}}$$

soit

$$M_{\text{or,max}} = \frac{\mu_m 4\pi R^3}{3} + \frac{h^2}{G} \Delta g_{\text{seuil}}$$

Le terme supplémentaire « gagné » grâce à la sensibilité limitée des gravimètres est donc indépendant de la masse volumique du sol et vaut :

$$\frac{h^2}{G} \Delta g_{\text{seuil}} = 2,4 \cdot 10^3 \text{ kg} \quad (\text{non négligeable !})$$

soit finalement :

$$M_{\text{or,max}} = \begin{cases} 10,8 \cdot 10^3 \text{ kg} & \text{pour le calcaire} \\ 12,5 \cdot 10^3 \text{ kg} & \text{pour le grès} \end{cases}$$

Rq : La masse volumique de l'or fournie dans l'énoncé n'est visiblement pas utile (elle le serait si on ne négligeait pas la masse d'air mais avec un rapport de masses volumiques de $2 \cdot 10^4$ prendre en compte la masse d'air n'apporte aucune correction significative !). Elle permettrait de calculer le rayon de la boule d'or introduite dans la cavité :

$$R_{\text{or}} = \sqrt[3]{\frac{3M_{\text{or}}}{4\pi \rho_{\text{or}}}} = 54 \text{ cm} \quad \text{si on prend } M_{\text{or}} = 12,5 \cdot 10^3 \text{ kg}$$

Rq' : Comme les valeurs de μ_m pour le calcaire et le grès ne sont fournies que sur la figure 9 qui correspond à la question suivante, on peut penser à ce stade évaluer μ_m à partir des données numériques fournies au début de l'énoncé, en faisant le rapport de la masse de Terre sur son volume, ce qui donne $\mu_m = 5,5 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ et $M_{\text{or,max}} = 24 \cdot 10^3 \text{ kg}$. Cette valeur de μ_m est ≈ 2 fois plus élevée que les valeurs correspondant au calcaire ou au grès ; cela n'a rien d'étonnant car la Terre est loin d'être homogène et possède en particulier en son centre un noyau en fer et en nickel qui contribue lourdement (sic) à sa masse totale. Travailler ici avec le calcaire ou le grès semble donc plus raisonnable.

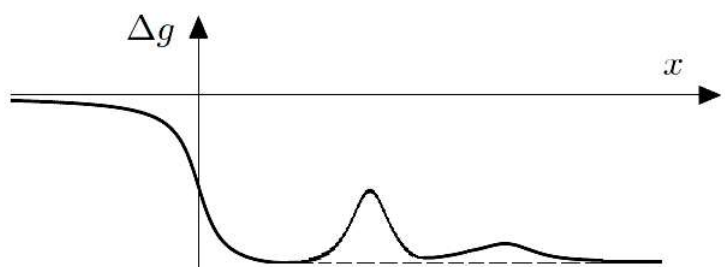
37 Rq préliminaire : à de nombreux égards, la question est ambiguë car le lien entre les figures 9 et 10 est peu clair et la notion de milieu semi-infini n'est pas visible sur les figures. Il faut néanmoins tenter de répondre à la question et je vais donc essayer de la « cadrer » en faisant des hypothèses sur la situation étudiée. De cette façon, ma réponse apparaîtra cohérente et j'aurai davantage de chances d'obtenir les points de la question malgré les ambiguïtés de l'énoncé...

Cherchons tout d'abord le lien entre la situation étudiée, schématisée sur la figure 9, et la situation « de référence », schématisée sur la figure 10 :

- * Puisque sur la figure 9 le grès occupe l'essentiel du sous-sol, alors que le calcaire est schématisé par une couche peu épaisse, il semble raisonnable de supposer que le milieu principal de masse volumique μ_1 dans la situation de référence correspond au grès dans la situation étudiée, tandis que le milieu provoquant l'anomalie et de masse volumique μ_2 dans la situation de référence correspond au calcaire dans la situation étudiée.
- * Dans la situation de référence, la plaque horizontale de masse volumique μ_2 est dite semi-infinie ; donc, bien que cela ne soit pas précisé, nous allons imaginer que la couche de calcaire l'est également (sinon la situation de référence n'est pas pertinente...), c'est-à-dire que pour $x < 0$ le milieu est entièrement constitué de grès.
- * Dans la situation de référence, la plaque horizontale de masse volumique μ_2 se trouve à une profondeur h sous le niveau du sol, tandis que dans la situation étudiée, la couche de calcaire se trouve directement en contact avec le sol ($h = 0$). Ceci n'est pas gênant car nous avons vu sur l'exemple de la boule enterrée que la profondeur de l'hétérogénéité ne modifie pas la forme générale de l'anomalie gravimétrique mais uniquement son amplitude ainsi que la distance typique sur laquelle elle est ressentie en surface ; donc, si on généralise les résultats vus pour la boule, on peut conjecturer que l'anomalie gravimétrique aura ici la même forme que celle de la figure 10, avec une amplitude assez forte et une distance de variation assez courte puisque la couche de calcaire est proche de la surface.
- * Enfin, la situation de référence présente l'anomalie gravimétrique dans le cas où $\mu_2 > \mu_1$ (cohérent avec $\Delta g > 0$) tandis que la situation étudiée on a μ_2 (calcaire) $< \mu_1$ (grès) : l'anomalie due à la couche de calcaire sera donc de signe opposé à celle de la figure 10, soit $\Delta g^{\text{calcaire}} < 0$.

Il faut maintenant sommer l'anomalie gravimétrique due au calcaire avec les 2 anomalies dues aux cavités sphériques, dont on ne sait pas si elles sont « vides » (remplies d'air), auquel cas $\Delta g^{\text{cavité}} < 0$, ou si elles sont remplies d'or, auquel cas $\Delta g^{\text{cavité}} > 0$; je choisis de tracer Δg en supposant les cavités remplies d'or. En outre, comme nous l'avons vu à la question 32, la cavité la plus profonde conduit à une anomalie moins ample et moins piquée que celle qui est proche de la surface (leurs rayons et leurs constitutions étant supposés identiques).

On obtient finalement l'allure ci-contre :



V- Prospection électrique des sols.

38 La résistance électrique d'un parallélépipède de section A , de longueur L et de résistivité ρ vaut

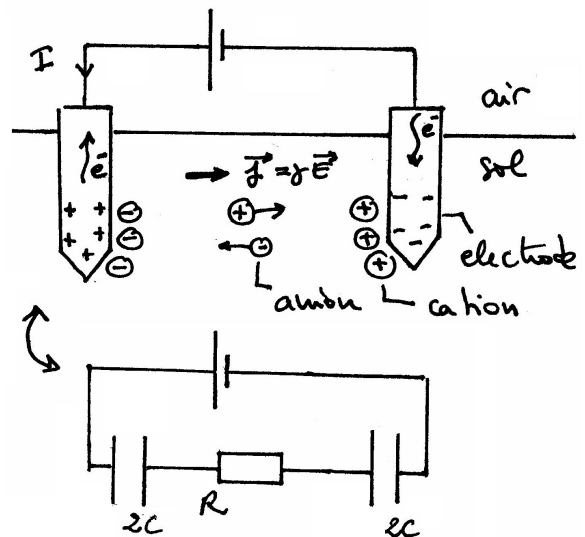
$$R = \frac{\rho L}{A}$$

Rq : Il s'agit d'un résultat de cours donc je ne pense pas que la démonstration soit attendue. Si l'énoncé demandait « d'établir » et non « d'exprimer », j'aurais démontré.

39 L'utilisation d'un courant alternatif permet de limiter la **polarisation des électrodes** qui apparaît en régime continu et fausse la mesure de résistivité du sol. On retrouve la même problématique dans les cellules conductimétriques utilisées en chimie. Le fait de se limiter à des basses fréquences permet d'éviter un autre phénomène parasite qui apparaît dans les conducteurs ohmiques en régime variable : **l'effet de peau**.

Rq : Je fais volontairement une réponse succincte qui est celle que je ferais en épreuve de concours. Voici pour info une explication plus détaillée :

Dans le circuit extérieur et dans les électrodes, les porteurs de charge responsables de la conduction sont des électrons, mais ceux-ci ne peuvent pas s'extraire des électrodes et circuler dans le sol, où la conduction est assurée par des ions (comme dans un électrolyte). Ainsi, en régime continu, il se produit une accumulation de charges dans les électrodes et dans le sol au voisinage des électrodes (schéma ci-contre) qui fait apparaître des effets capacitifs et parasite la mesure de résistivité du sol.



