# 3- Caractère galiléen approché des référentiels utilisés en mécanique newtonienne

## I- Référentiels de Copernic (ou de Kepler)

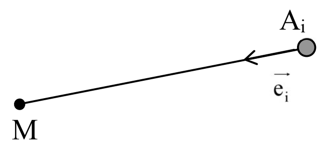
Le référentiel de Copernic constitue la meilleure approximation de référentiel galiléen
Dans le référentiel de Copernic, référence de référentiel galiléen pour l'étude des phénomènes dans notre système solaire, (ou dans le référentiel de Kepler), le principe fondamental de la dynamique appliqué à un point matériel M de masse m s'exprime sous la forme :

$$m\vec{a}\left(M/\mathcal{R}_C\right)=\vec{F}_{grav}+\vec{F}_a \quad \text{avec} \quad \vec{F}_{grav}=m\sum_i \vec{\mathcal{G}}_{Ai}\left(M\right) \quad \text{et} \quad \vec{F}_a \text{ résultante des forces autres que gravitationnelles}$$

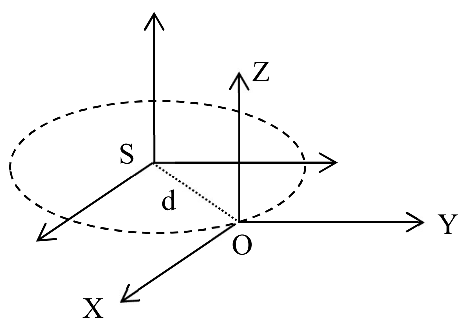
où $\vec{\mathcal{G}}_{Ai}\left(M\right)$ est le champ gravitationnel exercé au point M par $A_i$ ( $A_i$ = S- Soleil-, $P_i$- planète ….)
M étant à l'extérieur de $A_i$ et en supposant $A_i$ à symétrie sphérique

$$\vec{F}_{Ai}\left(M\right)=-\frac{G.m.M_{Ai}}{r_i^2}\vec{e}_i \qquad \overrightarrow{A_iM}=r_i.\overrightarrow{e_{ri}}$$

$$\vec{\mathcal{G}}_{Ai}\left(M\right)=-\frac{GM_{Ai}}{r_i^2}\vec{e}_i$$




## II- Relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel géocentrique




Le référentiel géocentrique $R_{geo}$, d'origine O centre de la Terre, est en translation d'accélération $\vec{a}(O/\mathcal{R}_K)$ par rapport au référentiel de Képler $R_K$ supposé *galiléen*.

La loi d'évolution du mouvement d'un point matériel M (m) - satellite par exemple - dans $\mathcal{R}_{geo}\ \left(O,X,Y,Z\right)$ s'exprime par :

$$m\vec{a}\left(M/\mathcal{R}_{géo}\right)=\vec{F}_{grav}+\vec{F}_a+\vec{F}_{ie}=\vec{F}_{grav}+\vec{F}_a-m\vec{a}\left(O/\mathcal{R}_K\right)$$

### A- Accélération de O, centre de masse de la Terre dans le référentiel de Kepler

$\vec{a}(O/\mathcal{R}_K)$ est obtenu en appliquant à la Terre le principe fondamental de la dynamique dans $\mathcal{R}_K$

$$M_T.\vec{a}\left(O/\mathcal{R}_K\right)=M_T.\sum_{A_j\neq T}\overrightarrow{\mathcal{G}_{A_j}}\left(O\right)=M_T.\overrightarrow{\mathcal{G}_A}\left(0\right) \qquad \overrightarrow{\mathcal{G}_A}\left(O\right)=\sum_{A_j\neq T}-\frac{G.M_{A_j}}{r_j^2}\vec{e}_j$$

en supposant les systèmes $A_i$ à symétrie sphérique

Soit $\vec{a}\left(O/\mathcal{R}_K\right)=\overrightarrow{\mathcal{G}_A}\left(0\right)$ où $\overrightarrow{\mathcal{G}_A}(O)=\overrightarrow{\mathcal{G}_L}(O)+\overrightarrow{\mathcal{G}_S}(O)+....$ = somme des champs gravitationnels créés en O par la Lune, le Soleil etc...

