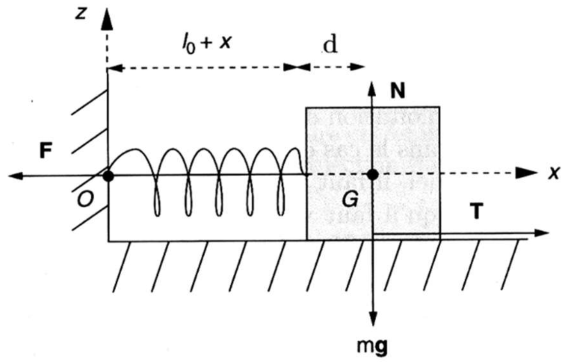
# Mécanique du solide : frottement

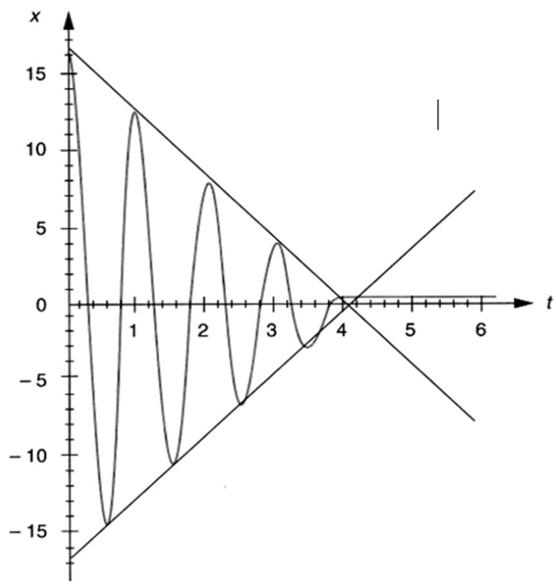
## A : Solide en translation

### Exercice A1 : Oscillateur harmonique amorti par frottement solide. (*Oral Centrale*)

Un pavé de masse m est fixé en I par un ressort de raideur k et de longueur à vide $l_0$. Il est posé sur un plan horizontal fixe et se translate selon $\overrightarrow{u_x}$ avec un coefficient de frottement f (cf figure). On constate alors que :




- **i.** Il existe une plage de positions d'équilibre et non pas une position d'équilibre unique comme pour l'oscillateur à frottement fluide
- **ii.** Le pavé effectue un nombre fini d'oscillations et s'arrête au bout d'un temps fini et non pas au bout d'un temps infini comme pour l'oscillateur à frottement fluide.
- **iii.** Le graphe de x(t) est enveloppé par deux droites, et non pas par deux exponentielles comme pour l'oscillateur à frottement fluide (cf graphique ci-dessous)

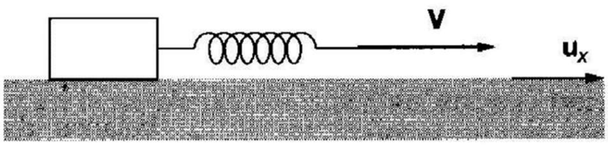



Expliquer l'observation **i.** puis retrouver le graphe **iii.**. Expliquer comment on peut déterminer le nombre d'oscillations (observation **ii.**) à partir d'un jeu de conditions initiales données (par exemple celui du graphique).

### Exercice A2 : Pavé lancé sur un plan horizontal. (*Début d'un oral des Mines*)

Déterminer la distance $d$ parcourue par un pavé de masse $m$ lancé à la vitesse $v_0$ sur un plan horizontal caractérisé par un coefficient de frottement $f$ avec le pavé.

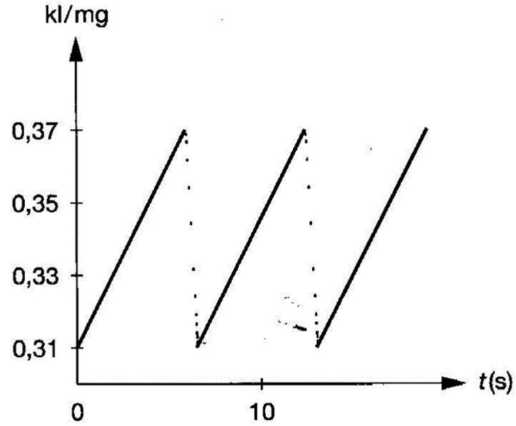
### Exercice A3 : Etude d'un régime « stick-slip » ou « fixe-glisse ».




