DEVOIR SURVEILLÉ n°3
Samedi 23 novembre 2024

*L'utilisation des calculatrices est **interdite** pour le problème 1 et **autorisée** pour le problème 2. Veillez à respecter cette consigne. Toute réponse non justifiée ne sera pas considérée.*

Problème 1 : Le béton (Mines MP 2016) **CALCULATRICE INTERDITE**
Consacrez une heure à ce problème.

Ce problème s'intéresse à l'étude de quelques propriétés physico-chimiques du ciment et des bétons armés. Le clinker est le principal constituant d'un ciment, il est obtenu à partir d'un mélange de 80% de calcaire ($CaCO_3(s)$) et de 20% d'argile (silicoaluminates). Le ciment est principalement utilisé pour fabriquer le béton qui est un mélange de ciment, sable, granulats et eau. Le béton forme après la « prise » une véritable roche artificielle. La « prise » est le phénomène de durcissement en présence d'eau.

Données pour ce problème

Constante d'Avogadro : $N_A = 6,0.10^{23}\ mol^{-1}$.

Constante des gaz parfaits : $R = 8,3\ J.K^{-1}.mol^{-1}$

Constante de Faraday : $F = 96500\ C.mol^{-1}$

Numéros atomiques : 6 (C) ; 8 (O) ; 20 (Ca).
Masses molaires : Ca : 40 $g.mol^{-1}$; Fe : 55 $g.mol^{-1}$; Si : 28 $g.mol^{-1}$; O : 16 $g.mol^{-1}$

Masse volumique du fer : $\rho = 8000\ kg.m^{-3}$.

Capacités thermiques molaires à pression constante Cp,m (en $J.K^{-1}.mol^{-1}$) :

composé	$Ca(OH)_{2(S)}$	$[Ca_3Si_2O_7,3\ H_2O\ ]_{(s)}$	$H_2O_{(liq)}$
C_{pm}	80	340	75

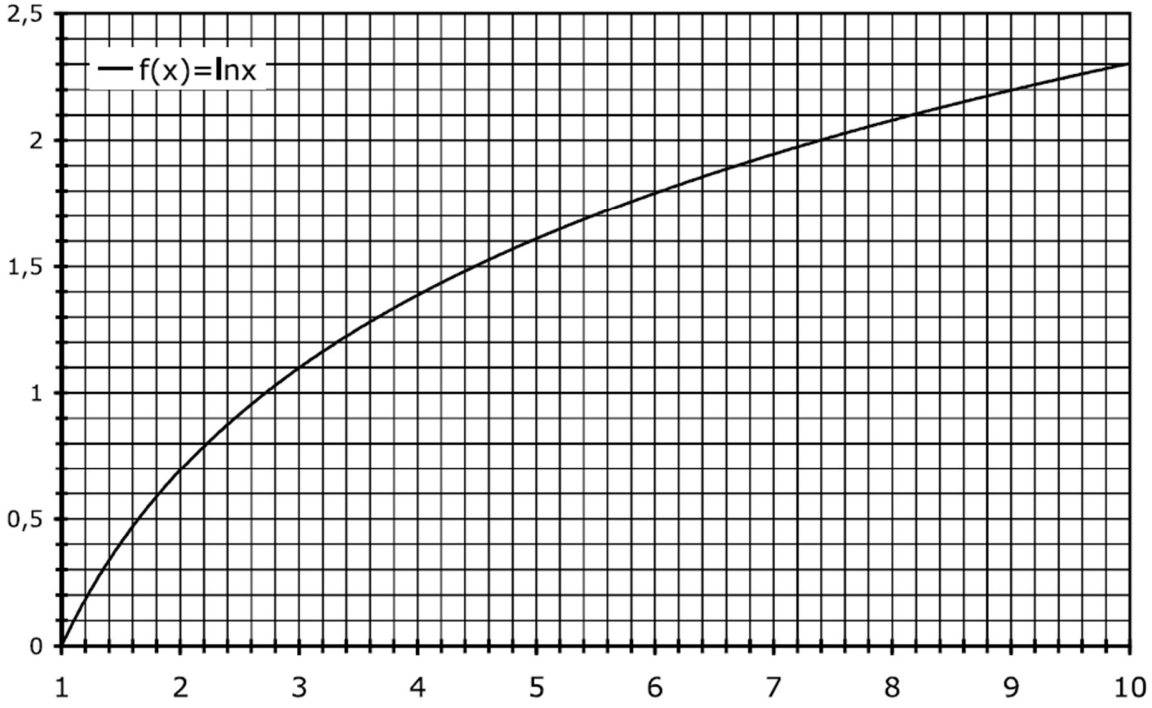
Conductivités ioniques molaires A0 (en $mS.m^2.mol\ '$)

Ion	$H^+_{(aq)}$	$Cl^-_{(aq)}$	$HO^-_{(aq)}$
$\Lambda°$	35,0	7,6	19,8

Constantes d'acidité : $pK_{a1}\left(CO_2, H_2O\ /\ HCO_3^-\right) = 6,4$; $pK_{a2}\left(HCO_3^-\ /\ CO_3^{2-}\right) = 10,4$

Produit de solubilité : $K_s\left(CaCO_3\right) = 3.10^{-9}$, $K_s\left(Ca(OH)_2\right) = 5.10^{-6}$

Approximations numériques : $\sqrt{2} \approx \frac{10}{7}$ $\sqrt{3} \approx \frac{7}{4}$ $\sqrt{10} \approx 3,2$



A- Prise d'un béton.

Le ciment est modélisé par la seule espèce $[Ca_3SiO_5]_{(s)}$. La réaction à l'origine de la « prise » est volontairement simplifiée sous la forme suivante.

$$2\left[Ca_3SiO_5\right]_{(s)} + 6\ H_2O_{(liq)} = \left[Ca_3Si_2O_7, 3H_2O\right]_{(s)} + 3\ Ca\left(OH\right)_{2\,(s)} \qquad (1.1)$$

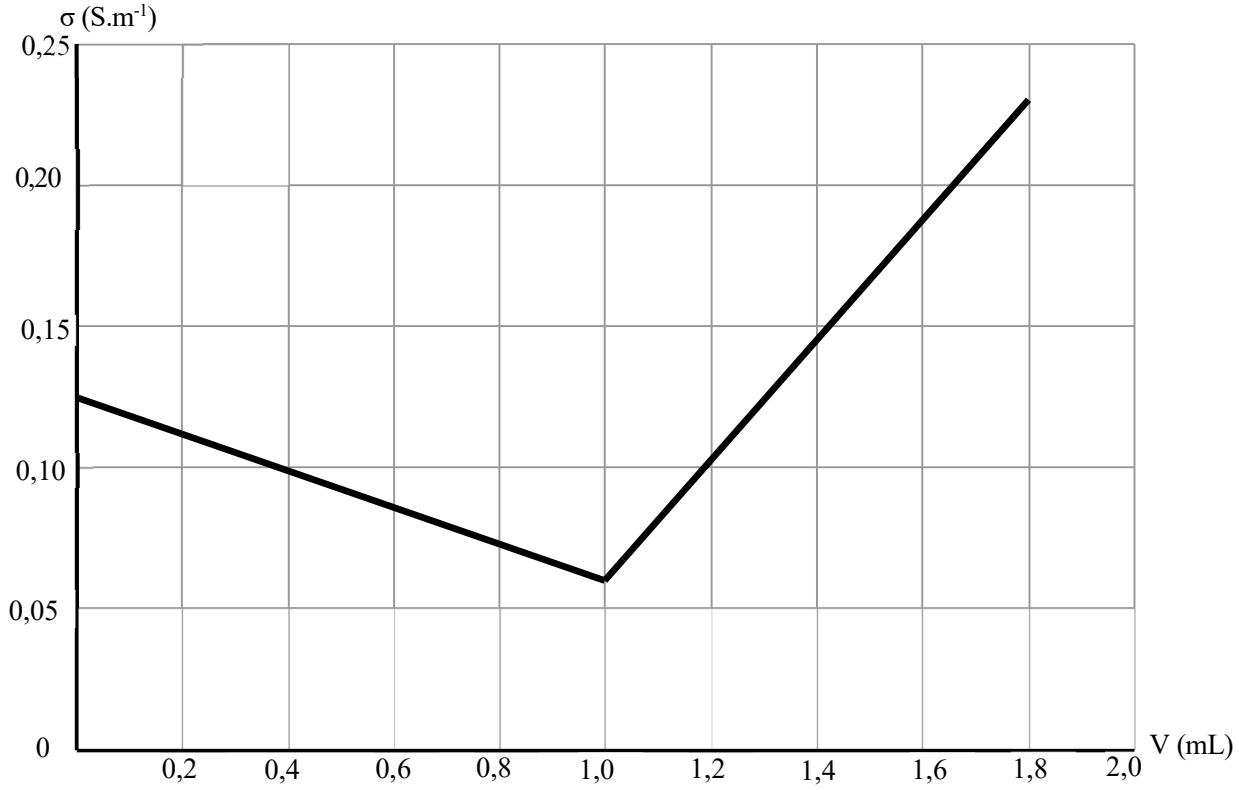
On mélange rapidement $m_1 = 228$ g de ciment et $m_2 = 90$ g d'eau liquide dans un calorimètre et on place un dispositif de mesure de la température. On mesure une élévation de la température : $\Delta\theta = 15,0°C$.

1- En supposant la réaction totale, indiquer quel est le réactif limitant et calculer les quantités de matière en chacune des espèces présentes en fin d'évolution.

2- Le système constitué par le calorimètre et son contenu sont supposés en évolution adiabatique. Proposer une justification à l'affirmation suivante : « une mole de $\left[Ca_3SiO_5\right]_{(s)}$ réagissant libère une énergie de 6,60 $kJ.mol^{-1}$. »

B- Basicité d'un béton.

L'hydroxyde de calcium $Ca(OH)_{2\,(s)}$ confère à l'eau qui se trouve dans les pores du béton (solution interstitielle) un caractère fortement basique. On étudie une solution aqueuse recueillie à la surface du béton après la prise, modélisée par une solution contenant des ions Ca^{2+} et OH^- (compte tenu de la solubilité de l'hydroxyde de calcium). Le volume prélevé est égal à $V_0 = 100,0$ mL *, il est titré par une solution d'acide chlorhydrique concentré (H_3O^+, Cl^-) de concentration* $c = 0,50$ mol.L^{-1}. *Le titrage est suivi par conductimétrie (mesure de la conductivité σ) de la solution titrée en fonction du volume v de titrant ajouté. Le résultat expérimental est présenté ci-après.*



3- Ecrire la réaction de titrage et indiquer la valeur de sa constante d'équilibre à 298 K.

4- Quel est le pH de la solution prélevée à la surface du béton ?

5- Justifier qualitativement (sans calcul) mais de façon détaillée l'allure de la courbe conductimétrique e = *f(v)* obtenue.

6- Calculer grâce aux données le rapport des pentes des deux droites et vérifier le résultat à l'aide du graphique.

7- Dessiner l'allure de la courbe qui aurait été obtenue à l'occasion d'un suivi pH- métrique, préciser la valeur du pH au point équivalent.

C- Carbonatation d'un béton.

Le dioxyde de carbone présent dans l'atmosphère peut se dissoudre en solution aqueuse. Dans le cas des solutions basiques il se dissout sous forme d'ions carbonate CO_3^{2-} Lorsque le phénomène se produit sur un béton, les ions carbonate issus du dioxyde de carbone peuvent remplacer les ions HO^- de l'hydroxyde de calcium (formation de $CaCO_{3(s)}$). On parle alors de carbonatation d'un béton, conduisant à une fragilisation de sa structure. On étudie dans cette partie le carbonate de calcium (de type calcite).

8- Pourquoi le calcium forme-t-il des ions Ca^{2+} de façon privilégiée ?

9- Etablir, en justifiant rapidement, le diagramme de prédominance des espèces en solution du carbone : $H_2CO_{3(aq)}$; $HCO^-_{3(aq)}$; $CO^{2-}_{3(aq)}$ .Justifier que dans le cas du béton, le dioxyde du carbone dissous en surface se trouve bien sous la forme de carbonate.

10a- A l'aide des données, déterminer la solubilité du carbonate de calcium $CaCO_3$ sans tenir compte des propriétés acido-basiques de $CO^{2-}_{3(aq)}$ (à cette question seulement)

10b- Quelle sera la solubilité de $CO^{2-}_{3(aq)}$ dans une eau à pH = 11,7. La solubilité du carbonate de calcium dépend-t-il du pH de la solution ?

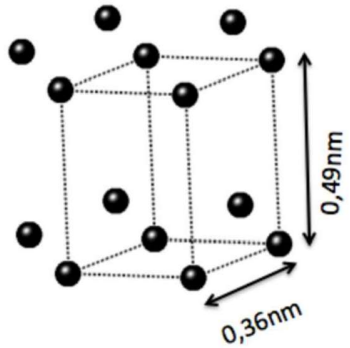
10c- Exprimer cette solubilité en fonction du pH

11- Donner un exemple d'utilisation en chimie de la faible solubilité du carbonate de calcium par rapport à son hydroxyde.

12- Donner un schéma de Lewis de l'ion carbonate.

13- La masse volumique de la calcite est de $2{,}7.10^3$ kg.m^{-3}. Calculer son volume molaire.

La structure cristallographique de l'hydroxyde de calcium (portlandite) peut être décrite comme un empilement de feuillets. Dans la figure suivante ne sont représentés que les atomes de calcium. Ils dessinent un maillage hexagonal dans chaque feuillet. La distance entre deux atomes de calcium voisins dans un feuillet est de 0,36 nm et la distance entre deux feuillets voisins de 0,49nm.



14- Calculer le volume molaire de la portlandite. Comment se traduit sa transformation en calcite en termes de changement de volume ?

Problème 2 : Nature de la gravitation (Mines MP 2015) **CALCULATRICE AUTORISEE**

Ce problème comprend 3 parties indépendantes
Ce problème étant trop long, certaines sous parties ne sont pas à traiter : elles sont simplement barrées (mais laissées pour que vous puissiez les regarder plus tard)

Un aspect fondamental de la gravitation est le principe d'équivalence. Introduit par GALILÉE au début du XVII^{e} siècle alors qu'il étudiait la chute des corps, il fut le point de départ du développement de la théorie de la gravitation. Un peu moins d'un siècle plus tard, NEWTON fut le premier à décrire l'interaction gravitationnelle par une formule. Il en déduisit la version la plus élémentaire du « principe d'équivalence faible » : la trajectoire d'un corps tombant en chute libre ne dépend ni de sa structure, ni de sa composition.
Si l'on sait aujourd'hui que la gravitation régit la dynamique des composantes de l'Univers (planètes, étoiles, galaxies, ...), l'observation récente de l'expansion de l'Univers a conduit à se poser des questions fondamentales sur les théories de la gravitation classique. L'introduction dans la théorie cosmologique de l'énergie noire, qui serait la contribution énergétique majoritaire de l'Univers, permet d'expliquer certaines observations mais sa nature et ses propriétés restent principalement théoriques. Certaines extensions de la théorie de la gravitation suggèrent même l'existence d'une répulsion gravitationnelle entre matière et antimatière, nommée antigravité.
La première partie propose une description de l'expérience d'EÖTVÖS ayant permis, dès la fin du XIX^{e} siècle, de valider une version réduite du principe d'équivalence avec une grande précision pour l'époque. La seconde partie remet en cause le principe d'équivalence et propose une retouche des lois de NEWTON sur la gravitation universelle. La dernière partie s'intéresse au projet GBAR proposant de peser l'antimatière.
Les parties I, II et III sont indépendantes entre elles. On notera i le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.
Les données numériques et un formulaire sont rassemblés en fin d'épreuve. Les vecteurs sont repérés par une flèche ($\vec{v}$) ou par un chapeau s'ils sont unitaires ($\|\widehat{u}_x\| = 1$).

I. — L'expérience d'EÖTVÖS

❑ **1** — Qu'appelle-t-on « principe d'inertie » en mécanique ? Énoncer le principe fondamental de la mécanique dans un référentiel galiléen. La grandeur caractéristique du mobile étudié dans cette expression porte, ici et dans la suite, le nom de *masse inerte* m_i.

