Nature de la gravitation
(Mines MP 2015)

Correction.

I L'expérience d'Eötvös

1- Principe d'inertie :

Il existe une classe particulière de référentiels appelés référentiels galiléens dans lesquels un point matériel isolé est en mouvement rectiligne uniforme.

Principe fondamental de la dynamique :

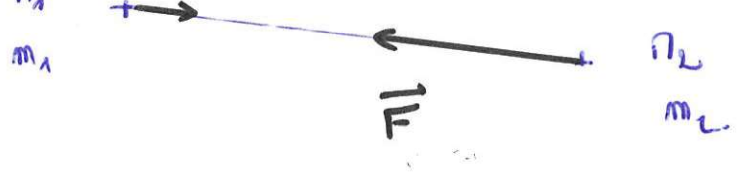
Dans un référentiel galiléen R, le mouvement d'un point matériel M de masse inerte m_i est régi par

$$m_i \cdot \vec{a}(M/R) = \vec{F}$$

où $\vec{F}$ est la résultante des forces appliquées à M.

2- Soit 2 points matériels M_1, M_2 de masse grave respectives m_1 et m_2.

$$\vec{F}_{1\to 2} = -G \frac{m_1 m_2}{M_1M_2^{\,3}} \overrightarrow{M_1M_2} = -G \frac{m_1 m_2}{M_1M_2^{\,2}} \vec{u}_{1\to 2}$$



IA - Mesure du coefficient de torsion du pendule.

3- La puissance associée au couple de torsion est $\mathcal{P} = \mathcal{M}_0 \frac{d\theta}{dt}$

Le travail élémentaire $\delta W = \mathcal{P}dt = \mathcal{M}_0 \, d\theta$

$$= -C(\theta-\theta_0)\,d\theta$$
$$= -d\left(\frac{1}{2}C(\theta-\theta_0)^2\right)$$

L'action mécanique du fil de torsion est donc conservative

$$\boxed{\mathcal{E}_{p,s} = \frac{1}{2}C(\theta-\theta_0)^2 + C}$$

On choisit cette cte nulle. $\mathcal{E}_p(\theta_0) = 0$.

Rq : le mouvement étant horizontal, le poids ne travaille pas

$$\boxed{\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C(\theta-\theta_0)^2}$$

4- Théorème de la puissance mécanique appliqué à l'ensemble {tige, masses} dans le référentiel terrestre considéré galiléen

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \mathcal{P}_{frot}.$$

$$J\dot{\theta}\ddot{\theta} + C(\theta-\theta_0)\dot{\theta} = -\alpha\dot{\theta}^2$$

Soit

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{J}\dot{\theta} + \frac{C}{J}(\theta-\theta_0) = 0}$$

En supposant que $\dot{\theta}$ ne s'annule qu'en des temps discrets.

5- Posons ω_0 et Q tels que $\omega_0^2 = \frac{C}{J}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{J}$

Soit $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J}}$ $\quad Q = \frac{J}{\alpha}\,\omega_0 = \frac{\sqrt{JC}}{\alpha} = \frac{1}{2\varepsilon}$.

On a $\ddot{\theta} + 2\,\varepsilon\,\omega_0\,\dot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = \omega_0^2\,\theta_0$

Eq. caractéristique $X^2 + 2\varepsilon\omega_0 X + \omega_0^2 = 0$

$$\Delta' = \varepsilon^2\omega_0^2 - \omega_0^2 = -\omega_0^2(1-\varepsilon^2) < 0$$

(Oscillation)

$$X_\pm = -\varepsilon\omega_0 \pm i\,\underbrace{\omega_0\sqrt{1-\varepsilon^2}}_{\omega_p \text{ pseudo pulsa}}$$

Ainsi $\underline{\theta(t) = \theta_0 + e^{-\varepsilon\omega_0 t}\left(A\cos\omega_p t + B\sin\omega_p t\right)}$

Donc
$$\left|\begin{array}{l} \theta_\infty = \theta_0 \\ T = \dfrac{2\pi}{\omega_p} = \dfrac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \dfrac{T_0}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = T_0\left(1-\dfrac{\varepsilon^2}{2}\right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \varepsilon \ll 1. \end{array}\right.$$

"Erreur" relative : $er = \frac{T - T_0}{T_0} = \frac{\varepsilon^2}{2}$.