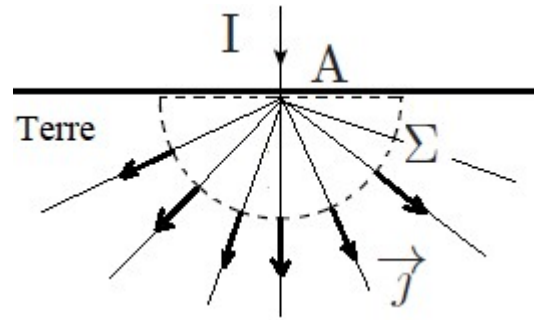
Electriquement, l'ensemble électrodes-sol se comporte alors comme l'association série de deux condensateurs et d'une résistance ohmique et, à courant fixe, la tension mesurée n'est pas constante égale à RI mais évolue comme lors d'une charge de condensateur. En RPS, le rapport des valeurs efficaces de la tension et du courant donne accès à l'impédance équivalente $Z = (R^2 + 1/C^2\omega^2)^{1/2}$ du dispositif ; en choisissant ω suffisamment élevé, on accède à R , ce qui revient à supprimer l'effet de polarisation.

Toutefois, il ne faut pas trop augmenter ω sous peine de voir la résistance R chuter artificiellement à cause de l'effet de peau qui limite le passage du courant électrique au voisinage de l'interface sol / air (le courant s'annule en profondeur dans le sol au-delà d'une distance $\delta = (2/\mu_0\gamma\omega)^{1/2}$). Cette chute de résistance à haute fréquence existe dans les résistors utilisés en TP mais est peu sensible aux fréquences usuelles.

40 Le sol est homogène et présente la symétrie de révolution autour de A ; on peut donc penser que les courants se répartissent de façon isotrope dans le sol et que le vecteur densité de courant s'écrit :

$$\vec{j}(P) = j_r(r)\vec{e}_r \quad \text{en coordonnées sphériques de centre } A.$$

En régime permanent et à basse fréquence dans l'ARQS, \vec{j} est à flux conservatif ; ainsi, le courant traversant algébriquement la surface fermée qui délimite la demie-boule de rayon r et de centre A, est nul. Comme le courant entrant dans la demie-boule par le disque supérieur est égal à I, le courant sortant à travers la demie-sphère Σ de rayon r doit également être égal à I. Ainsi :



$$\iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 2\pi r^2 j(r) = I \quad \text{d'où :} \quad \boxed{\vec{j} = \frac{I}{2\pi r^2} \vec{e}_r}$$

41 La loi d'Ohm locale s'écrit $\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E}$, donc

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho I}{2\pi r^2} \vec{e}_r}$$

Avec $\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$, $\vec{E} = -\text{grad } V = -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r$ d'où

$$\boxed{V_A(r) = \frac{\rho I}{2\pi r}}$$

La constante d'intégration est nulle car $V_A(\infty) = 0$.

42 Le théorème de superposition permet d'écrire

$$V(P) = V_A(P) + V_B(P)$$

Le potentiel $V_A(P)$ a été calculé à la question 41, et le potentiel dû à l'électrode placée en B est analogue mis à part que I et r_A deviennent $-I$ et r_B . On a donc

$$\boxed{V = \frac{\rho I}{2\pi r_A} - \frac{\rho I}{2\pi r_B} = \frac{\rho I}{2\pi} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)}$$

Les équipotentielles sont définies par $V = C^{\text{te}}$, donc par

$$\boxed{\frac{1}{r_A} = \frac{1}{r_B} + C^{\text{te}'}}$$

43 Calculons la différence de potentiel entre les points M et N :

$$\Delta V = V_M - V_N = \frac{\rho I}{2\pi} \left(\frac{1}{MA} - \frac{1}{MB} \right) - \frac{\rho I}{2\pi} \left(\frac{1}{NA} - \frac{1}{NB} \right)$$

$$\boxed{\Delta V = \frac{\rho I}{2\pi} \left(\frac{1}{MA} - \frac{1}{MB} - \frac{1}{NA} + \frac{1}{NB} \right)}$$

Donc

$$\boxed{\rho = \frac{2\pi \Delta V}{If} \quad \text{avec} \quad f = \frac{1}{MA} - \frac{1}{MB} - \frac{1}{NA} + \frac{1}{NB}}$$

44 Dans cette situation,

$$\boxed{f = \frac{1}{\ell} - \frac{1}{2\ell} - \frac{1}{2\ell} + \frac{1}{\ell} = \frac{1}{\ell}}$$

