Equations locales de l'électromagnétisme

Tous les calculs portant sur la puissance et l'énergie seront traités ultérieurement

I. ETUDE DU CHAMP E.M. DANS UN METAL : LOI D'OHM ET EFFET DE PEAU.

Exercice I-1 : Loi d'Ohm locale dans un métal ; modèle de Drüde.

On s'intéresse à un métal au sein duquel on suppose que chaque atome libère un électron de conduction de charge $q = -e$ et de masse m, et on appelle n la densité particulaire de ces électrons de conduction. Sous l'effet d'un champ électrique, ceux-ci sont mis en mouvement et acquièrent une *vitesse d'ensemble* $\vec{v}$ (vitesse « de dérive ») qui se superpose à leur vitesse d'agitation thermique et conduit au courant électrique. On constate qu'en régime statique, cette vitesse est constante, ce qui se traduit par la loi d'Ohm.

Afin de rendre compte de cette vitesse limite puis d'étudier la conduction en régime variable, on adopte le *modèle de Drüde* selon lequel l'effet *moyen* des interactions entre un électron en mouvement à la vitesse $\vec{v}$ par rapport au réseau cristallin et les charges fixes de ce réseau peut être décrit pas une force de type frottement fluide : $-h\vec{v}$. Cette hypothèse revient à introduire un temps de relaxation $\tau = m/h$ que l'on peut mesurer grâce aux phénomènes décrits ci-dessous.

Les applications numériques seront relatives au cuivre, de masse molaire atomique A = 63,5 g.mol^{-1} et de masse volumique μ = 8,9 g.cm^{-3} ; les mesures dans le cuivre donnent τ = 2,5 10^{-14}s. On rappelle en outre les valeurs numériques : e = 1,6 10^{-19} C, m = 9,1 10^{-31} kg ainsi que le nombre d'Avogadro : N_a = 6,02 10^{23}.

1- Le champ électrique appliqué est tout d'abord statique et uniforme et on néglige l'effet du champ magnétique. En étudiant le mouvement d'un électron dans le modèle de Drüde, établir l'équation différentielle vérifiée par sa vitesse et montrer que celle-ci tend effectivement vers une valeur limite. En déduire la vitesse d'ensemble $\vec{v}$ d'un volume mésoscopique d'électrons, puis montrer que l'on aboutit bien à la loi d'Ohm locale : $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}$
Donner l'expression de la conductivité γ_0 du cuivre en fonction de n, e, m et τ. Effectuer l'application numérique à l'aide des données fournies et comparer à la valeur expérimentale : 5,6 10^{7} S.m^{-1}.

2- Montrer qu'en présence d'un champ magnétique (qui peut être le champ magnétique propre du circuit ou un champ extérieur, créé par un aimant, par exemple), la loi précédente est modifiée et devient : $\vec{j} = \gamma_0\left(\vec{E} - \dfrac{1}{ne}\vec{j} \wedge \vec{B}\right)$
Illustrer cette loi en traçant les lignes de champ de $\vec{E}$ et $\vec{j}$ dans le cas où $\vec{B} \perp \vec{E}$.
Montrer que dans un métal le terme « correctif » est négligeable, même pour des champs forts. On constate en revanche qu'il n'en est rien dans un semi-conducteur ; proposer une explication.

Dans toute la suite, on néglige de nouveau tout effet magnétique et on suppose qu'un champ électrique variable, sinusoïdal de pulsation ω, est appliqué au métal ; ce champ est supposé uniforme à l'échelle du mouvement de l'électron. On s'intéresse alors au vecteur densité de courant en régime permanent sinusoïdal.

3- Expliquer pourquoi il est de rigueur d'utiliser la notation complexe et montrer que les amplitudes complexes du vecteur densité de courant et du champ électrique sont reliées par une relation du type :

$\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma}\underline{\vec{E}}$ où $\underline{\gamma}$ est un nombre complexe que l'on exprimera en fonction de γ_0, τ et ω.

Décrire clairement ce que cette relation traduit comme lien entre $\vec{j}(\vec{r},t)$ et $\vec{E}(\vec{r},t)$ puis montrer que le métal suit convenablement la loi d'Ohm locale tant que la fréquence ν reste nettement inférieure à une fréquence de coupure ν_c que l'on calculera. Commenter le résultat obtenu.

Jusqu'à quelle fréquence le courant de déplacement est-il négligeable dans un métal ?

Questions complémentaires moins importantes :

4- De la question précédente, déduire l'équation différentielle qui relie $\vec{E}$ et $\vec{j}$ en tout point, puis l'équation différentielle suivie par la densité volumique de charge ρ. Quel est le temps caractéristique de relaxation de la charge si à on suppose qu'il apparaît subitement en un point une densité de charge ρ_0 non nulle ? Discuter l'affirmation selon laquelle un métal ohmique peut être considéré localement neutre à tout instant.

5- Donner enfin, en fonction de γ_0, τ , ω et l'amplitude E_0 du champ électrique appliqué, l'expression de la puissance moyenne dissipée dans le métal. Commenter.

Exercice I-2 : Pénétration d'un champ électromagnétique variable dans un métal. Effet de peau.

L'espace est maintenant rapporté à un trièdre *(Oxyz)* et on adopte le modèle unidimensionnel suivant : un métal occupe tout le demi espace ($z > 0$), le demi espace ($z < 0$) étant vide et on impose dans le vide un champ magnétique uniforme oscillant : $\vec{B}(z<0) = B_0\cos(\omega t)\vec{u}_x$; on cherche le champ électromagnétique qui règne dans le métal une fois le régime permanent sinusoïdal établi, en supposant que la fréquence permet d'appliquer la loi d'Ohm et en notant γ la conductivité.

1- Rappeler les équations constitutives du métal et en déduire la forme opérationnelle des équations de Maxwell dans ce métal. Montrer alors que le champ magnétique suit, dans le métal, l'équation suivante : $\vec{\Delta}\vec{B} = \mu_0\gamma\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

Une telle équation est très courante en physique : il s'agit d'une équation de diffusion. Le coefficient $(\mu_0\gamma)^{-1}$ est ainsi appelé : diffusivité magnétique.

2- On cherche une solution sous la forme :

$\vec{B}(z>0,t) = b(z)\cos(\omega t + \varphi(z))\vec{u}_x = \Re e\{\underline{b}(z)e^{j\omega t}\vec{u}_x\}$

Commenter la forme de solution envisagée puis l'injecter dans l'équation différentielle en utilisant la notation complexe proposée. En déduire une équation différentielle portant sur $\underline{b}(z)$ et montrer finalement que l'on obtient pour solution :

$$\vec{B}(z>0,t) = B_0 e^{-z/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\vec{u}_x \qquad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$$

La grandeur δ, homogène à une longueur, est appelée : épaisseur de peau.

Caractériser précisément le phénomène observé dans le conducteur. Représenter sur le même graphe $\vec{B}(z>0,t)\cdot\vec{u}_x$ en fonction de z à t = 0, au bout d'un quart de période, puis au bout d'une demi-période.

3- Quelle équation locale est vérifiée par le champ électrique au sein du métal ? par le vecteur densité de courant ? Déduire de l'expression du champ magnétique celle du champ électrique en tout point et commenter.

4- Application numérique pour le cuivre de conductivité $\gamma = 6.10^7$ S.m^{-1} : calculer l'épaisseur de peau aux fréquences suivantes : 50 Hz, 1 kHz, 1 MHz, 1 GHz, 1 THz. On rappelle que $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\,\text{H.m}^{-1}$.

Commenter la valeur obtenue à 50 Hz puis justifier l'appellation : *effet de peau* pour le phénomène observé. A quelle condition le modèle unidimensionnel peut-il être étendu à des géométries plus réalistes ?

Proposer une application dans le cadre d'ondes électromagnétiques haute fréquence. Quel métal a-t-on intérêt à choisir pour cette application ?

5- Déterminer le vecteur densité de courant en tout point du métal puis la puissance volumique dissipée par effet Joule au sein du métal.

De tels courants apparaissent dès que l'on essaie d'appliquer un champ magnétique variable dans un métal ; on les appelle : courants de Foucault.

Montrer que la puissance moyenne dissipée dans le conducteur par unité de surface s'écrit :

$$\left\langle \frac{dP}{dS} \right\rangle = B_0^2 \sqrt{\frac{\omega}{8\gamma\mu_0^3}}\,.$$

Commenter cette formule, en particulier sa dépendance en γ qui semble paradoxale, puis exhiber un dispositif de la vie courante exploitant cette dissipation d'énergie. Quel métal a-t-on intérêt à choisir pour cette application ?

Il existe de nombreux exercices où l'on cherche à calculer les courants induits (courants de Foucault) qui naissent au sein d'un métal plongé dans un champ magnétique extérieur variable, dans le cas particulier où ce champ est *lentement variable* et le métal *peu volumineux*.

Dans ce cas, il est possible de simplifier le calcul en supposant a priori que l'épaisseur de peau δ est supérieure à la taille a caractéristique du milieu métallique (si l'on dispose de valeurs numériques, on peut évidemment calculer δ/a et tester cette hypothèse) ; on écrit alors qu'en tout point du métal, le champ magnétique total est sensiblement égal au champ imposé par les sources extérieures ou, autrement dit, que le champ magnétique créé par les courants induits reste faible devant le champ extérieur (cette hypothèse figure d'ailleurs souvent de façon explicite dans l'énoncé). Il suffit alors de calculer le champ électrique via la loi de Faraday, puis les courants induits via la loi d'Ohm locale.

On peut, a posteriori, évaluer la valeur maximale du champ magnétique créé par les courants induits (il s'agit en général de la valeur du champ au centre du solide métallique étudié) et la comparer à la valeur du champ extérieur, ce qui permet de discuter l'hypothèse initiale.

Voici un exemple d'exercice de ce type :

Exercice complémentaire I-3 : Courants de Foucault et chauffage par induction

Un solénoïde long d'axe (Oz), comprend n spires par unité de longueur, circulaires de rayon a et parcourues par un courant d'intensité $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$. On suppose la fréquence assez basse pour effectuer une hypothèse d'ARQS.

1- Expliquer pourquoi ce solénoïde crée un champ électrique variable et déterminer l'expression de ce champ en tout point situé à l'intérieur du solénoïde.

2- On place à l'intérieur du solénoïde un cylindre métallique de conductivité σ, de de rayon b et de longueur $L \gg b$.
A quelle(s) condition(s) la valeur du champ électrique en un point intérieur à ce cylindre est-elle donnée par l'expression obtenue à la question 1 ? On supposera cette propriété vérifiée dans toute la suite de l'exercice.
Dans cette hypothèse, calculer la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans le cylindre.

3- Le cylindre étant en contact sur toute sa surface latérale avec de l'air à la température T_e, il échange avec cet air extérieur une puissance thermique surfacique qui s'écrit :
$dP/dS = h\,(T_s - T_e)$, où h est un coefficient caractéristique de l'interface entre l'air et le cylindre, et T_s la température de surface du cylindre, supposée uniforme.
Déterminer T_s en supposant qu'un régime permanent thermique est atteint. Comment choisir la pulsation du courant pour faire fondre le cylindre ?

4- On souhaite maintenant évaluer le champ magnétique créé par les courants de Foucault. Déterminer le champ élémentaire créé sur l'axe (Oz) par les courants circulant dans une tranche infinitésimale du cylindre comprise entre les rayons r et $r + dr$; en déduire le champ créé sur l'axe par l'ensemble des courants induits, puis une condition sur le rayon b pour que l'hypothèse effectuée à la question 2 soit validée.

II. CHAMP E.M. DANS DIVERS MILIEUX.

Exercice II-1 : Décharge d'un condensateur sphérique par ionisation brutale

Deux sphères métalliques minces S_1 et S_2 de centre commun O et de rayons r_1 et $r_2 > r_1$, sont séparées par un gaz initialement isolant dont les propriétés électriques peuvent être confondues avec celles du vide.

S_2 est initialement non chargée et S_1 porte la charge Q. On suppose que, à l'instant t = 0, le gaz devient instantanément un conducteur ohmique de conductivité σ (une telle opération est envisageable, en ionisant le gaz par un « flash » de photons de hautes énergie)

1- Décrire qualitativement le phénomène qui se produit ainsi que l'état final du système.

2- Quelle structure simple peut-on raisonnablement proposer pour les champs électrique et magnétique lors de cette évolution ?

3- Enoncer les équations de Maxwell et discuter leur utilité dans l'analyse de cette situation. Montrer en particulier que l'une d'elles fournit une équation différentielle sur le champ électrique présent dans l'espace inter-armatures. Discuter le temps caractéristique de relaxation de la charge.

4- Déterminer le champ électrique dans tout l'espace, à tout instant.

5- Déterminer le vecteur densité de courant et la densité volumique de charges dans tout l'espace inter-armatures, à tout instant. En vous appuyant sur la comparaison de ces deux champs, discuter le mécanisme par lequel la charge relaxe au sein de ce condensateur.

6- Après avoir effectué un bilan énergétique de la décharge du condensateur, calculer de la manière la plus simple possible l'énergie dissipée par effet Joule lors de cette évolution.

Le même exercice existe avec un condensateur cylindrique. Les idées et démarches sont les mêmes, seule la géométrie change.

Exercice II-2 : Sphère radioactive.

Une sphère radioactive de centre O et de rayon R, initialement non chargée, émet à partir d'un instant $t = 0$ des particules α (i.e. des noyaux d'hélium 4) de façon isotrope, avec un flux constant Φ_0. On se propose d'étudier un régime où la vitesse de ces particules est supposée de norme v_0 sensiblement constante. On utilise les coordonnées sphériques de centre O et s'intéresse exclusivement au domaine extérieur à la sphère ($r > R$).

