DM 4 - Correction.

Mouvement à l'intérieur d'une station spatiale.

I. Etude de la force de gravitation dans la station.

1. Théorème du centre d'inertie appliqué à la station spatiale géocentrique R_0 considéré galiléen.

$$m_{station}\,\vec{a}(G/R_0) = -\mathcal{G}\,\frac{m_{station}\,M_T}{OG^3}\,\vec{OG}$$

$$-m_{station}\,\omega^2 D\,\vec{u_r} = -m_{station}\,g(G)\,\vec{u_r} \quad \text{où } \vec{u_r} = \frac{\vec{OG}}{OG}$$

Donc $\underline{\omega^2 D = g(G)}$

Rq ici je préfère parler de $\vec{u_r} = \frac{\vec{OG}}{OG}$ vecteur variable dans R_0 (plutôt que $\vec{i}$ ou $-\vec{i}$ vecteur fixe de la base cartésienne de R)

2. $$\vec{g}(P) = -\mathcal{G}\,\frac{M_T}{OP^3}\,\vec{OP}$$

avec $\omega^2 D = g(G) = \mathcal{G}\,\frac{M_T}{D^2}$

Donc $\mathcal{G} M_T = \omega^2 D^3$

Soit $$\underline{\vec{g}(P) = -\omega^2\,\frac{D^3}{OP^3}\,\vec{OP}}$$

3- $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GP} = x\vec{i} + (D+y)\vec{j} + z\vec{k}$

$$\vec{g}(P) = -\omega^2 \frac{D^3}{\left(x^2+(D+y)^2+z^2\right)^{3/2}}\left(x\vec{i} + (D+y)\vec{j} + z\vec{k}\right)$$

Donc $$g_x = -\frac{\omega^2 D^3}{\left(x^2+(D+y)^2+z^2\right)^{3/2}}\,x = -\omega^2 D\left(\frac{x}{D} + o\left(\frac{x}{D}\right)\right)$$

$$g_y = -\frac{\omega^2 D^3}{\left(x^2+(D+y)^2+z^2\right)^{3/2}}(D+y)$$

$$= -\omega^2 D\left(\left(1+\frac{y}{D}\right)^2 + \left(\frac{x}{D}\right)^2 + \left(\frac{z}{D}\right)^2\right)^{-3/2}\left(1+\frac{y}{D}\right)$$

$$= -\omega^2 D\left(1 - \frac{3}{2}2\frac{y}{D} + \frac{y}{D} + o\left(\frac{x}{D},\frac{y}{D},\frac{z}{D}\right)\right)$$

$$= -\omega^2 D\left(1 - 2\frac{y}{D} + o()\right)$$

$$g_z = -\frac{\omega^2 D^3}{\left(x^2+(D+y)^2+z^2\right)^{3/2}}\,z = -\omega^2 D\left(\frac{z}{D} + o()\right)$$

Ainsi $$\boxed{\vec{g}(P) = -\omega^2 D\left(\frac{x}{D}\vec{i} + \left(1-2\frac{y}{D}\right)\vec{j} + \frac{z}{D}\vec{k}\right)}$$

à l'ordre 1 en $\frac{x}{D}$, $\frac{y}{D}$ et $\frac{z}{D}$.

II - Équation du mouvement.

Système étudié : P de masse m

Référentiel d'étude : référentiel lié à la station en rotation uniforme autour de l'axe fixe $(O\vec{k})$ dans R_0 donc non galiléen.

Bilan des "forces" :

* Attraction gravitationnelle $\vec{F} = m\vec{g}(P)$
* Force d'inertie d'entraîne :

$$\vec{F_{ie}} = -m\,\vec{a_e} = +m\omega^2\,\vec{HM}$$
$$= m\omega^2\left(x\vec{i} + (-D+y)\vec{j}\right)$$

* Force d'inertie de Coriolis.

$$\vec{F_{ic}} = -2m\omega\,\vec{k}\wedge\left(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}\right)$$
$$= -2m\omega\left(\dot{x}\vec{j} - \dot{y}\vec{i} + \vec{0}\right)$$

Principe fondamental de la dynamique

$$m\,\vec{a}(P/R) = \vec{F} + \vec{F_{ie}} + \vec{F_{ic}}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega^2 x + \omega^2 x + 2\omega\dot{y} \\ \ddot{y} = \omega^2(D+2y) + \omega^2(-D+y) - 2\omega\dot{x} \\ \ddot{z} = -\omega^2 z \end{cases}$$

Donc

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\omega\dot{y} \\ \ddot{y} &= 3\omega^2 y - 2\omega\dot{x} \\ \ddot{z} &= -\omega^2 z \end{aligned}}$$

Termes dynamiques

Termes statiques

III - Etude de l'équilibre dans la station.

1- L'impesanteur est une situation où $\vec{F_{ie}}$ compense l'attraction gravitationnelle.

Cela se produit en $\underline{y = z = 0}$

Seules les positions sur l'axe Gx permettent la situation d'impesanteur.