45 Le facteur f est donné dans la configuration de Wenner par $f = \frac{3}{AB}$

Avec $AB = 10 \text{ m}$,

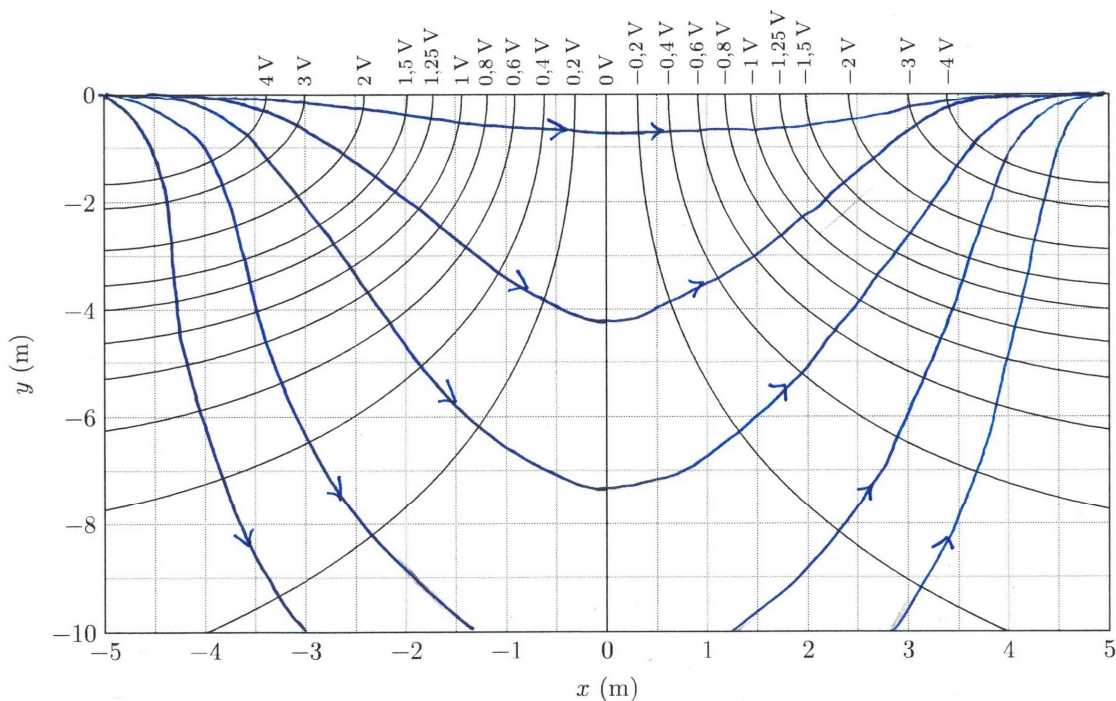
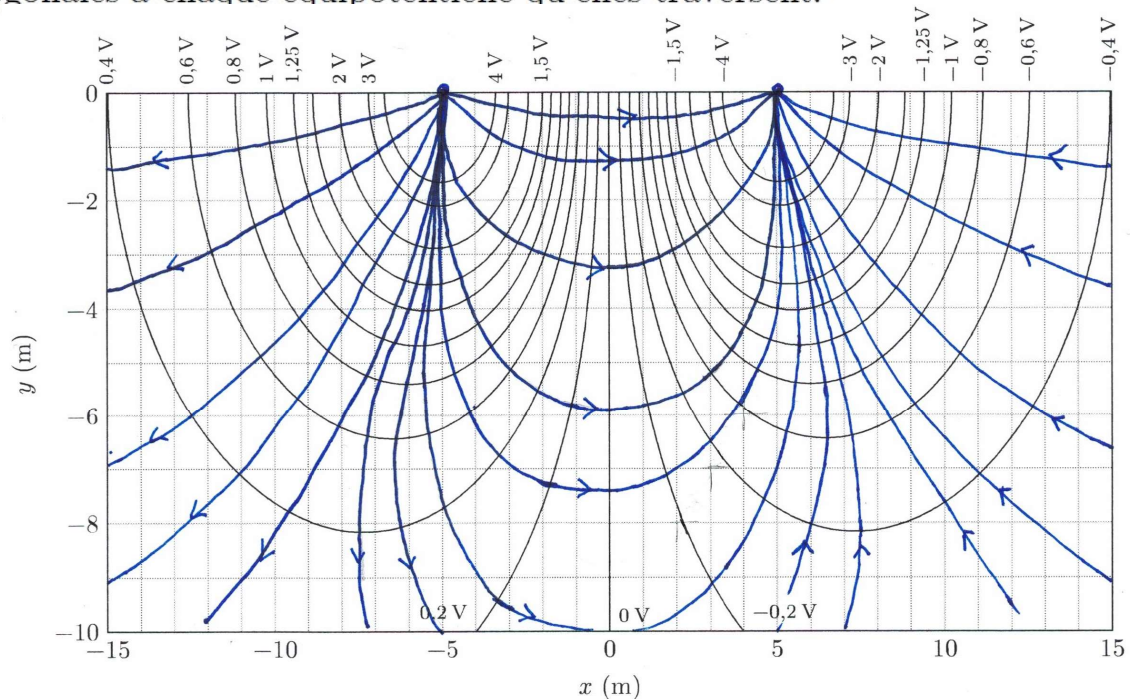
$$f = 0,3 \text{ m}^{-1}$$