Un palet, de masse m peut glisser sur une plaque horizontale fixe (cf figure ci-contre). Le palet est attaché à un ressort, de raideur k, dont l'extrémité est entraînée à la vitesse fixe $\vec{V} = V\vec{u_x}$ . On appelle $\ell$ la longueur du ressort par rapport à sa longueur à sa longueur à vide.
Les coefficients de frottement statique et dynamique sol-palet sont notés $f_s$ et $f_d$.

**1-** Calculer l'élongation $\ell_p$ du ressort en régime permanent. Ce régime est-il stable ?

**2-** En revanche, quand V est assez faible, on observe un régime nommé fixe-glisse (ou stick-slip en anglais) et dont le profil d'élongation est tracé sur la figure ci-contre (pour indication, un point est tracé toutes les 1,5 ms). Dans ce régime, alternativement, le palet est fixe, puis se détache brusquement et glisse. Identifier les deux types de régimes sur cette figure et expliquer l'allure générale.



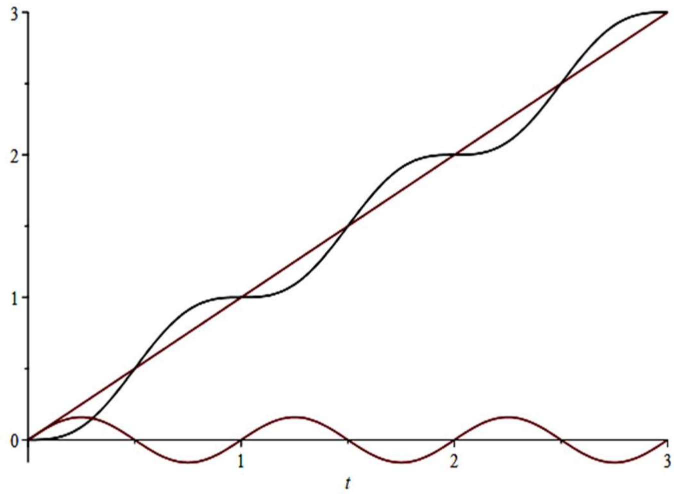

**3-** Calculer l'élongation $\ell_1$ en fin de phase fixe. Pour trouver celle en fin de phase glisse $\ell_2$, on écrira notamment l'équation régie par l(t). En déduire $f_s$ et $f_d$.

**4-** Expliquer pourquoi le mouvement est périodique, et évaluer sa période $T_0$ sachant que $m = 1{,}6\,\text{kg}$ , $k = 1{,}5.10^2\ \text{N.cm}^{-1}$ et $V = 10\,\mu\text{m.s}^{-1}$ . Comparer à la figure ci-contre.

**5-** Le phénomène fixe-glisse est à l'origine, dans la vie courante, par exemple des pneus ou des craies qui crissent, des gonds de porte qui grincent ou du son du violon. Dans quel domaine se trouve alors $T_0$ ? Comment empêcher, par exemple, des gonds de porte de grincer ou une craie de crisser ?

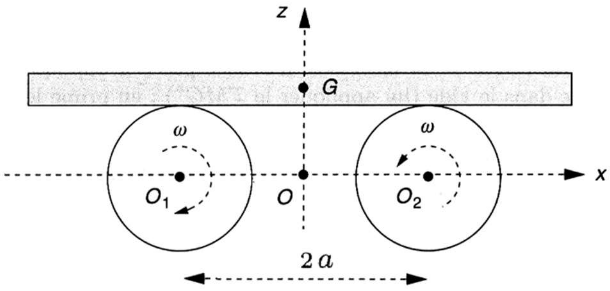
**6-** Que deviennent ces résultats si on suppose que $f_d$ et $f_s$ sont égaux ?

**7-** Etudier le cas limite d'une absence totale de frottements. Retrouver ces résultats par une étude directe dans le référentiel en translation à la vitesse V par rapport au référentiel du sol.
On donne ci-contre les graphes des fonctions qui à $t$ associent respectivement : $t$ ; $\dfrac{\sin(2\pi t)}{2\pi}$ ; $t - \dfrac{\sin(2\pi t)}{2\pi}$. Utiliser ces courbes pour représenter la position $x(t)$ du pavé dans les différents référentiels mis en jeu.



## Exercice A4 : L'expérience de Timochenko. (*Oral Centrale, Mines*)

On fait tourner les deux cylindres de rayons b de la fugire ci-dessous en sens inverse à vitesse angulaire $\omega$ constante et très élevée. A l'instant $t = 0$ on pose la planche homogène de masse m et d'épaisseur négligeable sur les cylindres, son centre d'inertie étant dans le médiateur de $O_1$ et $O_2$. On donne les coefficients de frottement de glissement $f_1$ et $f_2$ sur les deux cylindres avec $f_1 > f_2$. On constate que la planche oscille de manière sinusoïdale sans décoller.




**1-** Dénombrer les inconnues.

**2-** Montrer que nécessairement la planche glisse. Dans la suite on supposera que le sens des vitesses de glissment de la plahce sur chacun des rouleaux est imposé par leur sens de rotation.

**3-** On écrit les actions de contact exercées par les rouleaux sur la planche sous la forme $\overrightarrow{R_1} = T_1\overrightarrow{u_x} + N_1\overrightarrow{u_z}$ et $\overrightarrow{R_2} = T_2\overrightarrow{u_x} + N_2\overrightarrow{u_z}$ . Exprimez $T_1$ et $T_2$ en fonction de $N_1$, $N_2$, $f_1$ et $f_2$.

**4-** Etablir trois équations scalaires en utilisant les théorèmes généraux our la planches. En déduire que :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 a \frac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2} \qquad \text{avec} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{g(f_1 + f_2)}{2a}}$$

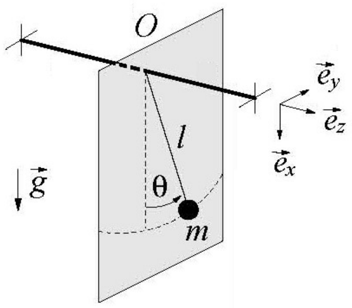
et déterminer x(t).

**5-** A quelle condition la planche oscille-t-elle sans décoller ? Peut-on changer le sens de rotation des cylindres ?

## B- Solide en rotation

### Exercice B1 : Etude d'un pendule pesant puis d'un pendule de torsion..

On considère un solide de forme quelconque susceptible de penduler sous l'effet de son poids autour d'un axe (Oz) horizontal auquel il est lié par une liaison pivot parfaite. On note m la masse du solide, a la distance de son barycentre à l'axe (Oz) et J, son moment d'inertie par rapport à cet axe.



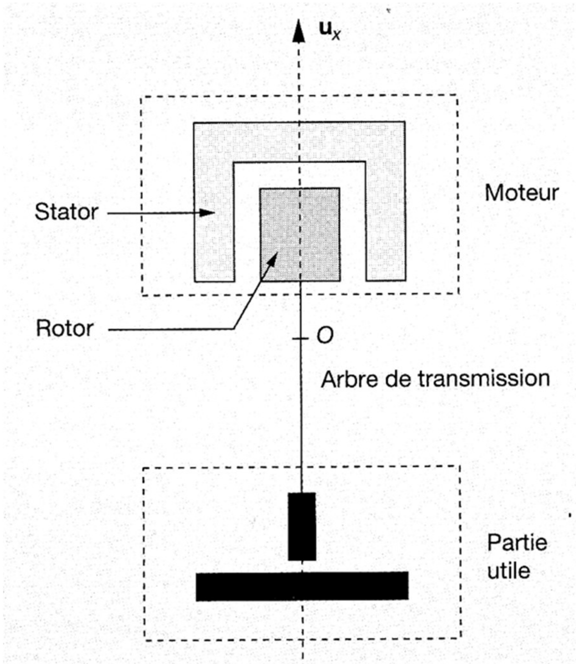

**1-** Effectuer un schéma de cette situation puis un bilan des actions subies par le solide. En déduire, par deux méthodes différentes, l'équation différentielle du mouvement observé autour de l'axe. Déterminer enfin la période des petites oscillations autour de la position d'équilibre stable.
Retrouver l'équation du pendule simple comme cas particulier du mouvement précédent.

On supprime maintenant la liaison pivot et on soude le pendule au milieu d'un câble de torsion horizontal fixé à ses extrémités. Pour simplifier, on se limite d'abord à un pendule simple de masse $m$ et de longueur $l$ que l'on repère par rapport à la verticale descendante grâce à un angle algébrique $\theta$ (figure ci-contre). Le câble, qui reste tendu à tout instant, résiste à la torsion qui apparaît lors de l'oscillation du pendule et, de ce fait, exerce sur celui-ci un *couple de rappel* vers la position $\theta = 0$ ; la norme de ce couple est proportionnelle à $|\theta|$ et à une constante $C$ positive appelée constante de raideur de torsion du câble.

**2-** Déterminer la nouvelle équation différentielle du mouvement du pendule autour de l'axe.

**3-** Comment cette équation est-elle modifiée si l'on remplace le pendule simple par un solide de forme quelconque, du type de celui étudié dans les questions précédentes ? Que se passe-t-il en particulier si la distance $a$ du barycentre du solide à l'axe ($Oz$) est nulle ?

### Exercice B2 : Etude d'un moteur.




On s'intéresse au fonctionnement d'une machine comportant une pièce tournante (perceuse, machine à laver le linge …). Le rotor, partie tournant du moteur, entraîne la partie tournante utile de la machine (par exemple le tambour dans le cas d'une machine à laver le linge) grâce à un arbre de transmission. L'axe de rotation est noté Ox. La vitesse angulaire de rotation du rotor autour de $\overrightarrow{u_x}$ est notée ω.

La partie fixe du moteur (stator) entraîne le rotor en exerçant sur lui un couple dont la valeur en projection sur $\overrightarrow{u_x}$ est $M_S > 0$.

**1-** En déduire le signe du couple $M_u$ exercé par la partie utile tournante sur le rotor.

**2-** Souvent, l'ensemble est plongé dans un fluide visqueux (huile) dont l'action sur le rotor se ramène à un couple $M_f = -\alpha\omega$ (commenter cette expression). On suppose que les actions de contact des différentes pièces entre elles sont parfaites, de telle sorte que leur moment projeté sur $\overrightarrow{u_x}$, $M_C$ est nul (c'est ce qu'on appelle une liaison pivot parfaite). On note J le moment d'inertie du rotor autour de l'axe de rotation. En déduire l'équation différentielle satisfaite par ω(t)

**3-** En supposant que les couples $M_s$ et $M_u$ sont à peu près constants dès la mise en rotation du rotor, trouver l'évolution de $\omega(t)$ sachant que l'on met le moteur en marche à $t = 0$.

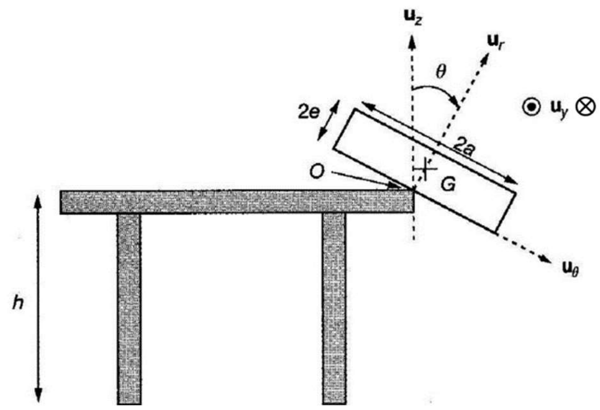
**4-** En déduire la vitesse angulaire de rotation en régime permanent. Dépend-elle des frottements du fluides ? Ces derniers ont-ils une autre influence ? Et les couples $M_s$ et $M_u$ ?