❑ **2** — Expliciter la force de gravitation entre deux points matériels. On introduira le paramétrage nécessaire sur un schéma. La grandeur caractéristique du mobile intervenant dans cette expression porte le nom de *masse grave* ou *masse pesante*.

Quantifier les déviations possibles au principe d'équivalence faible suppose que l'on puisse considérer les masses inertielle m_i et grave (ou pesante) m comme pouvant être différentes. Les premières mesures précises des écarts relatifs entre masses inertielle et grave, ont été obtenues par comparaison des périodes de deux pendules simples de masse et de composition différentes ; cette méthode, d'abord décrite par GALILÉE, a été menée par NEWTON (1686) ou encore BESSEL (1826) et a conduit à des valeurs d'écarts relatifs compris entre 10^{-3} et 10^{-5}. L'invention du pendule de torsion par EÖTVÖS autour de 1888, permit d'augmenter fortement la sensibilité.

I.A. — Mesure du coefficient de torsion du pendule

L'expérience d'EÖTVÖS utilise un pendule de torsion. Dans le dispositif simplifié, représenté sur la figure 1, deux sphères appelées S_1 et S_2, homogènes de nature différente et de même masse pesante m ont leurs centres d'inertie placés aux extrémités d'une barre rigide, de masse M et de longueur $2L$, suspendue en son centre à un fil de quartz très fin, de constante de torsion C. On note m_{i_1}et m_{i_2} les masses inertielles respectives de S_1 et de S_2. La barre est libre de tourner autour de l'axe Oz en tordant plus ou moins le ruban de suspension. On suppose que la barre reste tout le temps de l'expérience dans le plan orthogonal à l'axe Oz.

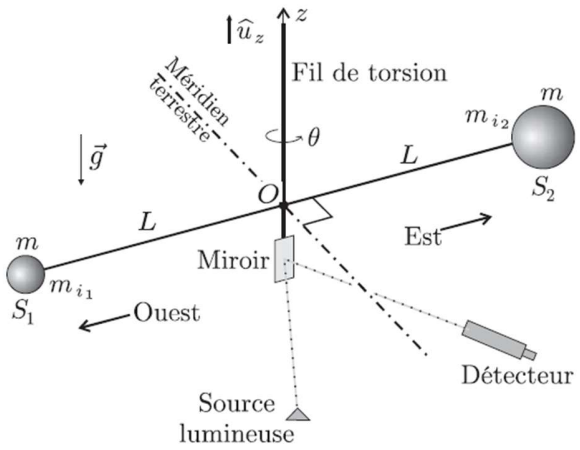


FIG. 1 – Dispositif d'EÖTVÖS

Le dispositif est placé de sorte qu'à l'équilibre, la barre soit normale au plan méridien à la latitude λ. Sa position est alors repérée par réflexion d'un faisceau lumineux sur un miroir plan, fixé au milieu de la barre, à l'aide d'une lunette.

On note $\mathscr{R}$ le référentiel du laboratoire centré sur O et *supposé galiléen dans cette sous-partie* où l'objectif est la détermination de la constante de torsion C du pendule.

On note J_0 le moment d'inertie de la barre par rapport à l'axe vertical (Oz) et J le moment d'inertie du système $S = \{\text{barre} + \text{sphères}\}$ par rapport à (Oz). On repère la position de la barre à l'instant t par l'angle de torsion $\theta(t)$. On fait tourner le système d'un angle θ_m puis on le lâche sans vitesse initiale. Le fil exerce alors sur la barre un couple de rappel dont le moment en O a pour intensité $\mathcal{M}_0 = -C(\theta(t) - \theta_0)$, l'angle θ_0 repère la position de la barre en l'absence de torsion.

❑ **3** — Montrer que ce couple dérive d'une énergie potentielle que l'on déterminera. En déduire l'énergie potentielle $E_{p,S}$ de S en fonction de C et $\theta - \theta_0$, on choisira $E_p(\theta_0) = 0$. Déterminer l'énergie cinétique $E_{c,S}$ du solide S. En déduire l'expression de l'énergie mécanique de S en fonction de C, J, θ, θ_0 et $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$.

❑ **4** — On fait l'hypothèse que la puissance totale des forces de frottement peut se mettre sous la forme $P_{frot} = -\alpha\dot{\theta}^2$ où α est une constante positive. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.

❑ **5** — On observe des oscillations très faiblement amorties. Quelle est la condition satisfaite par les constantes J, C et α ? Préciser la forme de la solution sans déterminer l'expression exacte des deux constantes d'intégration. Quelle est la valeur θ_∞ de $\theta(t)$ lorsque $t \to \infty$. Exprimer la pseudo-période T du mouvement en fonction de la période propre T_0 et de la constante $\varepsilon = \frac{\alpha}{2\sqrt{JC}} \ll 1$. A quelle condition sur ε, l'erreur relative introduite par l'approximation $T \simeq T_0$ est-elle inférieure à 1% ? Cette condition sera supposée vérifiée par la suite.

On note J_1 les moments d'inertie, considérés égaux, de chacune des deux sphères par rapport à l'axe vertical passant par leurs centres respectifs. On admettra que si le principe d'équivalence faible s'applique alors $J = J_0 + 2J_1 + 2mL^2$. On mesure la période T des oscillations pour différentes valeurs de la longueur L avec des sphères de masse pesante $m = 0,2\,\text{kg}$. Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous :

L [m]	$6,0 \cdot 10^{-2}$	$7,0 \cdot 10^{-2}$	$8,0 \cdot 10^{-2}$
T [s]	436	509	581

❑ **6** — En utilisant les résultats précédents, écrire la relation entre T^2, L^2, J_0, J_1, m et C. À partir des résultats de mesure donner une estimation de la valeur de la constante de torsion C. Compte-tenu des ordres de grandeurs des différents termes intervenant dans l'expression de T montrer que l'on peut écrire

$$m \approx \frac{C}{8\pi^2}\frac{T^2}{L^2}.$$

I.B. — Résultats et précision de l'expérience

Dans cette sous-partie le référentiel $\mathscr{R}$ du laboratoire centré sur O *n'est plus supposé galiléen* et l'on prend en compte les éventuels effets de la rotation de la terre sur les masses inertes m_{i_1} et m_{i_2} *a priori* différentes des deux sphères. On se place donc dans le référentiel $\mathscr{R}_t$ attaché au centre de gravité G de la terre supposé galiléen.

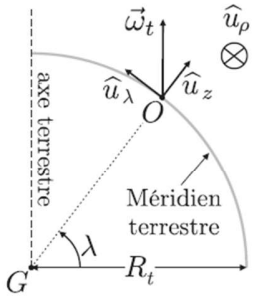


FIG. 2 – Vue en coupe

La terre est supposée en rotation uniforme à la vitesse $\vec{\omega}_t$ (de norme ω_t) autour de l'axe terrestre et le point O se trouve à la latitude λ. Une vue en coupe de la situation est représentée sur la figure 2.
L'ensemble constitué du pendule et du système optique est solidaire d'une plateforme. Lors d'une première mesure dans la configuration de la figure 1, on relève une valeur θ_{∞_1} pour l'équilibre du pendule. On fait alors tourner la plateforme d'un angle π afin d'inverser les positions des deux sphères, et l'on répète la mesure. On relève une valeur θ_{∞_2} pour l'équilibre du pendule dans cette nouvelle configuration.

❑ **7** — Déterminer les composantes des forces d'inertie d'entraînement subies par m_{i_1} et m_{i_2} dans la base $(\widehat{u}_z, \widehat{u}_\rho, \widehat{u}_\lambda)$ en fonction de λ, L, ω_t, R_t, m_{i_1} ou m_{i_2}.

❑ **8** — En exploitant le théorème du moment cinétique à l'équilibre, déterminer l'écart angulaire $\Delta\theta = \theta_{\infty_1} - \theta_{\infty_2}$ entre les deux expériences en fonction de λ, C, L, ω_t, R_t, m_{i_1} et m_{i_2}.
On pourra s'aider d'un schéma faisant apparaître les forces d'inertie s'appliquant sur les deux masses m_{i1} et m_{i2} dans une situation où la barre fait un angle θ avec $\hat{u}_\rho$. Les forces d'inertie de Coriolis modifient-elles les positions d'équilibre ? Les forces d'inerties ont-elles une influence sur les oscillations étudiées au A.

❑ **9** — La lunette utilisée pour la mesure permet de détecter une déviation du faisceau lumineux de l'ordre de $1,0\,\text{mm}$ à $2,0\,\text{m}$ de distance. En utilisant l'expression de m trouvée à la question 6, déterminer la précision de la méthode en estimant le rapport $\delta_m = \frac{|m_{i_1} - m_{i_2}|}{m}$. On donne $\lambda = 45°$ et $L = 6,0\,\text{cm}$.

❑ **10** — La déviation observée est nulle. Que déduire de ce résultat ?

FIN DE LA PARTIE I

II. — Corriger la gravitation universelle classique ?

Leurs observations ne concordant pas avec les modèles classiques de la physique, les astronomes ont deux solutions : soit ils rajoutent arbitrairement au cosmos un ingrédient, une matière invisible qui permet de justifier les anomalies détectées, soit ils modifient les lois.

Si dans leur très grande majorité, les physiciens ont, depuis 1930, privilégié la première voie, il apparaît aujourd'hui que l'imperceptibilité persistante de cette matière noire devient gênante.
Après avoir mis en évidence certaines des observations qui ont conduit plusieurs astronomes à s'interroger sur l'existence d'une matière noire invisible, nous aborderons quelques aspects de la théorie de la gravitation modifiée par M. MILGROM.

II.A. — Gravitation newtonienne, matière noire

Depuis plus de 50 ans les astrophysiciens comparent la quantité de matière visible dans les galaxies spirales, comme notre Voie Lactée, à celle qui est nécessaire pour expliquer la vitesse de rotation des étoiles dans ces mêmes galaxies.
Une galaxie est assimilable à une distribution spatiale $\mathscr{D}$ de matière de masse volumique ρ créant un champ gravitationnel supposé statique $\vec{\Gamma}$ qui satisfait aux équations locales suivantes :

$$\mathrm{div}\vec{\Gamma} = -4\pi G\rho \qquad \text{et} \qquad \vec{\mathrm{rot}}\vec{\Gamma} = \vec{0} \tag{1}$$

La force de gravitation exercée par cette galaxie sur un point matériel M de masse m s'exprime alors selon la relation $\vec{F} = m\vec{\Gamma}$.

❑ **11** — Citer deux équations analogues aux équations (1) en électrostatique. Peut-on, de la même façon, proposer une analogie avec la magnétostatique ? On définit le potentiel gravitationnel $\phi(M)$ au point M, analogue du potentiel $V(M)$ en électrostatique. Démontrer avec soin que le potentiel gravitationnel $\phi(M)$ satisfait à une équation de Poisson relative à la gravitation.

On considère un système $\mathscr{G}$ à répartition sphérique de masse centré sur un point O fixe : l'ensemble $(O, \mathscr{G})$ permet de définir un référentiel galiléen. En un point M de ce système, la densité volumique de masse $\rho = \rho(M)$ et le potentiel gravitationnel $\phi = \phi(M)$ ne sont des fonctions que de la seule variable $r = \|\vec{r}\| = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$. On suppose qu'un point M de masse m contenue dans $\mathscr{G}$ n'évolue que sous l'action du champ de gravitation créé par $\mathscr{G}$. Pour des raisons physiques évidentes la fonction $\rho(r)$ est décroissante et la fonction $\phi(r)$ croissante.

❑ **12** — Exprimer la force de gravitation $\vec{F}$ subie par M en fonction de m, $\frac{d\phi}{dr}$ et d'un vecteur unitaire que l'on précisera. Montrer que le mouvement de M s'effectue dans un plan. On considère les coordonnées polaires (r, θ) dans ce plan. Que représente la quantité $r^2\dot{\theta}$?

❑ **13** — On appelle vitesse circulaire $\vec{v}_c(r)$ dans $\mathscr{G}$, la vitesse qu'aurait le point M s'il était en orbite circulaire de rayon r dans $\mathscr{G}$. Exprimer $\vec{v}_c(r)$ en fonction de r, $\frac{d\phi}{dr}$ et $\widehat{u}_\theta$.

Du point de vue dynamique, on peut *a priori* considérer que notre galaxie, la voie lactée de masse visible M_g, est un système dont la masse est répartie de façon sphérique et constitué de trois composantes principales : un bulbe massif, un disque et un halo stellaire. Dans ce modèle, dit keplerien, le bulbe est assimilable à un point de masse $M_b \approx M_g$ et chaque étoile de masse m du disque évolue dans le potentiel gravitationnel $\phi(r) = -\frac{GM_b}{r}$ crée par le bulbe uniquement.

❑ **14** — Déterminer, dans ce modèle, l'expression de la vitesse circulaire dans la voie lactée en fonction de G, M_b, r et $\widehat{u}_\theta$. Pourquoi ce modèle est-il qualifié de keplerien ?

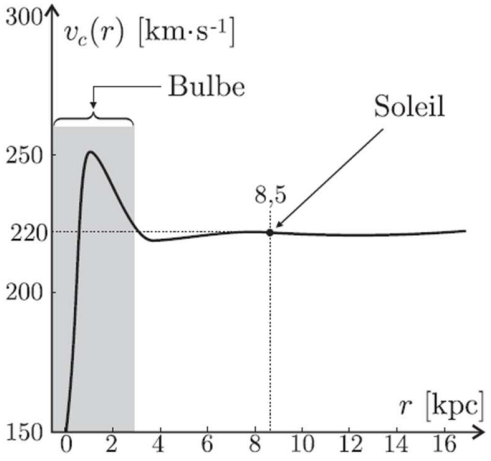


FIG. 3 – Vitesse circulaire dans la voie lactée

En réalité, la répartition des vitesses circulaires présente la même allure dans toutes les galaxies spirales comme la Voie Lactée. Les observations dans le cas de la Voie Lactée sont reportées sur la figure 3.

❏ **15** — Que peut-on dire de l'évolution de $v_c = \|\vec{v_c}\|$ en dehors du bulbe ? Le modèle keplerien est-il valable ?

En plus de la matière visible, on considère une répartition de masse invisible (noire) selon la densité volumique de masse suivante :

$$\rho(r) = \frac{C_0}{r_0^2 + r^2}$$

❏ **16** — En utilisant l'équation de Poisson relative à la gravitation (obtenue à la question 11) en symétrie sphérique, montrer que la prise en compte de cette matière noire permet de rendre compte de la courbe de vitesse observée. On fixera la valeur C_0 en unités de masse solaire ($M_\odot$) et de parsec (pc) pour une bonne adéquation avec la valeur de vitesse observée et on interprètera la constante r_0. On rappelle que

$$\int_0^r \frac{x^2}{r_0^2 + x^2} dx = r - r_0 \arctan\left(\frac{r}{r_0}\right).$$

❏ **17** — Estimer la masse minimale de ce halo de matière noire en considérant que ce dernier s'étend sur l'ensemble de la galaxie dont le rayon est de l'ordre de $R_d = 30\,\text{kpc}$. Commenter ce résultat sachant que la masse visible de notre galaxie est de l'ordre de $10^{10} M_\odot$.

II.B. — Gravitation modifiée

Face à la situation décrite dans la section II.A, M. MILGROM propose, en 1983, de modifier les lois de Newton de la gravitation afin d'expliquer pourquoi, en périphérie des galaxies, les étoiles tournent plus vite que la loi classique ne le laisse supposer. Dans cette théorie phénoménologique, baptisée MOND (acronyme anglais de dynamique newtonienne modifiée), la gravitation se mettrait à décroître beaucoup moins rapidement que prévu par la théorie newtonienne dans le régime des faibles accélérations en deçà d'un certain seuil que l'on se propose d'évaluer.
Dans cette théorie de la gravitation modifiée le potentiel de gravitation vérifie une équation de Poisson modifiée qui s'écrit

$$\text{div}\left(\mu\left(u\right) \vec{\text{grad}}\phi_m\right) = 4\pi G\rho \qquad (2)$$

où μ est un champ scalaire de la variable réduite sans dimension $u = \frac{1}{a_0^2}\left(\vec{\text{grad}}\phi_m\right)^2$ caractérisant la théorie et dont le comportement est le suivant

$$\mu(u) \simeq \begin{cases} \sqrt{u} & \text{si } u \ll 1 \\ K & \text{sinon} \end{cases}$$

❑ **18** — Quelle est la dimension du paramètre positif a_0 ? Quelle valeur doit-on donner à la constante K si l'on souhaite que la théorie MOND soit équivalente à la gravitation newtoniene si u n'est pas négligeable devant 1.