Ordre de grandeur : O décrit, en première approximation, un cercle de rayon $d \cong 1{,}5.10^{11}$ m , période T = 1 an soit à la vitesse angulaire $\omega_g = 2.\pi/T \cong 2.10^{-7}$ rad.s$^{-1}$

$$\left\|\vec{a}(O/\mathcal{R}_k)\right\|=\left\|\overrightarrow{\mathcal{G}_A}(O)\right\|\cong d.\omega_g^{\ 2}\approx 6.10^{-3}\ m.s^{-2}\cong 6.10^{-4}.\mathcal{G}_o$$

où $\mathcal{G}_o$ représente le champ gravitationnel exercé par la Terre au sol : $\mathcal{G}_o=\mathcal{G}_T\left(R_T\right)=\dfrac{G.M_T}{R_T^{\ 2}}$

## B- Relation fondamentale de la dynamique appliquée dans le référentiel géocentrique à un point matériel de masse m situé en M au voisinage de la Terre : $\left(\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = r \approx R_T\right)$

Ce point matériel est soumis

- aux forces gravitationnelles exercées par la Terre $\vec{F}_{G,T} = -\frac{G.M_T.m}{r^2}.\vec{e}_r = m.\overrightarrow{\mathcal{G}_T}(M) =$ $\overrightarrow{OM} = r.\vec{e}_r$
- aux forces gravitationnelles exercées par le Soleil, la Lune et d'autres planètes :

$$m.\sum_{Aj \neq T} \vec{\mathcal{G}}_{Aj} = m.\left[\overrightarrow{\mathcal{G}_L}(M) + \overrightarrow{\mathcal{G}_S}(M) + ......\right] = m.\overrightarrow{\mathcal{G}_A}(M)$$

- à d'autres forces, de résultante $\vec{f}$

$$m.\vec{a}\left(M/\mathcal{R}_{geo}\right) = \vec{f} + m.\overrightarrow{\mathcal{G}_T}(M) + m.\overrightarrow{\mathcal{G}_A}(M) - m.\vec{a}\left(O/\mathcal{R}_K\right) = \vec{f} + m.\overrightarrow{\mathcal{G}_T}(M) + m.\left[\overrightarrow{\mathcal{G}_A}(M) - \overrightarrow{\mathcal{G}_A}(O)\right]$$

$m.\vec{a}\left(M/\mathcal{R}_{geo}\right) = \vec{f} + m.\overrightarrow{\mathcal{G}_T}(M) + \vec{\delta}(M)$ où $\vec{\delta}(M)$ est désigné par terme différentiel ou terme des marées.

Au niveau de la surface de la Terre ( $r = R_T$ ) le calcul numérique donne $\left\|\vec{\delta}(M)\right\| \simeq 10^{-7}\,\mathcal{G}_o$ , $\mathcal{G}_o$ représentant le champ de gravitation terrestre au sol. Pour $r = 10\ R_T$, δ $\delta \approx 10^{-4}\mathcal{G}_T$ .

| | Soleil | Lune | Vénus | Mars | Jupiter |
|---|---|---|---|---|---|
| M (kg) | $2.10^{30}$ | $7.10^{22}$ | $5.10^{24}$ | $6.10^{23}$ | $2.10^{27}$ |
| D (m) | $1.10^{11}$ | $4.10^{8}$ | $4.10^{10}$ | $8.10^{10}$ | $6.10^{11}$ |
| $\mathcal{G}\ (m.s^{-2})$ | $1.10^{-2}$ | $3.10^{-5}$ | $2.10^{-7}$ | $6.10^{-9}$ | $4.10^{-7}$ |

*Tableau 1 : champs de gravitation moyens exercés par les astres sur la Terre*

| | Soleil | Lune | Vénus | Mars | Jupiter |
|---|---|---|---|---|---|
| $\left\|\vec{\mathcal{G}}(M) - \vec{\mathcal{G}}(T)\right\|\ (m.s^{-2})$ | $5.10^{-7}$ | $1.10^{-6}$ | $7.10^{-11}$ | $1.10^{-12}$ | $8.10^{-12}$ |

*Tableau 2 : Champ de gravitation différentiel moyen exercé par les astres sur la Terre*

**Conclusion** : $\left\|\vec{\delta}(M)\right\|$ est négligeable devant le champ gravitationnel terrestre pour des points situés à une distance du centre de la Terre inférieure à $\approx 10.R_T$.
Ce terme n'intervient que dans des situations exceptionnelles (marées). (Dans le cas par exemple de système de masse importante qui serait à l'équilibre dans $\mathcal{R}_{géo}$ en l'absence de ce terme.)

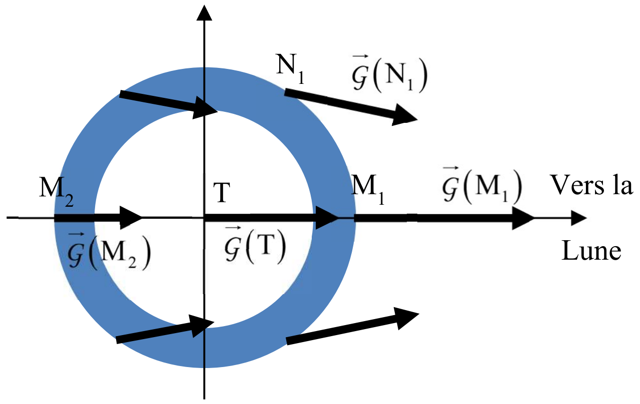
**Conséquence** : la très faible valeur de terme différentiel au voisinage de la Terre permet d'assimiler, dans la plupart des cas, le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_{geo}$ à un référentiel galiléen, en utilisant la relation fondamentale de la dynamique sous la forme :

$\boxed{m.\vec{a}(M/\mathcal{R}_{geo}) = \vec{f} + m.\overrightarrow{\mathcal{G}_T}(M)}$ $m.\overrightarrow{\mathcal{G}_T}(M)$ étant la seule force gravitationnelle appliquée au point M.

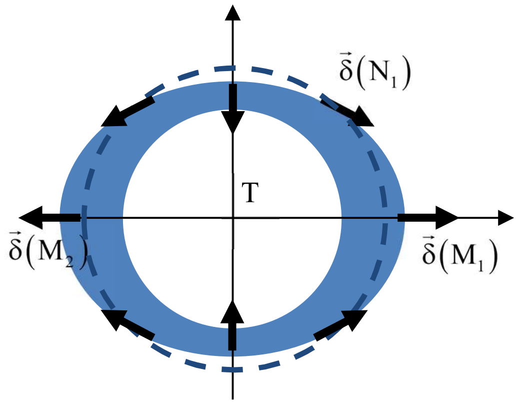
## C- Complément : première approche du phénomène des marées

On proposera ici une première approche statique et qualitative du phénomène de marées.

Dans $\mathcal{R}_{géo}$ l'action des autres astres du système solaire, au niveau de la surface de la Terre se réduit aux champs de gravitation différentiel créé par la Lune et le Soleil. La Lune ayant une influence double, c'est elle qui domine le phénomène. Le champ différentiel $\vec{\mathcal{G}}(M)-\vec{\mathcal{G}}(T)$ exercé à la surface du globe par celle-ci tend à étirer notre planète dans la direction Terre-Lune et à la comprimer dans les directions transverses (cf schéma ci-dessous).
Les océans, qui recouvrent la majeure partie du globe subissent ces actions en plus du champ gravitationnel terrestre. Cela se traduit par la création de deux bourrelets océaniques selon l'axe Terre-Lune ; c'est-à-dire deux régions aux antipodes l'une de l'autre où le niveau de la mer est plus élevé.