$|er| < \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{\varepsilon^2}{2} < \frac{1}{100}$

$$\underline{\varepsilon < \frac{\sqrt{2}}{10} = 0{,}14}$$

6- $T^2 \simeq T_0^2 = 4\pi^2 \dfrac{J}{C} = 4\pi^2 \dfrac{J_0 + 2J_1 + 2mL^2}{C}$

Un ajustement affine de T^2 en fonction de L^2 donne.

$T^2 = a + bL^2$ avec $a = 715\ s^2$

$b = 5{,}26\ 10^7\ s^2\,m^{-2}$

et $b = \dfrac{8\pi^2 m}{C}$

Soit $C = \dfrac{8\pi^2 m}{b} = \dfrac{8\pi^2\ 0{,}2}{5{,}26\ 10^7} = 3{,}00\ 10^{-7}\ \mathrm{Nm\ rad^{-1}}$

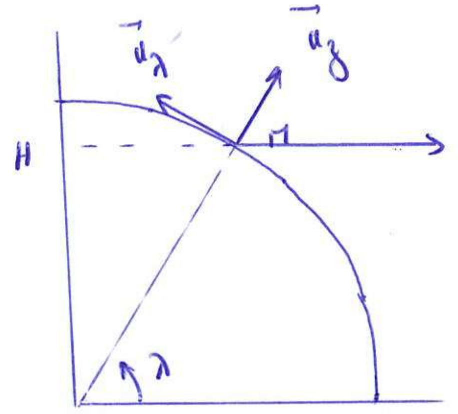
L'ordonnée à l'origine a est faible devant les valeurs de T^2 (de l'ordre de $10^5\ s^2$).

On peut donc supposer $T^2 \simeq bL^2 = \dfrac{8\pi^2 m L^2}{C}$.

Soit $m = \dfrac{C}{8\pi^2} \dfrac{T^2}{L^2}$

I B- Résultats et précision de l'expérience-

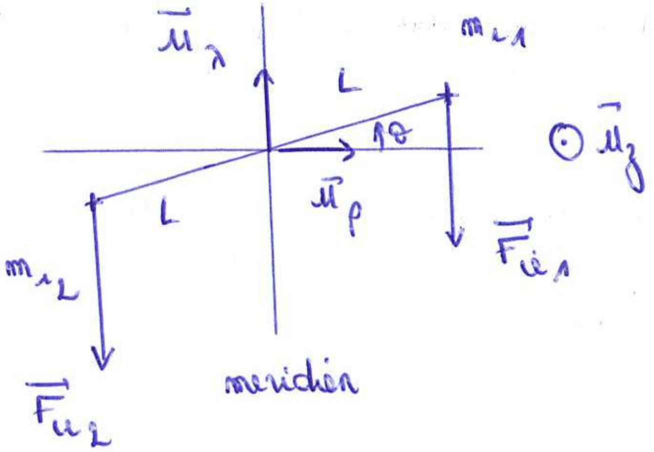
7



$\overrightarrow{F_{ie}} = m_i\,\omega_t^2\,\overrightarrow{HM}$

$= m_i\,\omega_t^2\,R_t\cos\lambda\left(\cos\lambda\,\overrightarrow{u_z} - \sin\lambda\,\overrightarrow{u_\lambda}\right)$

8 -



On n'a représenté ici que la composante horizontale de $\vec{F_{ie}}$ qui intervient dans $\mathcal{M}_{oz}$
$\vec{F_{ic}} \perp \vec{v}$ donc $\vec{F_{ic}} \cdot \vec{u_\theta} = 0$ et $\vec{F_{ic}}$ n'a aucune influence.

$$\mathcal{M}_{oz}(F_{ie1}) = - m_{i1}\,\omega_t^2 R_t \cos\lambda \sin\lambda \; L\cos\theta .$$
$$\mathcal{M}_{oz}(F_{ie2}) = + m_{i2}\,\omega_t^2 R_t \cos\lambda \sin\lambda \; L\cos\theta .$$