❑ **19** — En combinant l'expression (2) avec l'équation de Poisson de la question 11 relative à la gravitation non modifiée et au potentiel newtonien ϕ, montrer qu'il existe un vecteur $\vec{h}$ tel que $\mu(u)\,\vec{\text{grad}}\phi_m = \vec{\text{grad}}\phi + \vec{\text{rot}}\vec{h}$. On fera par la suite l'hypothèse que $\vec{\text{rot}}\vec{h}$ est toujours négligeable devant le gradient du potentiel newtonien ϕ.

Pour modéliser notre galaxie avec la théorie MOND il n'est plus nécessaire d'introduire de la matière noire, on prend donc simplement $\phi(r) = -\frac{GM_b}{r}$. Pour cette modélisation on suppose également que $\phi_m = \phi_m(r)$ et l'on admettra que la vitesse circulaire est toujours donnée par la relation obtenue à la question 13 généralisée à ϕ_m.

❑ **20** — Montrer que dans le régime $u \ll 1$, la vitesse circulaire prévue par la théorie MOND pour notre galaxie est donnée par la relation $v_c \simeq (GM_b a_0)^{1/n}$ où l'on déterminera l'entier n.

❑ **21** — Estimer la valeur numérique de a_0 afin que la théorie MOND permette de rendre compte de la vitesse circulaire observée dans notre galaxie. Commenter ce résultat en évaluant un ordre de grandeur de l'accélération subie par le Soleil dans la voie lactée (voir Fig. 3).

Même si MOND possède de nombreux avantages sur la gravitation de NEWTON à l'échelle galactique, la théorie relativiste associée, TEVES proposée en 2004 par J. BEKENSTEIN, pose de graves problèmes.

FIN DE LA PARTIE II

III. — Expérience GBAR – Peser l'antimatière ?

Plusieurs tentatives de tests directs du principe d'équivalence pour l'antimatière ont été menées sans succès. Des mesures de chute libre avec de l'antimatière chargée ont été envisagées, mais l'appareillage visant à réduire les effets parasites du champ électromagnétique par blindage n'a pu atteindre un niveau suffisant. La mesure de chute libre d'antimatière ne peut donc se faire qu'avec de l'antimatière neutre. Il est cependant très difficile de produire efficacement des antineutrons lents ou encore de mener des expériences de chute libre avec un positronium P_s (état lié neutre composé d'un électron e^- et de son antiparticule, le positon e^+). L'idée est donc venue d'utiliser l'atome d'antihydrogène $\overline{H}$, association d'un positon e^+ avec un antiproton $\bar{p}$.
L'expérience GBAR (acronyme de Gravitationnel Behaviour of Antihydrogen at Rest) a pour objectif la mesure de l'accélération (notée $\bar{g}$) d'un atome d'antihydrogène $\overline{H}$ en chute libre dans le champ gravitationnel de la Terre. Pour étudier sa chute avec un appareillage de taille raisonnable, l'antihydrogène $\overline{H}$ doit être produit à très basse vitesse. Cette expérience représente un vrai défi !
On produit tout d'abord des positons rapides à partir d'un faisceau pulsé d'électrons de plusieurs MeV dirigé sur une cible de Tungstène. Les positons sont ensuites ralentis et stockés dans un piège dit de PENNING-MALMBERG sous forme de plasma non neutre. Une fois la quantité stockée suffisante, les positons sont injectés dans un convertisseur pour y subir les transformations décrites par les équations ci-dessous :

$$\bar{p} + P_s \rightarrow \overline{H} + e^- \tag{3}$$

$$\overline{H} + P_s \rightarrow \overline{H}^+ + e^- \tag{4}$$

Les ions $\overline{H}^+$ sont composés d'un antiproton $\bar{p}$ et de deux positons e^+. Le fait qu'ils soient chargés permet de les stocker dans un piège de PAUL en vue de leur refroidissement jusqu'à une température de quelques dizaines de μK.

Une fois refroidis, ils sont injectés dans une enceinte à vide dans laquelle un laser peut assurer le photo-détachement du positon excédentaire, produisant ainsi des atomes d'antihydrogène. Ultra-froids, ces derniers tombent alors dans le champ de pesanteur terrestre sur une hauteur de l'ordre de quelques dizaines de centimètres.
Autour de cette enceinte, des TPC (chambres à projection temporelle) et des scintillateurs assurent une détection efficace des particules issues de l'annihilation de l'antihydrogène $\overline{H}$ à la fin de sa chute, quelle qu'en soit la direction. Si l'antimatière ne gravite pas exactement comme la matière (sens, durée de chute, etc.), l'expérience devrait pouvoir le détecter !
Nous nous proposons dans cette partie d'étudier de façon simplifiée les techniques de stockage des particules chargées, développées dans le projet GBAR et d'étudier la calibration de la mesure.

III.A. — Piéger une particule

L'objectif est de piéger une particule chargée en vue de la refroidir et la garder ainsi stockée le plus longtemps possible. L'idée la plus simple consiste à piéger cette particule dans un puits de potentiel. Le dispositif de piégeage est représenté sur la figure 4, il compte trois électrodes présentant une symétrie de révolution autour d'un axe (Oz). La première, notée $\mathcal{E}_0$, est en forme d'anneau de rayon interne r_0 et d'équation $x^2 + y^2 - 2z^2 = r_0^2$, elle est portée à un potentiel V_0 positif. Les deux autres, notées $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$, sont en forme de coupelles et correspondent aux deux nappes de l'hyperboloïde d'équation $x^2 + y^2 - 2z^2 = -2z_0^2$, elles sont reliées à la masse. La distance minimale entre les deux coupelles est telle que $2z_0 = \sqrt{2}r_0$.