Les bornes du voltmètre sont situées chacune à la distance ℓ d'une électrode donc aux abscisses $x = \pm 1,7 \text{ m}$. On lit sur les équipotentielles les potentiels en ces points : $V = \pm 1,25 \text{ V}$. Comparons les valeurs de ρ et $2\pi\Delta V/(If)$:

$$\frac{2\pi\Delta V}{If} = 1,0 \cdot 10^1 \Omega \cdot \text{m} \quad \text{et} \quad \rho = 100 \Omega \cdot \text{m}$$

Les deux valeurs sont cohérentes : $f = 0,3 \text{ m}^{-1}$ est en accord avec la simulation.

46 Les lignes de courant sont orthogonales aux équipotentielles, d'après la relation $\vec{j} = -(1/\rho) \text{grad } V$. Ainsi, pour tracer les lignes de courant, on trace des courbes orthogonales à chaque équipotentielle qu'elles traversent.



47 Dans le cas où $AB \ll h_1$, c'est-à-dire quand AB est faible, on peut considérer que la plupart du courant passe dans la première couche : **la résistivité apparente est a priori égale à ρ_1** . A contrario, dans le cas où $AB \gg h_1$, c'est-à-dire quand AB est grand, on peut considérer que la plupart du courant passe dans la deuxième couche : **la résistivité apparente est a priori égale à ρ_2** .

48 La courbe de la figure 18 présente deux asymptotes, une aux basses valeurs de AB dont on peut supposer qu'elle correspond au cas $AB \ll h_1$ et donc à $\rho = \rho_1$, l'autre aux valeurs de AB élevées dont on peut supposer qu'elle correspond au cas $AB \gg h_1$ et donc à $\rho = \rho_2$. On lit donc :

$$\boxed{\rho_1 \simeq 400 \Omega.m} \quad \& \quad \boxed{\rho_2 \simeq 40 \Omega.m}$$

Reste à déterminer h_1 . Pour cela :

- On commence par calculer ρ_2/ρ_1 qui vaut ici environ **0,1**.
- Cela nous permet de nous référer à la figure 19 et obtenir une valeur de ρ_a/ρ_1 en fonction de $AB/2h_1$; à noter que sur cette figure, la valeur de ρ_a/ρ_1 se lit en ordonnée et peut s'obtenir facilement en exploitant le fait que $\rho_a/\rho_1 \rightarrow \rho_2/\rho_1$ quand $AB/2h_1 \gg 1$ (cette façon de faire est bien pratique car l'échelle des ordonnées est logarithmique donc difficile à exploiter directement).

Un point facilement repérable est $\rho_a/\rho_1 = 0,5$ pour $AB/2h_1 \approx 2$ (voir page suivante).

- On cherche enfin sur le graphe de la figure 18 la valeur de $AB/2$ qui correspond à $\rho_a = 0,5\rho_1 = 200 \Omega.m$, à savoir $AB/2 \approx 7 \text{ m}$ d'où $AB \approx 14 \text{ m}$ (voir ci-dessous). On en déduit h_1 qui vaut $AB/4$:

$$\boxed{h_1 \approx 3,5 \text{ m}}$$

Rq : on peut vérifier avec un autre point : on repère sur la figure 19 $\rho_a/\rho_1 = 0,25$ pour $AB/2h_1 \approx 3$ (légèrement > 3) et $\rho_a = 0,25\rho_1 = 100 \Omega.m$ correspond à $AB/2 \approx 12 \text{ m}$ sur la figure 18, i.e. à $AB \approx 24 \text{ m}$; d'où $h_1 \approx AB/6 \approx 4 \text{ m}$, avec une évaluation par excès puisque $AB/2h_1$ est légèrement > 3 : c'est bien cohérent.

