

# DS de PHYSIQUE n° 4

Samedi 14 décembre 2024

4 heures

Pour ce DS, vous devez choisir un des deux sujets proposés.

Le sujet n°1 est le plus facile, composé de deux extraits d'épreuves de CCINP relativement proches du cours et des TD, et d'un extrait d'une épreuve des mines plus difficile.

Le sujet 2 est composé de deux extraits d'épreuves des Mines et d'un extrait d'une ancienne épreuve de concours (Arts et Métiers) de niveau intermédiaire entre centrale-Mines et X-ENS.

Un des extraits des Mines est commun aux deux sujets.

Une fois le sujet choisi, vous devez vous y tenir !

## SUJET n°1

### Problème 1 : Table à induction (extrait de CCP PC 2005)

- Le chauffage du fond métallique (plaque circulaire) des récipients de cuisson peut être directement réalisé au moyen de courants de Foucault induits par un champ magnétique variable.
- Logé dans une table en céramique, un bobinage (inducteur) alimenté en courant sinusoïdal génère ce champ. Le transfert d'énergie électrique s'effectue par induction mutuelle entre ce bobinage et la plaque circulaire assimilable à une spire unique fermée sur elle-même.
- Dans le domaine de la cuisson, il s'agit de créer une forte dissipation Joule dans le fond des récipients tout en limitant au plus bas l'échauffement de l'inducteur. Pour atteindre cet objectif un choix s'impose quant aux propriétés du métal à chauffer.

#### Avertissements :

a) