

Etude d'un solide en translation

- Le mouvement est entièrement caractérisé par le mouvement du barycentre G : lorsque le solide est en translation dans R : $\forall M \in S, \overrightarrow{v}(M) = \overrightarrow{v}(G)$
- L'élément cinétique utile pour l'étude de la translation est la **quantité de mouvement de S**

$$\text{dans R : } \vec{p} = \sum_{\substack{\text{description} \\ \text{discrète}} \atop M_i \in S} m_i \overrightarrow{v}(M_i) = \iiint_{\substack{\text{description} \\ \text{continue}} \atop M \in S} dm \cdot \overrightarrow{v}(M) = \underset{\substack{\text{définition} \\ \text{de G}}}{m_{\text{TOT}}} \overrightarrow{v}(G)$$

- L'élément dynamique utile est la résultante des actions extérieures :

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \iiint_{\substack{M \in S \\ S: \text{solide}}} d\vec{F}_{\text{ext}}(M) \quad (\text{force à distance}) + \iint_{\substack{M \in \Sigma \\ \Sigma \text{ délimitant } S}} d\vec{F}_{\text{ext}}(M) \quad (\text{force de contact})$$

Force infinitésimale appliquée à un volume $d\tau$ de S autour de M

Force infinitésimale de contact appliquée à une surface $d\Sigma$ de Σ autour de M

Exemple : le poids $\vec{F} = m_{\text{TOT}} \vec{g}$

les action de contact sur un support : $\vec{F} = \vec{N} + \vec{T}$

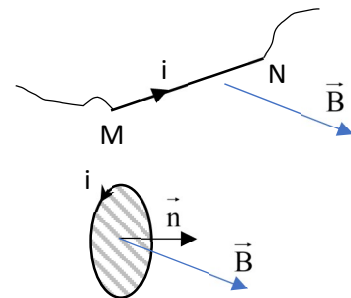
la tension d'un fil ou d'un ressort qui serait attaché à S

les actions inertielles si le référentiel R est non galiléen

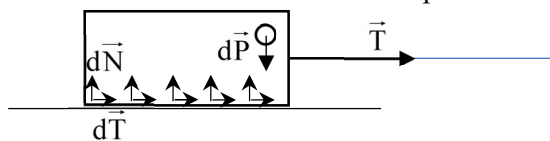
Les actions de Laplace sur un circuit plongé dans $\vec{B}$ uniforme :

tige rectiligne MN parcourue par un courant i : $\vec{F} = i \overrightarrow{MN} \wedge \vec{B}$

circuit filiforme fermé (de forme quelconque) : $\vec{F} = \vec{0}$



Attention, on ne peut a priori pas attribuer de point d'application à $\vec{F}$: il s'agit de la résultante d'action continument répartie dans S ou à la surface de Σ (délimitant S) ... sauf pour les action de contact appliquées sur une zone quasiponctuelle de Σ , comme la tension d'un fil attaché à S « en un point ».



- Le théorème dynamique utile est le théorème du centre de masse (auss appelé, théroème du

$$\text{centre d'inertie ou de la résultante dynamique : } \boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = m_{\text{tot}} \overrightarrow{a}(G) = \vec{F}_{\text{ext}}}$$

Interprétation : le mouvement de G est celui qu'aurait un point matériel de masse m_{tot} situé en G et soumis à $\vec{F}_{\text{ext}}$

- Aspects énergétiques**

Cas général : $\frac{dE_c}{dt} = P_{ext} + P_{int}$ où P_{int} est lié à la déformation du système

Dans le cas du solide indéformable $P_{int} = 0$ et

$\frac{dE_c}{dt} = P_{ext}$ avec $E_c = \frac{1}{2} m_{tot} v(G)^2$ et $P_{ext} = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{v}(G)$
--

$$\text{Démonstration } E_c = \iiint_{M \in S} \frac{1}{2} dm \cdot \underbrace{v(M)^2}_{=v(G)^2 \forall M \text{ (translation)}} = \frac{1}{2} \left(\iiint_{M \in S} dm \right) v(G)^2 = \frac{1}{2} m_{tot} v(G)^2$$

$$P_{ext} = \iiint_{M \in S} d\vec{F}_{ext}(M) \cdot \underbrace{\vec{v}(M)}_{=v(G) \forall M \text{ (translation)}} = \frac{1}{2} \left(\iiint_{M \in S} d\vec{F}_{ext}(M) \right) \cdot \vec{v}(G) = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{v}(G)$$

Les actions conservatives sont celles qui vérifient :

Pour tout déplacement élémentaire $d\vec{OG}$ ou $d\vec{r}_G$ du barycentre G le travail élémentaire se met sous la forme $\delta W = -dE_p(\vec{r}_G)$ où $E_p(\vec{r}_G)$ est un champ scalaire dépendant de la position $\vec{r}_G$ de G

$$\text{Exemple : le poids } \delta W = \iiint_{M \in S} \delta m \cdot \vec{g} d\vec{OM} = \vec{g} \cdot d \left(\underbrace{\iiint_{M \in S} \delta m \cdot \vec{OM}}_{m_{tot} \vec{OG}} \right) = m_{tot} \vec{g} \cdot d\vec{OG} = -m_{tot} g \cdot dz_g \text{ (en}$$

coordonnées cartésiennes avec Oz vertical ascendant). On obtient donc $E_{ppes} = m_{tot} g \cdot z_g + cst$

$$\text{Le TEC peut se réécrire : } \frac{d}{dt} (E_c + E_p(\vec{r}_G)) = P_{\substack{\text{actions} \\ \text{non conservatives}}}$$

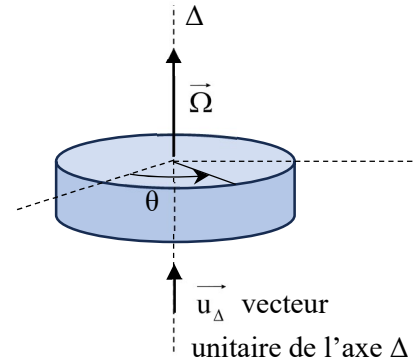
Le TEC est particulièrement efficace dans le cas d'un système conservatif évoluant à un degré de liberté : il donne à lui seul l'équation du mouvement

Etude d'un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ

- Le mouvement est entièrement caractérisé par un angle θ de rotation autour de l'axe Δ à partir duquel on construit le **vecteur rotation** de S : $\vec{\Omega} = \dot{\theta} \vec{u}_\Delta$ noté ensuite $\omega \vec{u}_\Delta$

On a alors $\forall M \in S, \vec{v}(M) = \vec{\Omega} \wedge \vec{OM}$ avec $O \in \Delta$

Et plus généralement $\forall A, B \in S, \vec{v}(B) = \vec{v}(A) + \vec{\Omega} \wedge \vec{AB}$



- L'élément cinétique utile pour l'étude de la rotation autour de Δ est la **moment cinétique scalaire de S par rapport à Δ** dans R :

$$L_\Delta = \overrightarrow{L_{O \in \Delta}} \cdot \vec{u}_\Delta = \left(\sum_{M_i \in S} \overrightarrow{OM_i} \wedge m_i \vec{v}(M_i) \right) \cdot \vec{u}_\Delta = \left(\iiint_{M \in S} \overrightarrow{OM} \wedge dm \cdot \vec{v}(M) \right) \cdot \vec{u}_\Delta = J_\Delta \omega$$

avec $J_\Delta = \sum_{M_i \in S} m_i r_i^2 = \iiint_{M \in S} dm \cdot r^2$ où $r = HM$; H étant le projeté orthogonal de M sur Δ

Remarques

- L_Δ est indépendant du point O choisi pour le calcul
- J_Δ est le moment d'inertie de S par rapport à Δ
- J_Δ traduit la répartition des masses autour de l'axe de rotation ; sa valeur sera toujours donné dans l'énoncé

Exemples

Cerceau (rayon R, masse m)	Disque ou cylindre plein (R, m)	Sphère creuse (R, m)	Sphère pleine (R, m)	tige (longueur L, masse m)
$J_\Delta = mR^2$	$J_\Delta = \frac{1}{2} mR^2$	$J_\Delta = \frac{2}{3} mR^2$	$J_\Delta = \frac{2}{5} mR^2$	$J_\Delta = \frac{1}{12} mL^2$

- Bien que les calculs de J_Δ soient HP, il faut connaître les résultats suivants :
D'après sa définition $J_\Delta > 0$ et $\dim(J_\Delta) = ML^2$

Si toutes les masse de M sont à la même distance de Δ : $J_\Delta = mR^2$ (ex cerceau)

Si S est caractérisé par un rayon maximal R alors $J_\Delta = \alpha mR^2$ avec $0 \leq \alpha \leq 1$ (et α est d'autant plus proche de 1 que la masse est répartie en périphérie de Δ)

- L'élément dynamique utile est le **moment résultant des actions extérieures par rapport à l'axe Δ**

$$\vec{M}_{\text{ext } \Delta} = \overrightarrow{M_{\text{ext}, O \in \Delta}} \cdot \vec{u}_\Delta$$

$$\text{où } \overrightarrow{M_{\text{ext}, O \in \Delta}} = \iiint_{\substack{M \in S \\ S: \text{solide}}} \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{F}_{\text{ext}}(M) \text{ (force à distance)} + \iint_{\substack{M \in \Sigma \\ \Sigma \text{ délimitant } S}} \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{F}_{\text{ext}}(M) \text{ (force de contact)}$$

- Glisseur**

Propriété : Lorsque $\exists C \in S / \overrightarrow{M_{\text{action}, C}} = \vec{0}$ on montre que $\exists A, \overrightarrow{M_{\text{action}, A}} = \overrightarrow{AC} \wedge \vec{F}_{\text{action}}$

et pour tous les calculs, cette action mécanique de force résultante $\vec{F}_{\text{action}}$ est équivalente à une force unique $\vec{F}_{\text{action}}$ appliquée en C (on parle alors de glisseur pour qualifier le torseur mécanique associé à cette action)

Exemples :

- Le poids : $\boxed{\vec{F}_{\text{poids}} = m_{\text{tot}} \vec{g} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{M_{G, \text{poids}}} = \vec{0}}$

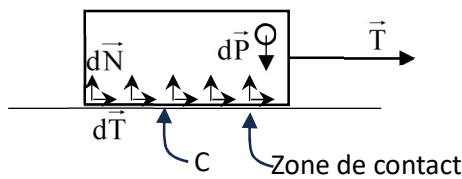
est équivalent à une force unique $m_{\text{tot}} \vec{g}$ appliqué en G (alors que le poids est une force volumique qui s'applique en chaque point de S)

- Toute force « analogue » au poids comme la force d'inertie d'entraînement dans le cas

où $\mathcal{R}$ est en translation dans $\mathcal{R}_g$: $\boxed{\vec{F}_{\text{ie}} = -m_{\text{tot}} \vec{a}(\mathcal{O} / \mathcal{R}_g) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{M_{G, \text{ie}}} = \vec{0}}$

- Les actions de contact sur un support Σ :

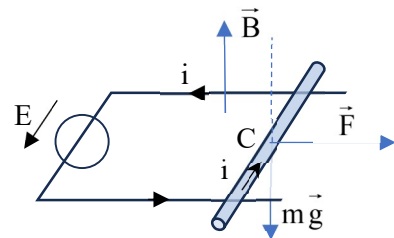
$$\exists C \in \text{zone de contact solide-support} / \overrightarrow{M_{C, \text{réaction}}} = \vec{0}$$



- Les actions de Laplace sur un circuit rectiligne MN plongé dans $\vec{B}$ uniforme

$$\boxed{\vec{F}_{\text{Laplace}} = i \overrightarrow{MN} \wedge \vec{B} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{M_{C, \text{Laplace}}} = \vec{0} \quad \text{C milieu de } [MN]}$$

Les actions de Laplace sont ici équivalentes à une force unique $i \overrightarrow{MN} \wedge \vec{B}$ appliquée en C



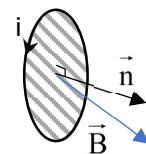
- Couple**

Les actions mécaniques constituent un couple si $\boxed{\vec{F}_{\text{action}} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \exists A \in S / \overrightarrow{M_{\text{action}, A}} \neq \vec{0}}$

Le moment associé à ces actions mécaniques est alors indépendant du point où le calcul et on le notera simplement $\overrightarrow{M_{\text{action}}}$ ou $\vec{M}$ et que l'on appellera parfois un peu abusivement « couple »

exemple : les actions de Laplace exercées sur un circuit fermé (de forme quelconque) :

$$\boxed{\vec{F}_{\text{Laplace}} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{M_{\text{Laplace}}} = i S \vec{n} \wedge \vec{B}}$$



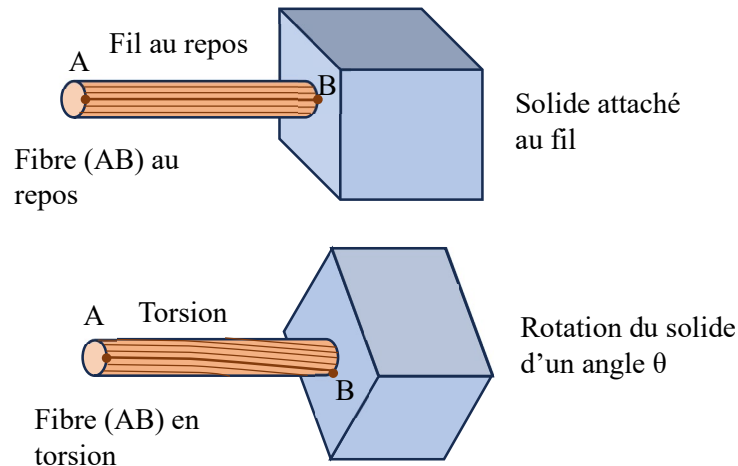
- **Autres actions**

- Actions de liaison avec un bâti. Lorsque la liaison (pivot ou rotule) qui permet la rotation autour de l'axe Δ est « parfaite », elle ne s'oppose en rien à la rotation autour de Δ et son moment par rapport à Δ est nul : $M_{\Delta, \text{liaison parfaite}} = 0$.

Attention, la résultante des action de liaison n'est jamais nulle ! peu importe que cette liaison soit parfaite ou non. Cette résultante est toujours totalement inconnue.

- Actions associés à un fil de torsion : lors d'une torsion d'angle θ autour de l'axe Δ du fil : $M_{\Delta, \text{torsion}} = -C\theta$

Attention, la résultante des ces actions n'est pas nulle et s'appelle la tension du fil



- **Théorème utile de la dynamique : théorème du moment cinétique scalaire par rapport à**

$$\Delta : \boxed{\frac{dL_{\Delta}}{dt} = J_{\Delta} \frac{d^2\theta}{dt^2} = M_{\Delta, \text{ext}}}$$
 y compris les forces d'inertie si le référentiel est non galiléen.

La seule inconnues cinématique est l'angle θ repérant le solide S dans sa rotation autour de Δ .

- **Aspect énergétique**

$$\boxed{\frac{dE_c}{dt} = P_{\text{ext}} + P_{\text{int}}}$$

avec pour un solide indéformable

$$\begin{cases} P_{\text{int}} = 0 \\ P_{\text{ext}} = M_{\Delta, \text{ext}} \cdot \omega \\ E_c = \frac{1}{2} J \omega^2 \end{cases}$$

- L'effet des actions est moteur (resp résistant) sur la rotation si leur moment M_{Δ} et ω sont de même signe (resp de signe opposé).
- Les actions extérieures qui sont conservatives sont celles qui vérifient : pour toute rotation élémentaire d'angle $d\theta$ on a

$$\delta W_{\text{action}} = M_{\Delta, \text{action}} \cdot d\theta = -dE_p(\theta)$$

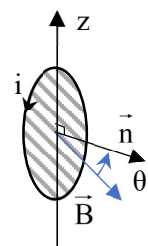
où $E_p(\theta)$ est un champ scalaire dépendant de la position angulaire θ de S.

Exemple : étude d'un circuit filiforme fermé dans $\vec{B}$ uniforme en rotation autour d'un axe Oz.

$$\text{On a vu que } \vec{M} = i S \vec{n} \wedge \vec{B} = -iBS \cdot \sin(\theta) \vec{u}_z$$

$$\text{Donc } M_{Oz} = -iBS \cdot \sin(\theta) \text{ et}$$

$$\delta W = M_{Oz} \cdot d\theta = M_{Oz} = -iBS \cdot \sin(\theta) d\theta = -d(-iBS \cdot \cos(\theta))$$



Soit $E_p = -iBS.\cos(\theta) = -\vec{m}.\vec{B}$ (où $\vec{m} = iS\vec{n}$ est le moment magnétique de la spire)