Expérience 1 : à l'équilibre on a :

$$-C(\theta_{\infty 1} - \theta_0) - m_{i1}\omega_t^2 R_t \cos\lambda \sin\lambda \, L \cos\theta_{\infty 1} + m_{i2}\omega_t^2 R_t \cos\lambda \sin\lambda \, L \cos\theta_{\infty 1} = 0$$

soit $$\theta_{\infty 1} = \theta_0 + \frac{\omega_t^2 R_t \cos\lambda \sin\lambda \, L}{C}\left(m_{i2}\cos\theta_{\infty 1} - m_{i1}\cos\theta_{\infty 1}\right)$$

Expérience 2 : la rotation de π revient à inverser les 2 masses.

$$\theta_{\infty 2} = \theta_0 + \frac{\omega_t R_t \cos\lambda \sin\lambda}{C} L \left(m_{i1}\cos\theta_{\infty 2} - m_{i2}\cos\theta_{\infty 2}\right)$$

On peut supposer les angles θ_∞ faibles (le texte indique $\theta = 0$ est l'orientation d'équilibre).

$$\boxed{\Delta\theta = \theta_{\infty 1} - \theta_{\infty 2} = 2\,\frac{\omega_t^2 R_t \cos\lambda \sin\lambda}{C} L \left(m_{i2} - m_{i1}\right)}$$

9 - $\delta\theta_{\substack{min \\ mesurable}} = \dfrac{1.10^{-3}}{2}$ 1,0 mm à 2 m de distance.

$= 5{,}0\ 10^{-4}$ rad.

$$\delta\theta_{min} = 2\ \frac{\omega_t^2 R_t \cos\lambda \sin\lambda}{C}\ L\ (m_{i2} - m_{i1})$$

avec $C = 8\pi^2 m \dfrac{L^2}{T^2}$.

$$= \frac{\omega_t^2 R_t \sin 2\lambda}{8\pi^2\ m\ L^2}\ T^2 L\ (m_{i2} - m_{i1}).$$

$$= \frac{1}{2 T_t^2}\ \frac{R_t}{L} \sin 2\lambda\ T^2\ \delta_m$$ $T_t = 1$ jour sidéral.

$$= \frac{\sin 2\lambda}{2}\ \frac{T^2}{T_t^2}\ \frac{R_t}{L}\ \delta_m.$$

$$\delta_m = \frac{2}{\sin 2\lambda}\ \frac{T_t^2}{T^2}\ \frac{L}{R_t}\ \delta\theta_{min}$$

$$= \frac{2}{\sin\frac{\pi}{2}}\ \frac{86\ 164^2}{436^2}\ \frac{6.10^{-2}}{6{,}4\ 10^6}\ .\ 5.10^{-4}$$

$$= 2\left(\frac{8{,}6}{4{,}4}\right)^2 \frac{6}{6{,}4}\ 5\ .\ \frac{10^8}{10^4}\ 10^{-12}$$

$$= 3{,}6\ 10^{-7}$$

10 - $\delta\theta < \delta\theta_{min}$ mesurable.

Donc $\dfrac{|m_{i1} - m_{i2}|}{m} < 3{,}6 . 10^{-7}$

L'écart entre les 2 masses inertielles est inférieur à un millionième.

II - Corriger la gravitation classique.

A - Gravitation newtonienne et matière noire

11 - Analogie

Gravitation	Electromagnétisme.
$\operatorname{div} \vec{\Gamma} = -4\pi G \rho$	$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (ρ densité volumique de charge)
$\vec{\operatorname{rot}}\, \vec{\Gamma} = 0$	$\vec{\operatorname{rot}}\, \vec{E} = \vec{0}$.

L'analogie ne peut se faire avec la magnétostatique

$\vec{\operatorname{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \neq \vec{0}$

$\longrightarrow$ $\vec{B}$ n'est pas à circulation conservative et ne dérive pas d'un potentiel scalaire

$\operatorname{div} \vec{B} = 0$ il n'y a pas de "charge" magnétique ou "monopôle" magnétique.

Potentiel scalaire ϕ tq $\vec{\Gamma} = -\vec{\operatorname{grad}}\, \phi$.

Donc $\operatorname{div} \vec{\Gamma} = -\operatorname{div} \vec{\operatorname{grad}}\, \phi = -\nabla \phi$

$= -4\pi G \rho$.