**5-** Que devient la puissance fournie par le stator en régime permanent ? Définir le rendement du moteur.

## Exercice B3 : De quel côté tombe la tartine de beurre ?

Existe-t-il une raison pour laquelle les tartines beurrées tomberaient plus souvent du côté beurré ? Le but de cet exercice est d'apport une réponse.

On imagine une tartine homogène (longueur 2a, largeur 2b, épaisseur 2e et masse m) posée sur une table. Sans faire attention, une personne la pousse vers un bord très lentement.




**1-** Caractériser la position de la tartine quand elle commence à tomber.

**2-** A ce moment, la tartine amorce une rotation sans glissement le long de l'arête Oy. Donner une équation différentielle vérifiée par l'angle $\theta$ entre la tartine et l'horizontale (voir la figure ci-contre, la tartine est agrandie pour des raisons de lisibilité) sachant que

$$J_{Oy} = \frac{1}{3} m\left(a^2 + 4e^2\right)$$

**3-** La réaction de la table sur la tartine vaut $\vec{R} = T\overrightarrow{u_\theta} + N\overrightarrow{u_r}$ . Applique le théorème du centre de masse à la tatine et déterminer T et N. Simplifier ces expressions vu que $a = 4\,\text{cm}$ et $e = 0{,}5\,\text{cm}$. La tartine peut-elle quitter la table sans glisser ? Comme le coefficient de frottement table/tartine vaut à peu près 1, à quel angle $\theta_0$ la tartine commence-t-elle à glisser ?

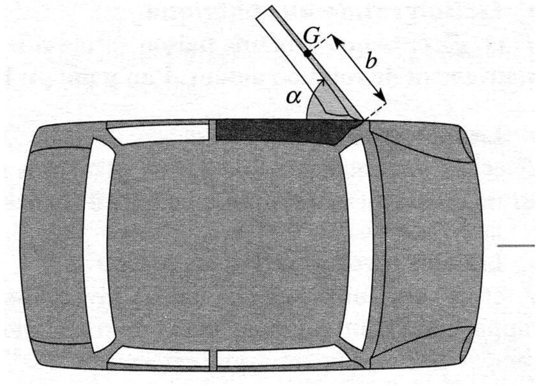
**4-** A partir de cet instant pruis comme origine du temps, la tartine quitte la table en un temps très bref, conservant quasiment la même orientation $\theta_0$ et la même citesse angulaire. Quelle est, après avoir quitté la table, la loi d'évolution de $\theta(t)$ et de $z_G(t)$, où G est le barycentre de la tartine, en supponsant que la tartine ne retouche plus la table ?

**5-** Détermine le temps $\tau$ pour lequel la tartine touche le sol. On considère que la hauteur h de la tablz est évidemment nettement supérieur aux dimensiosn de la tartine et que la vitesse intiaile de la tartine est très faible dans sa vitesse finale. En déduire $\theta(\tau)$. Application numérique ?

**6-** De qeul côté tombe donc la tartine, si on suppose qu'i n'y a pas de rebond ?

**7-** Des astronautes prennent leur petit déjeuner sur la Lune. De quel côté tombent les tartines ?

## Exercice B4 : La portière est restée ouverte




Une voiture initialement immobile démarre en prenant une accélération constante a sur une route horizontale (le référentiel terrestre étant supposé galiléen).

Au moment du démarrage, une portière de cette voiture est restée ouverte et fait un angle $\alpha_0 = 90°$. Calculer la durée nécessaire pour que la portière se referme. On néglige tout frottement ; on désigne par J le moment d'inertie de la portière par rapport à l'axe des charnières supposé vertical, par b la distance du centre d'inertie G de la portière à ce même axe et par m la masse de la portière.

On donne : $\int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{\cos\alpha}} = 2,62$