On a donc
$$\begin{cases} \vec{M} = \vec{m} \wedge \vec{B} \\ E_p = -\vec{m}.\vec{B} \end{cases}$$

- Le théorème de l'énergie cinétique peut se réécrire :
$$\frac{d}{dt}(E_c + E_p) = P_{\substack{\text{actions} \\ \text{non cons}}}$$
- Le théorème du centre d'inerti est-il intéressant pour l'étude de S en rotation autour d'un axe fixe :
 - NON si on s'intéresse seulement à l'équation du mouvement en θ
 - OUI si on souhaite calculer la résultante des actions de contact au niveau de l'axe de rotation

Condition de non-bascullement d'un solide

Application du TMC dans le référentiel barycentrique

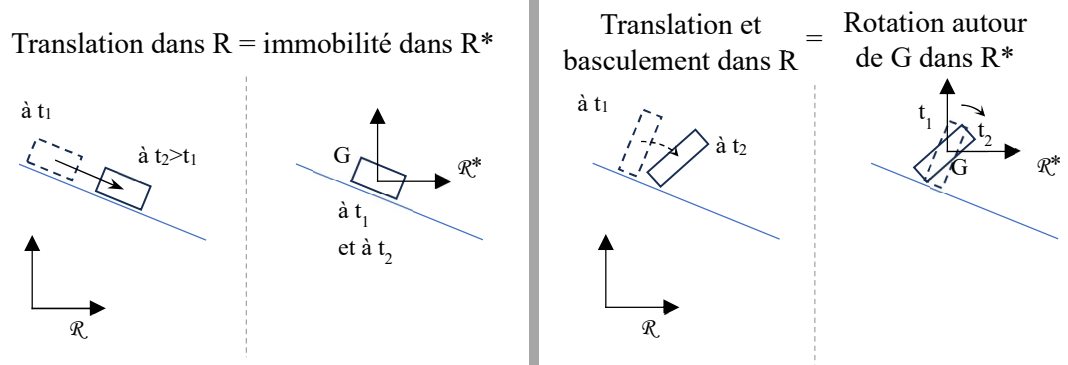
- Dans de nombreux exercices, on étudie un solide S en translation ou en équilibre et on se demande si S ne risque pas de basculer, c'est-à-dire de se mettre en rotation autour d'un axe, alors qu'il ne l'était pas initialement.

Question : Comment écrire une condition mathématique d'absence de basculement ; cad d'absence de rotation autour de tout axe, quel qu'il soit ?

Réponse : On va exiger l'absence de rotation autour de G dans le référentiel barycentrique (noté souvent $\mathcal{R}^*$)

- Définition** : $\mathcal{R}^*$ est le référentiel en translation dans le référentiel d'étude à la vitesse $\overrightarrow{v(G/\mathcal{R})}$ (G est donc fixe dans $\mathcal{R}^*$)
- Propriétés** :
 - Si S est en translation dans $\mathcal{R}$, il est immobile dans $\mathcal{R}^*$
 - Si S est en rotation par rapport à une axe fixe Δ dans $\mathcal{R}$, il est en rotation par rapport à l'axe fixe parallèle à Δ passant par G dans $\mathcal{R}^*$; on a alors $\overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}^*}} = \dot{\theta} \vec{u}_\Delta$

Illustration :



- Conclusion** : le non basculement peut s'obtenir par le TMC vectoriel en G dans $\mathcal{R}^*$:

$$\frac{d\vec{L}_G^*}{dt} = \vec{M}_{G,ext} + \vec{M}_{G,ie} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \vec{L}_G^* = \vec{0} & \text{si S est immobile dans } \mathcal{R}^* \\ \vec{M}_{G,ie} = \vec{0} \end{cases}$$

La condition de non basculement est donc $\boxed{\vec{M}_{G,ext} = \vec{0}}$

Remarque : en général $\mathcal{R}^*$ n'est pas en translation rectiligne dans $\mathcal{R}$ (et encore moins TRU). $\mathcal{R}^*$ n'est pas galiléen. Mais on montre que $\vec{M}_{G,ie} = \vec{0}$ quel que soit le mouvement $\mathcal{R}^*$ dans $\mathcal{R}$.