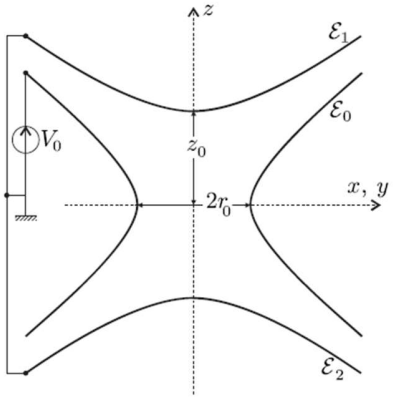


FIG. 4 – Vue en coupe du piège

On note $V(x, y, z)$ le potentiel régnant dans le piège initialement vide de charge. Ce potentiel est donc tel que $V(0, 0, z_0) = 0$ d'une part et d'autre part si $x^2 + y^2 = r_0^2$ alors $V(x, y, 0) = V_0$.
On admet qu'une particule de charge q placée dans le piège est soumise à une force conservative de la forme $\vec{F} = a\,(x\,\widehat{u}_x + y\,\widehat{u}_y) + bz\,\widehat{u}_z$ où a et b sont deux paramètres réels.

❑ **22** — En écrivant l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le potentiel $V(x, y, z)$ obtenir une relation entre a et b. Montrer que le potentiel s'écrit sous la forme $V(x, y, z) = \alpha + \beta(x^2 + y^2 - 2z^2)$, puis, exprimer α en fonction de V_0 et β en fonction de r_0 et V_0.

❑ **23** — Tracer les équipotentielles dans les plans xOz et xOy, en déduire les lignes de champ orientées dans ces mêmes plans.

❑ **24** — En écrivant le principe fondamental de la dynamique montrer que le point $O\,(0, 0, 0)$ est un équilibre. Montrer que cet équilibre est globalement instable quel que soit le signe de la charge placée dans ce potentiel.

III.B. — La trappe de PENNING

Afin d'éliminer l'instabilité démontrée à la question 24, une première solution est d'ajouter un champ magnétique uniforme $\vec{B}_0 = B_0\widehat{u}_z$ avec $B_0 = 1,0$ T autour du dispositif électrostatique. Le piège devient ainsi « une trappe de PENNING », le mérite de sa mise en œuvre concrète est du à H. G. DEHMELT qui reçut le prix NOBEL de physique en 1989 pour cette réalisation, l'idée originale, de F. M. PENNING, datant de 1936.

On considérera que la force électrique s'écrit $\vec{F} = -q\frac{V_0}{r_0^2}\left(x\,\hat{u}_x + y\,\hat{u}_y - 2z\,\hat{u}_z\right)$

❑ **25** — La particule piégée dans la trappe de PENNING est un antiproton $\bar{p}$ de masse m_p et de charge $q = -e$. Etablir les équations différentielles vérifiées par les fonctions $z(t)$ et $\zeta(t) = x(t) + iy(t)$. On introduira les constantes $\omega_c = \frac{eB_0}{m_p}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{eV_0}{m_p r_0^2}}$. Montrer qu'il existe un champ $B_{\min}$, tel que l'ajout d'un champ $B_0 \geq B_{\min}$ conduit au confinement de l'antiproton. Calculer la valeur de $B_{\min}$ pour un piège tel que $V_0 = 5,0\,\mathrm{V}$ et $r_0 = 5,7\,\mathrm{mm}$.

❑ **26** — Calculer la valeur numérique de ω_0 et ω_c pour la trappe de PENNING considérée. En déduire que le mouvement confiné de l'antiproton dans cette trappe est la composition d'un mouvement rapide et de deux mouvements plus lents. On donnera une estimation simple des pulsations de ces trois mouvements en fonction de ω_0 et ω_c.

FIN DE L'ÉPREUVE

Formulaire et données numériques relatives à l'ensemble de l'épreuve

- Constante de gravitation universelle :
$$G = 6,7.10^{-11}\,\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$$
- Constante de Boltzmann :
$$k_B = 1,4 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}$$
- Vitesse de la lumière : $c = 3,0 \cdot 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$
- Nombre d'Avogadro : $N_A = 6,0 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$
- Charge élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$
- Masse d'un proton : $m_p = 1,7 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
- Masse d'un électron : $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
- Perméabilité magnétique du vide :
$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H \cdot m^{-1}}$$
- Unités de distance :
$$1\,UA = 1,5 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}\ ;\ 1\,\mathrm{pc} = 3,1 \cdot 10^{16}\,\mathrm{m}$$
- Masse du Soleil : $M_\odot = 2,0 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$
- Masse de la Terre : $M_t = 6,0 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$
- Rayon de la Terre : $R_t = 6,4 \cdot 10^3\,\mathrm{km}$
- Opérateurs scalaires et vectoriels :
  - $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{grad}} f) = \vec{0}$
  - $\mathrm{div}(\vec{\mathrm{rot}}\vec{A}) = 0$
  - $\mathrm{div}(\vec{\mathrm{grad}} f) = \Delta f$
- Laplacien scalaire
  - en coordonnées cartésiennes :
$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$
  - en coordonnées sphériques :
$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$