Equation de Poisson de la gravitation

$$\underline{\Delta \phi = 4\pi G \rho}.$$

12- $\vec{F} = m\vec{\Gamma} = -m\,\overrightarrow{grad}\,\phi = -m\dfrac{d\phi}{dr}\vec{u_r}$

$$\vec{u_r} = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$$

Cette force est centrale de centre O.

$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{0}$

D'après le théorème du moment cinétique appliqué au point M dans le référentiel galiléen d'étude

$$\frac{d\vec{L_O}}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{0}$$

Ainsi $\vec{L_O} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = \vec{cst}$

Donc à chaque instant $\overrightarrow{OM} \perp \vec{L_O}$ et M est à chaque instant dans le plan orthogonal à $\vec{L_O}$ passant par O.

Rq si $\vec{L_O} = \vec{0}$ On a $\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = \vec{0}$ pour tout t

Ainsi à chaque instant $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et le mvt est rectiligne.

En coordonnées polaire dans le plan du mvt.

$$\vec{L_O} = r\vec{u_r} \wedge m(\dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}) = mr^2\dot{\theta}\vec{u_z}$$

Donc $r^2\dot{\theta} = C = cst$.

Cette quantité est liée à la vitesse aréolaire (aire balayée par $\overrightarrow{OM}$ par unité de temps)

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{1}{2}C.$$

13. On applique le principe fondamental de la dynamique à M. (en mvt circulaire).

$$m\vec{a}(M/R) = \vec{F} \quad \text{avec} \quad \vec{OM} = r\vec{u_r}$$
$$\vec{v} = r\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$$
$$\vec{a} = r\ddot{\theta}\,\vec{u_\theta} - r\dot{\theta}^2\,\vec{u_r}$$

$$\begin{cases} m r\ddot{\theta} = 0 \\ -m r\dot{\theta}^2 = -m\dfrac{d\Phi}{dr} \end{cases}$$

Ces 2 equations sont cohérentes (ce qui indique qu'un mvt circulaire est possible).

$$\dot{\theta}^2 = +\frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dr}$$

$$v_c^2 = r\frac{d\Phi}{dr}.$$

$$\boxed{\vec{v_c} = \pm\sqrt{r\frac{d\Phi}{dr}}\,\vec{u_\theta}.}$$

14 $\quad \Phi = -\dfrac{GM_b}{r} \qquad \dfrac{d\Phi}{dr} = \dfrac{GM_b}{r^2} \qquad \boxed{v_c = \sqrt{\dfrac{GM_b}{r}}}$

Ce modèle est dit keplerien parce que l'on retrouve les mêmes vitesses (même forme) que pour les planètes du système solaire.

15 - En dehors du bulbe, on constate que v_c est quasiment constant ; ce qui est en contradiction avec le modèle keplérien qui prévoit une évolution en $\frac{1}{\sqrt{r}}$

16. On a toujours $v^2 = r\frac{d\phi}{dr}$

avec, d'après le principe de superposition

$$\phi = \underbrace{\phi_b}_{\text{lié au bulbe}} + \underbrace{\phi_m}_{\text{lié à la matière noire}}$$

$$\phi_b = -\frac{GM_b}{r}$$

$$\Delta\phi_m = 4\pi G \rho_{noir}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\phi_m}{dr}\right) = 4\pi G \frac{C_0}{r_0^2 + r^2}.$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\phi_m}{dr}\right) = 4\pi G C_0 \frac{r^2}{r_0^2 + r^2}$$

$$r^2 \frac{d\phi_m}{dr} = 4\pi G C_0 \left(r - r_0 \arctan\left(\frac{r}{r_0}\right)\right) + \cancel{cte}$$

$$r\frac{d\phi_m}{dr} = 4\pi G C_0 \left(1 - \underbrace{\frac{r_0}{r}\arctan\left(\frac{r}{r_0}\right)}_{\underset{r\to 0}{\longrightarrow 1 \text{ qd}}}\right)$$

Ainsi
$$v^2 = r\frac{d\phi_b}{dr} + r\frac{d\phi_m}{dr}$$
$$= \frac{GM_b}{r} + 4\pi G C_0 \left(1 - \frac{r_0}{r}\arctan\left(\frac{r}{r_0}\right)\right)$$

Pour $r \gg r_0$
$$v^2 = \frac{GM_b}{r} + 4\pi G C_0\left(1 - \frac{r_0}{r}\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\longrightarrow 4\pi G C_0.$$

r_0 peut être assimilé au rayon du bulbe ($r_0 \simeq 2$ kpc)