1- Déterminer la charge $Q(r,t)$ contenue, à un instant $t \geq 0$, à l'intérieur de la sphère de rayon $r > R$.

2- Après avoir effectué une étude soigneuse des symétries et les invariances du problème, déterminer dans l'ordre de votre choix les champs électrique et magnétique, ainsi que le vecteur densité de courant et la densité volumique de charge, en tout point extérieur à la sphère.

3- Examiner l'équation de Maxwell Ampère et discuter la nécessité du terme de courant de déplacement.

Le même exercice existe avec une sphère absorbante bombardée de particules alpha.

Exercice II-3 : Etude d'un supraconducteur : relation de London ; effet Meissner.

On s'intéresse à une boule supraconductrice de centre O et de rayon R placée dans un solénoïde très long et de section dircutlaitre $a \gg R$, d'axe Oz, parcouru par un courant stationnaire I, le reste de l'espace étant vide. On pose $B_\infty = \mu_0 n I$

On constate expérimentalement qie la boule supraconductrice tend à expulser le champ magnétique en créant des courants localisés au voisinage de sa surface (effet Meissner). Pour rendre compte de cet effet, on admet que ans un supraconducteur, la loi d'Ohm est remplacée par la relation phénoménologique de London $\vec{B} = -\mu_0 \delta^2 \,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{j}$ où δ est un paramètre caractéristique du matériau.

1- Ecrire les équation de la magnétostatique dans le supraconducteur et en déduire que $\vec{B}$ est solution de $\Delta\vec{B} = \dfrac{\vec{B}}{\delta^2}$

En déduire la dimension de δ. Quelle est l'équation analogue dans le vide ?

2- La symétrie sphérique étant peu propice aux solutions simples, on remplace d'abord le problème réel par le modèle suivant : la sphère supraconductive est assimilée à un demi-espace $x > 0$; l'espace entre le solénoïde et la sphère est remplacé par le demi-espace $x < 0$, le solénoïde est oublié et impose uniquement la condition aux limites $\vec{B}(x = -\infty) = B_\infty \overrightarrow{u_z}$.

On cherche un champ $\vec{B}(x)$ ne dépendant ni de y ni de z.

2a- Montrer que $\vec{B}$ est uniforme dans le vide.

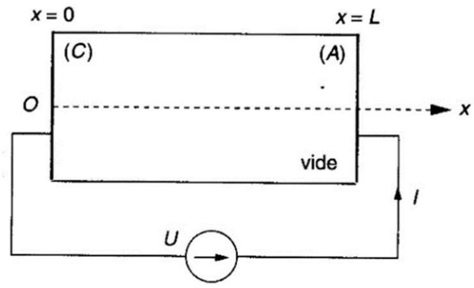
2b- Montrer que dans le supraconducteur $\vec{B} = B_\infty e^{-\frac{x}{\delta}} \overrightarrow{u_z}$. Tracer le graphe de B(x) et interpréter δ.

2c- Déterminer la densité volumique de courant $\vec{j}$ en fonction de B_∞ , x, μ_0 et δ et tracer le graphe de j(x).

2d- En réalité δ est de l'ordre de 0,1 μm. Commenter l'approximation d'une sphère par un plan. Pour simplifier encore, on se propose de faire tendre δ vers 0. Montrer qu'alors le champ $\vec{B}$ est discontinu à l'interface vide-supraconducteur et qu'il faut faire intervenir des courants superficiels. Calculer leur densité $\vec{J_s}$ en utilisant la relation de passage et vérifier que

$$\overrightarrow{J_s} = \int_0^\infty \vec{j}(x).dx$$

Exercice II-4 : Diode à vide



On envisage le dispositif de la figure ci-contre : une cathode (C) plaque métallique plane de surface S, est chauffée et émet des électrons dans un enceinte où règne un vide poussé ; ces électrons sont récupérés par une anode (A) identique à (C) et portée à un potentiel U positif par rapport à la cathode par un générateur de tension de fem U.

On étudie un régime stationnaire pour lequel on définit, dans l'espace $0 \leq x \leq L$ entre les deux électrodes de même surface S, la vitesse v(x) d'un électron passant en un point d'abscisse x, le nombre volumique $n^*(x)$ et le potentiel V(x), tel que $V(x=0)=0$. On note I l'intensité du courant dans le circuit avec l'orientation indiquée sur la figure.

1- Trouver une relation entre $v(x)$ et $V(x)$ puis montrer que le potentiel suit une équation du type : $\frac{d^2V}{dx^2} = \alpha V^{-1/2}$.

Chercher une solution de la forme $V(x) = \beta x^k$

2- Quelle est la caractéristique $I = f(U)$? Commenter.

3- Quelle durée met un électron pour passer de la cathode à l'anode ?