Champ de gravitation lunaire en différents points




Terme différentiel

Cela permet d'expliquer :

- Pourquoi il y a deux marées par jour.
  La Terre fait un tour sur elle-même en un jour (dans $\mathcal{R}_{géo}$ ) ; un point de sa surface passe deux fois par jour au niveau d'un bourrelet océanique (en négligeant ici la rotation de la Lune autour de la Terre, plus lente dans $\mathcal{R}_{géo}$ )
- Pourquoi la marée se décale de jour en jour.
  La Lune tourne autour de la Terre
- Pourquoi il y a des marées plus importantes que d'autres :
  - pleine lune et nouvelle lune : action conjointe du Soleil et de la Lune)
  - premier et dernier quartier : les axes des bourrelets océaniques TL et TS sont orthogonaux ; les effets sont moindres.

## III- Dynamique dans le référentiel terrestre - Champ de pesanteur terrestre

plan équatorial

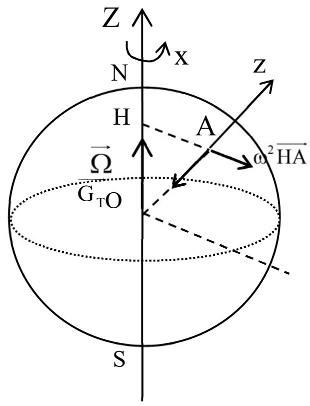
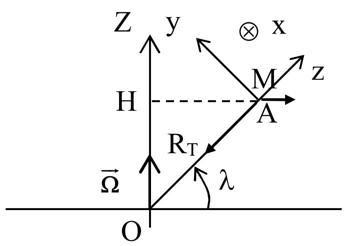



figure 1




plan équatorial

point matériel au voisinage de A

figure 2

Le référentiel d'étude est le référentiel $R_T$ (Ox,Oy,Oz) lié à la Terre (on choisit souvent l'origine en A au sol, à la latitude λ).
Ce référentiel est animé par rapport au référentiel géocentrique $R_{géo}$ d'un mouvement de rotation uniforme :

$$\vec{\Omega}_{R_T/R_{géo}} = \vec{\Omega} = \omega.\vec{K} \text{, avec } \omega = \frac{2\pi}{T_{sid}} = \frac{2\pi}{86164} = 7{,}29.10^{-5}\ \text{rad.s}^{-1} \quad \vec{K} \text{ vecteur unitaire de } \overrightarrow{SN}$$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à un point matériel de masse m, situé en M au voisinage de la Terre s'écrit : $\quad m.\vec{a}(M/R_T) = m.\vec{a}(M/R_{géo}) - m.\vec{a}_e(M) - m.\vec{a}_c(M)$

avec $\quad m.\vec{a}(M/R_{geo}) = \vec{f} + m.\overrightarrow{G_T}(M)$

$$-m.\vec{a}_e(M) = -m\,\vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM}) = m.\omega^2.\overrightarrow{HM}$$

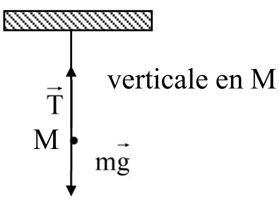
$$-m.\vec{a}_c(M) = -2.m.\vec{\Omega}\wedge\vec{v}(M/R_T)$$

### A- Statique dans le référentiel terrestre : champ de pesanteur terrestre

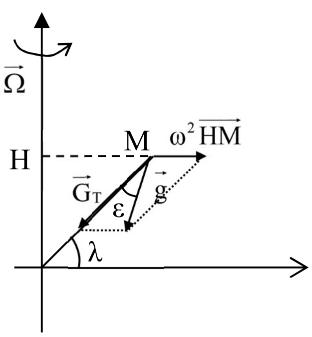
Lorsque M est en équilibre dans le référentiel $R_T$ terrestre : $\vec{a}(M/R_T) = \vec{0}$ et $\vec{v}(M/R_T) = \vec{0}$ soit $\vec{F}_{ic}(M) = \vec{0}$

On a donc $\quad \vec{0} = \vec{f} + m.\overrightarrow{G_T}(M) + m.\omega^2.\overrightarrow{HM} = \vec{f} + m.\vec{g}(M)$

où $\boxed{\overrightarrow{G_T}(M) + \omega^2.\overrightarrow{HM} = \vec{g}(M)}$ définit le champ de pesanteur terrestre en M. et $\mathbf{m\,\vec{g}(M)} = \vec{\mathbf{P}}$ = poids du corps .




La direction de $\vec{g}(M)$ définit la direction de la verticale en M ( direction du fil à plomb : dans le cas de la figure ci-contre $\vec{f} = \vec{T}$ tension du fil )




* module $\begin{cases} \left\|\overrightarrow{G_T}(M)\right\| = G_o \dfrac{GM_T}{(R_T+z)^2} & \text{pour M au sol : } z=0 \quad G_o \simeq 9{,}83\,\text{m.s}^{-2} \\ \omega^2.HM \le \omega^2.R_T \approx 3{,}4.10^{-2}\ \text{m.s}^{-2} & (\text{ toujours pour } z=0\,) \end{cases}$

* direction : la verticale en M, fait avec le rayon terrestre OM l'angle ε tel que

$$\frac{\omega^2 HM}{\sin(\varepsilon)} = \frac{g}{\sin(\lambda)}$$

$$\sin(\varepsilon) = \sin(\lambda).\frac{\omega^2 HM}{g} = \sin(\lambda).\frac{\omega^2 R_T\cos(\lambda)}{g} = \frac{1}{2}.\frac{\omega^2 R_T}{g}.\sin(2\lambda)$$

ε est maximum pour λ = 45° : $\varepsilon_M \cong 1{,}7.10^{-3}$ rad

Conséquence : En première approximation le champ de pesanteur terrestre $\vec{g}(M) \approx \overrightarrow{G_T}(M)$ ( la composante inertielle étant faible devant la composante gravitationnelle ).

A l'altitude z : $\boxed{\|\vec{g}\| \approx \|\vec{G}\| = G\frac{M_T}{(R_T+z)^2} = G_o.\frac{{R_T}^2}{(R_T+z)^2} \qquad \text{avec } \; G_o = g_o = G\frac{M_T}{{R_T}^2}}$

En pratique $z << R_T$ soit $g = g_o(1+\frac{z}{R_T})^{-2} \simeq g_o(1-2\frac{z}{R_T})$ $\quad \frac{g_o - g}{g_o} = \frac{2z}{R_T}$ variation relative de 1% pour $z \approx 32$ km

## B- Dynamique dans le référentiel terrestre

P.F.D. dans $R_T$ : $m.\vec{a}(M/R_T) = \vec{f} + m.\vec{g}(M) + \overrightarrow{F_{ic}}(M)$ $\quad \overrightarrow{F_{ic}}(M) = -2.m.\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M/R_T)$ force d'inertie de Coriolis

Ordre de grandeur de $F_{ic}$ : $\frac{F_{ic}}{mg} < 2.\omega.\frac{v}{g} \approx 1,5.10^{-5}.v$ , son influence est inférieure à 1% pour des vitesses inférieures à 700 $m.s^{-1}$ ( 2500 km/h ). Elle est donc en général négligeable, mais on doit en tenir compte pour des mobiles de vitesse et de masse élevée ou lorsque l'on désire une grande précision.

En conclusion, dans la majorité des problèmes usuels, on pourra écrire le principe fondamental de la dynamique dans un référentiel terrestre sous la forme :

$$\boxed{\mathbf{m.\vec{a}(M/R_T) = \vec{f} + m.\vec{g}(M)}}$$

$\vec{f}$ résultante des interactions autres que gravitationnelles