Problème 3A : de la physique du vivant (extrait de CCINP 2021)

Partie I - Le gecko

I.1 - Interactions entre molécules polaires

Q1. La polarité des molécule vient essentiellement des différences d'électronégativités entre les atomes. Dans HCl, le chlore étant plus électronégatif, il déforme le nuage électronique en attirant les électrons vers lui. Il en résulte une charge négative sur Cl et une charge positive sur H, donc un moment dipolaire (orienté de Cl vers H).
Par définition du moment dipolaire, on a ici $\boxed{\vec{p}_1 = qa\vec{u_z}}$.

Q2. D'après le principe de superposition, le potentiel électrostatique total est la somme de celui créé par la charge en P et celui créé par celle en N. D'après la formule de COULOMB, on a :

$$V_1(M) = V_P(M) + V_N(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 PM} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 NM}$$

Or dans l'approximation dipolaire, $a \ll r$ donc on peut écrire, au premier ordre en $\frac{a}{r}$:

$$PM^2 = (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM})^2 = PO^2 + OM^2 + 2\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OM} = \frac{a^2}{4} + r^2 - 2r\frac{a}{2}\cos\theta \simeq r^2 - 2r\frac{a}{2}\cos\theta$$

Toujours au premier ordre, on en déduit : $PM = \sqrt{r^2 - 2r\frac{a}{2}\cos\theta} \simeq r\left(1 - \frac{a}{2r}\cos\theta\right)$
De même : $NM \simeq r\left(1 + \frac{a}{2r}\cos\theta\right)$. On a alors :

$$V_1(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r\left(1 - \frac{a}{2r}\cos\theta\right)} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r\left(1 + \frac{a}{2r}\cos\theta\right)} \simeq \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(1 + \frac{a}{2r}\cos\theta - 1 + \frac{a}{2r}\cos\theta\right)$$

$$\boxed{V_1(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\frac{a}{r}\cos\theta = \frac{p_1\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

Q3. D'après le cours, $\vec{E}_1(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}V_1(M)$, donc avec le formulaire de l'énoncé :

$$\vec{E}_1(M) = -\frac{\partial V_1}{\partial r}\vec{u_r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V_1}{\partial \theta}\vec{u_\theta}$$

On obtient donc : $\boxed{\vec{E}_1(M) = +\frac{p_1\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{u_r} + \frac{1}{r}\frac{p_1\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_\theta}}$ qui correspond au résultat attendu.

Q4. Deux possibilités de raisonnement :

- Avec le couple $\Gamma = -p_2E_1(M)\sin\alpha$ par rapport à l'axe de rotation. A l'équilibre, ce couple est nul, donc les positions d'équilibre sont en $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi$. Or si on perturbe le système d'un petit angle $\varepsilon > 0$ au voisinage de $\alpha = 0$, le couple est négatif et ramène donc le dipôle vers la position d'équilibre $\alpha = 0$ qui est donc stable. Par contre, au voisinage de $\alpha = \pi$, $\Gamma = -p_2E_1(M)\sin(\pi + \varepsilon) = +p_2E_1(M)\sin\varepsilon > 0$: le couple entraine le dipôle encore plus loin, cet équilibre est instable.
- Par l'énergie potentielle $\mathscr{E}_{12} = -\frac{p_1p_2}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\cos\alpha$. Si on trace $\mathscr{E}_{12}$ en fonction de α, on constate aisément que le minimum est en $\alpha = 0$ qui correspond donc à une position d'équilibre stable.

Dans tous les cas, le couple tend à aligner les 2 dipôles (position $\alpha = 0$).

Q5. Pour $\alpha = 0$, on a $\mathscr{E}_{12} = -\frac{p^2}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$.
Application numérique : $\mathscr{E}_{12} = -1{,}6.10^{-21}$ J et $k_BT = 4{,}0.10^{-21}$ J
L'énergie d'agitation thermique est suffisante pour que les dipôles soient mobiles et ne restent pas alignés en permanence.

Q6. *Application numérique :* $C_K \sim 10^{-77}$ J.m^6.
La force correspondante est $\boxed{\vec{F}_{12} = -\overrightarrow{\text{grad}}\langle\mathscr{E}_{12}\rangle = -\frac{6C_K}{r^7}\vec{u_r}}$. Cette force est orientée selon $-\vec{u_r}$ donc elle est attractive.

Q7. Une force surfacique est une pression, donc $A = 6\pi D^3.f(D)$ est une pression multipliée par un volume : c'est donc bien une énergie (cf $H = U + PV$ par exemple).

Q8. On applique le principe fondamental de la statique au gecko, soumis à son poids et à force d'adhérence. Cette dernière doit donc (en norme) compenser le poids. Si on note x le pourcentage de sétules utilisées, $N = 500 \times 6.10^6$ le nombre total de sétules et $S = \ell^2$ la surface de contact, on peut écrire :

$$mg = xN.\frac{A}{6\pi D^3}\ell^2 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{x = \frac{mg}{N\frac{A}{6\pi D^3}\ell^2}}}$$

Application numérique : $x = 8.10^{-4} = 0,08\%$
On obtient le bon ordre de grandeur, ce qui pourrait valider l'hypothèse. Mais il manque un facteur 2 : si le gecko n'utilise que 0,04% de ses sétules, notre calcul semble montrer qu'il ne supporterait pas son poids. Il y a donc sans doute un autre effet (mais le calcul est assez approximatif). Qu'est-ce qui était attendu dans cette fin de question ?...

Q9. Le mouvement se décompose en 2 phases :

— La première phase est une chute libre sur une hauteur $h = 10$ cm. En négligeant les frottements de l'air, on peut exploiter la conservation de l'énergie mécanique entre le moment du lâcher (sans vitesse initiale) et le moment où le gecko se rattrape, ce qui donne la vitesse atteinte au début du freinage :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgz_f = 0 + mgz_i \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{v_0 = \sqrt{2gh}}}$$

— Durant la phase de freinage, on peut reprendre le même principe, mais l'énergie mécanique n'est plus conservée. Le travail de la force d'adhérence (de norme $F = 5$ N si le gecko n'utilise que la moitié de l'adhérence maximale) s'écrit $W = -Fd$ où d est la distance de "freinage". On a donc :

$$-\frac{1}{2}mv_0^2 - mgd = -Fd \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{d = \frac{mv_0^2}{2(F-mg)} = \frac{mgh}{F-mg}}}$$

Application numérique : $d \simeq 11$ cm.