On peut évaluer C

$$v_\infty^2 = 4\pi G C_0$$

$$C_0 = \frac{v_\infty^2}{4\pi G} = \frac{(220 \cdot 10^3)^2}{4\pi\, 6{,}67\, 10^{-11}} = 5{,}79\, 10^{19}\ \mathrm{kg\, m^{-1}}$$
$$= 9\, 10^5\ M_\odot\, \mathrm{pc}^{-1}.$$

17 - $$m_{halo} = \int_{r=0}^{R_d} \rho(r) \cdot 4\pi r^2\, dr$$
$$= C_0 4\pi \int_{r=0}^{R_d} \frac{r^2}{r_0^2 + r^2}\, dr$$
$$= 4\pi C_0 \left(R_d - r_0 \arctan \frac{R_d}{r_0} \right)$$

$m_{halo} \simeq 4\pi C_0 R_d$ (on ne demande qu'une estimation)

$\simeq 3 \cdot 10^{11}\ M_\odot$

B - Gravitation modifiée.

18 - $\dim a_0 = \dim (\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \Phi) = \dim (\vec{\Gamma}) = L T^{-2}$.

Pour retrouver la théorie de la gravitation non modifiée lorsque u n'est pas négligeable devant 1, il faut prendre $K = 1$.

19- Dans le cadre Newtonien $\nabla \phi = 4\pi G \rho$.

Donc $\mathrm{div}\left(\mu(u)\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi_m\right) = \nabla\phi = \mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi\right)$

$$\mathrm{div}\left(\mu(u)\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi_m - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi\right) = 0 .$$

Le champ $\mu(u)\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi_m - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$ est donc à flux conservatif. Il existe donc un potentiel vectoriel $\vec{h}$ tel que

$$\underline{\mu(u)\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi_m - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{h}}$$

20- On a toujours $v_c^2 = r\dfrac{d\phi_m}{dr}$

Dans le cadre $u \ll 1$ on a $\mu(u) = \sqrt{u} = \dfrac{1}{a_0}\dfrac{d\phi_m}{dr}$

Ainsi $\mu(u)\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi_m = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$ (donné à la question précédente en négligeant $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{h}$)

$$\frac{1}{a_0}\frac{d\phi_m}{dr}\left(\frac{d\phi_m}{dr}\,\vec{u_r}\right) = \frac{d\phi}{dr}\,\vec{u_r}$$

$$\frac{1}{a_0}\left(\frac{d\phi_m}{dr}\right)^2 = \frac{d\phi}{dr} = \frac{GM_b}{r^2}$$

$$\frac{d\phi_m}{dr} = \frac{\sqrt{G a_0 M_b}}{r} .$$

et $v_c^2 = \sqrt{G a_0 M_b}$

ou $\underline{v_c = \left(G a_0 M_b\right)^{1/4}}$

21.
$$a_0 = \frac{v_c^4}{G M_b} \quad \text{avec } M_b \simeq 10^{10} M_\odot$$
$$\boxed{= \frac{(220\,10^3)^4}{6{,}67\,10^{-11} \times 10^{10} \times 2.10^{30}} = 1{,}8\,10^{-9}\,ms^{-2}.}$$

On peut évaluer l'accélération solaire
$$a_\odot = \frac{v_\odot^2}{R_\odot} = \frac{(220\,10^3)^2}{8{,}5 \times 3{,}1\,10^{16}} = 1{,}8\,10^{-10}\,ms^{-2}.$$

On a bien $a_\odot < a_0$: on se situe bien dans le régime des faible accélération soit $u \ll 1$.

Rq : $u = \frac{1}{a_0^2}\left(\frac{d\Phi_m}{dr}\right)^2 = \frac{1}{a_0^2}\left(\frac{v_c^2}{r}\right)^2 = \frac{a^2}{a_0^2}.$

u permet bien de comparer l'accélération de l'astre considéré à une accélération seuil a_0.

III - Expérience Gbar : peser l'antimatière.

A - Piéger une particule.

22 - On a d'une part $\vec{F} = q\vec{E} = -q\,\overrightarrow{\text{grad}}\,V = a\left(x\vec{u_x} + y\vec{u_y}\right) + bz\vec{u_z}$

et d'autre part dans le vide entre les plaques

$$\Delta V = 0 = \text{div}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\,V\right)$$

Ainsi $\text{div}\,\vec{F} = \dfrac{\partial F_x}{\partial x} + \dfrac{\partial F_y}{\partial y} + \dfrac{\partial F_z}{\partial z} = 0.$

soit $a + a + b = 0$.

$$\underline{b = -2a.}$$

On a donc
$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} = -\dfrac{a}{q}x. & (1) \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} = -\dfrac{a}{q}y & (2) \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} = -\dfrac{b}{q}z = +\dfrac{2a}{q}z. & (2) \end{cases}$$

Soit (1) $\longrightarrow$ $V = -\dfrac{a}{q}\dfrac{x^2}{2} + \underbrace{\text{terme indépendant de } x}_{f(y,z)}$

Dans (2) : $\dfrac{\partial V}{\partial y} = 0 + \dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{a}{q}y$

soit $f(y,z) = -\dfrac{a}{q}\dfrac{y^2}{2} + \underbrace{\text{terme indépendant de } y \text{ (et naturellement de } x)}_{g(z)}$

Ainsi $V(x,y,z) = -\frac{a}{q}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right) + g(z)$

Dans (3) cela donne $\frac{\partial V}{\partial z} = 0 + \frac{dg}{dz} = \frac{2a}{q} z$

Soit $g(z) = \frac{2a}{q}\frac{z^2}{2}$ + terme indépendant de z.
de cst : A.

On obtient $V(x,y,z) = \underbrace{-\frac{a}{2q}}_{\beta}\left(x^2+y^2-2z^2\right) + \underbrace{A}_{\alpha}$

qui est bien la forme demandée.

Les conditions aux limites imposent les valeurs de α et β.

$V(0,0,z_0) = \alpha - \beta 2 z_0^2 = \alpha - \beta r_0^2 = 0$.

$V(x,y,0) = \alpha + \beta(x^2+y^2) = \alpha + \beta r_0^2 = V_0$.
$(x^2+y^2=r_0^2)$

Donc $\boxed{\alpha = \frac{V_0}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{V_0}{2r_0^2}}$.

2.3 Plan $y=0$ xOz.

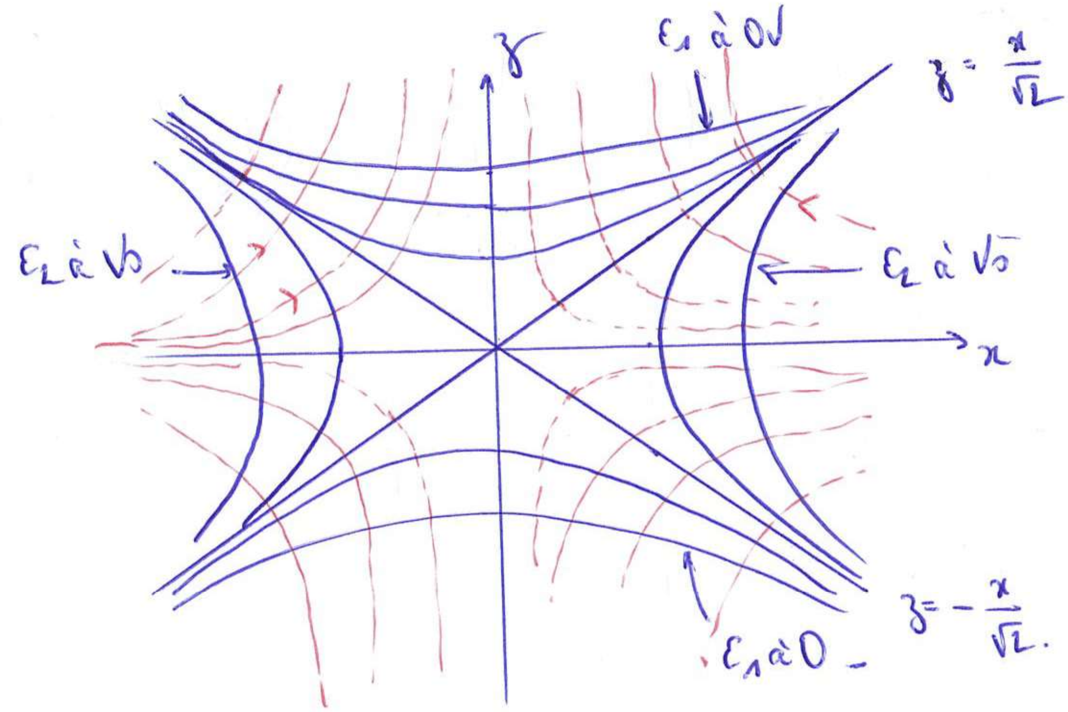
$V(x,0,z) = \frac{V_0}{2} + \frac{V_0}{2r_0^2}\left(x^2 - 2z^2\right) = cst$