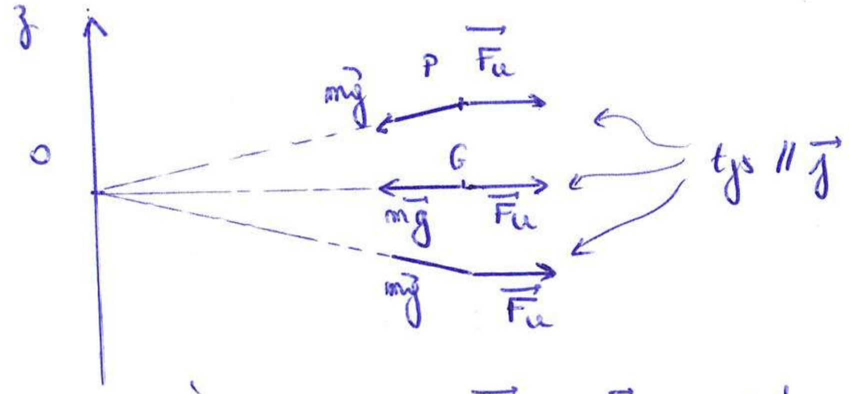
Sachant que cet axe est tangent à la trajectoire circulaire de G dans R_0 et que P reste proche de G, on en déduit que l'astronaute en impesanteur suit dans R_0 la même trajectoire circulaire uniforme que G.

2- Sortie du plan de l'orbite (Gxy) : mvt selon z

$\ddot{z} = -\omega^2 z$ l'astronaute subit un effet de rappel et retournera vers le plan $z = 0$.
(stabilité)

Ça s'interprète simplement en étudiant les directions de $m\vec{g}(P)$ et $\vec{F_{ie}}(P)$.

Vue dans le plan (Oyz)



Dès que $z \neq 0$ $\vec{F_{ie}} + m\vec{g}$ possède une composante dirigée vers $z=0$.

Mouvement radial. $y \neq 0$:

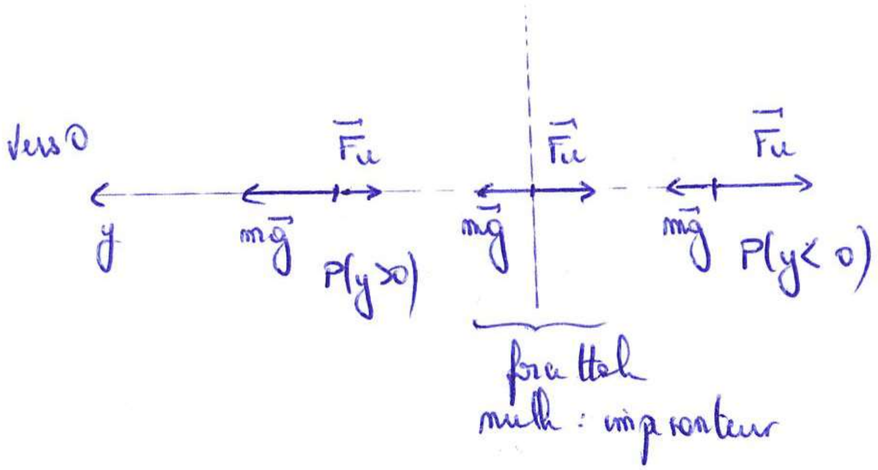
$$\ddot{y} = 3\omega^2 y \quad (\text{si } \dot{x} = 0)$$

L'astronaute subit une force de répulsion

Ceci s'interprète simplement en étudiant l'intensité de $\vec{g}(P)$ et $\vec{F_{ie}}(P)$: la distance au centre de la Terre est $r = OP = D - y$ (ds le cas simple où $P \in (Gy)$)
$\vec{g}$ évolue en $\frac{1}{r^2}$ et $\vec{F_{ie}}$ en r.

* Si $y = 0$, $P = G$ $r = D$ $g(P) = F_{ie}(P)$: impesanteur
* Si $y > 0$ $r < D$ $g(P) > F_{ie}(P)$: force résultante vers O
* Si $y < 0$ $r > D$ $g(P) < F_{ie}(P)$: force résultante centrifuge.

Vue dans le plan $z = 0$.



3- Une station spatiale ou un satellite naturel de trop grande taille risque de se disloquer sous l'effet de ces forces qui sont d'autant plus importantes que l'extension radiale (suivant Gy) est importante.

→ C'est ce genre de force que l'on appelle force de marée liée à un effet différentiel entre $\vec{g}$ et $\vec{F_{ie}}$, et qui disloquent les corps satellisés lorsqu'elles sont plus intenses que les forces de cohésions internes de ce corps.

→ Cet effet de marée est d'autant plus intense que ω est grand donc que le champ de gravitation de la planète est intense ($\omega^2 \propto g(G)$) et que le satellite est proche ($\omega^2 \propto 1/D$)

Ainsi les planètes géantes du système solaire ont un champ de gravitation suffisamment intense pour que les satellites, comètes ... passant trop près d'elles soient disloqués en d'innombrables débris qui restent satellisés et forment leurs anneaux.
L'aplatissement des anneaux est alors dû à l'effet de rappel évoqué au III 2 qui contient les débris dans un plan.

Rq : la distance critique D en dessous de laquelle le satellite est disloqué par les effets de marée de la planète s'appelle la LIMITE DE ROCHE