On donc $x^2 - 2z^2 = cst$.

↳ $cst = 0$ $\quad z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} x$.

↳ $cst \neq 0$ $\quad z^2 = \frac{x^2 - cst}{2}$

$z = \sqrt{\frac{x^2 - cst}{2}}$



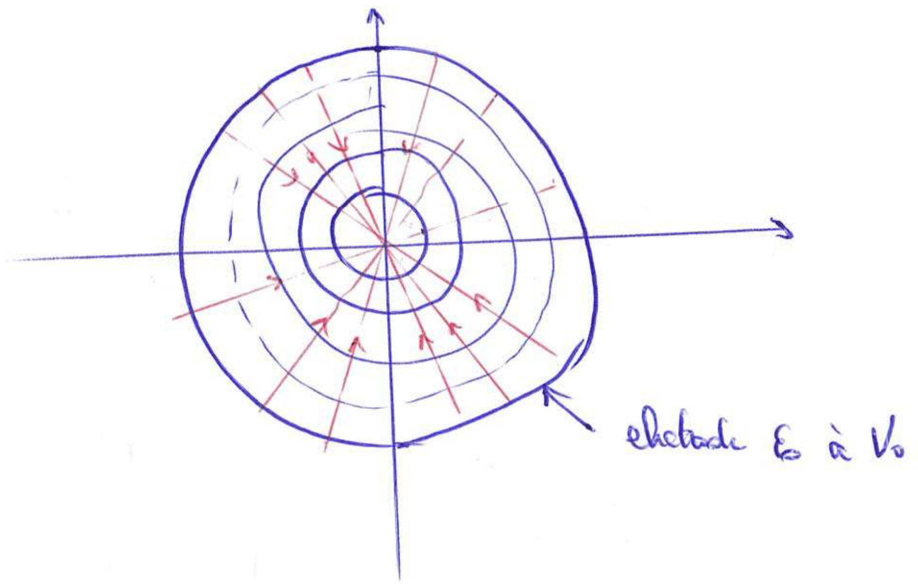
- - - lignes de champ

— equipotentielle

Plan xOy ou $z=0$.

$V(x,y,0) = \alpha + \beta(x^2+y^2)$ Les equipotentiels sont des cercles.

Les lignes de champ sont donc radiales.



24 - D'après l'expression de $\vec{F} = a(x\vec{u_x} + y\vec{u_y}) + bz\vec{u_z}$

$\vec{F}(0,0,0) = 0$ il s'agit bien d'une position d'équilibre.

Comme $b = -2a$, a et b sont de signe opposé

Situation 1 : $a > 0$ et $b < 0$

$F_x = +ax$

$F_y = +ay$.

éq instable dans le plan Oxy.

$F_z = -|b|z$

éq. stable dans la direction Oz.

Situation 2 : $a < 0$ et $b > 0$

éq stable dans le plan Oxy

éq instable le long de Oz.

Rq on a trouvé $\beta = \frac{V_0}{2r_0^2} = -\frac{a}{2q}$.

Soit $a = -q\frac{V_0}{r_0^2}$.

Si $q < 0$ on est dans la situation 1.
Stabilité dans le plan xOy.
Instabilité le long de Oz.

Si $q > 0$ on est dans la situation 2
Instabilité dans le plan xOy
Stabilité le long de Oz.

B- La trappe de Penning (ou piège de Penning).

25- Syst = antiproton de masse m_p et charge $-e$.

Référentiel : référentiel du laboratoire considéré galiléen.

Bilan des forces :

* le poids sera négligé
* force électrique $\vec{F} = +e \frac{V_0}{r_0^2}(x\vec{u_x} + y\vec{u_y} - 2z\vec{u_z})$
* force magnétique $\vec{F_m} = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$

$$= -e \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix}$$

$$= -eB_0 \left(\dot{y}\vec{u_x} - \dot{x}\vec{u_y}\right)$$

Principe fondamental de la dynamique

$$m_p \vec{a} = \vec{F} + \vec{F_m}$$

$$\begin{cases} m_p \ddot{x} = \frac{eV_0}{r_0^2} x - eB_0 \dot{y} \\ m_p \ddot{y} = \frac{eV_0}{r_0^2} y + eB_0 \dot{x} \\ m_p \ddot{z} = -2\frac{eV_0}{r_0^2} z \end{cases}$$

$$\underline{\ddot{z} + 2\omega_0^2 z = 0}.$$

$$\text{et} \begin{cases} \ddot{x} - \omega_0^2 x + \omega_c \dot{y} = 0 \\ \ddot{y} - \omega_0^2 y - \omega \dot{x} = 0 \end{cases}$$

Soit $\ddot{x} + i\ddot{y} - \omega_0^2(x + iy) + \omega_c(\dot{y} - i\dot{x}) = 0$.

soit $\underline{\ddot{\zeta} - i\omega_c \dot{\zeta} - \omega_0^2 \zeta = 0}$.

$$\Delta = -\omega_c^2 + 4\omega_0^2.$$

si $\Delta > 0$ les racines du polynome caractéristique sont

$$X_\pm = \frac{i\omega_c \pm \sqrt{4\omega_0^2 - \omega_c^2}}{2}$$

$$\zeta = A e^{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\omega_c^2}{4}}\,t}\, e^{+i\frac{\omega_c}{2}t} + B e^{-\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\omega_c^2}{4}}\,t}\, e^{i\frac{\omega_c}{2}t}$$

Terme qui indique le non confinement (exp croissante)

si $\Delta < 0$ les racines sont de la forme.

$$X_\pm = i\,\frac{\omega_c \pm \sqrt{\omega_c^2 - 4\omega_0^2}}{2}.$$

$= i r_\pm$ sont imaginaires pur.

$$\zeta = A e^{i r_+ t} + B e^{i r_- t}$$

ζ, x et y sont donc bornés ce qui traduit le confinement de l'antiproton.

Il y aura confinement si $\Delta < 0$

soit $\omega_c^2 > 4\omega_0^2$

$$\frac{e^2 B_0^2}{m_p^2} > 4\frac{e V_0}{m_p r_0^2}$$

$$\boxed{B_0 > 2\sqrt{\frac{m_p V_0}{e r_0^2}} = B_{min}}$$

AN $B_{min} = 8,1\ 10^{-2}\,T$.

26- AN : $\omega_c = 9,4\ 10^7$ rad s^{-1} et $\omega_0 = 3,8\ 10^6$ rad s^{-1}

(On peut commencer à considérer $\omega_c \gg \omega_0$).

Suivant z : oscillation à $\sqrt{2}\,\omega_0$. lente

Dans le plan Oxy. On reprend les racines

$$x_+ = i\,\frac{\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 - 4\omega_0^2}}{2} \simeq i\omega_c.$$

$$x_- = \frac{i}{2}\,\omega_c\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\omega_0^2}{\omega_c^2}}\right)$$

$$\simeq \frac{i}{2}\,\omega_c\left(1 - \left(1 - \frac{2\omega_0^2}{\omega_c^2}\right)\right)$$

$$\simeq i\,\frac{\omega_0^2}{\omega_c}.$$

$$\xi = A e^{i\omega_c t} + B e^{i\frac{\omega_0^2}{\omega_c}t}$$

Donc
$$\boxed{\begin{aligned} x &= Re(\xi) = |A|\cos(\omega_c t + \varphi_A) + |B|\cos\left(\frac{\omega_0^2}{\omega_c}t + \varphi_B\right) \\ y &= |A|\ (\omega_c t + \varphi_A) + |B|\sin\left(\frac{\omega_0^2}{\omega_c}t + \varphi_B\right) \end{aligned}}$$

Oscillation rapide à ω_c

Oscillation lente à $\frac{\omega_0^2}{\omega_c}$.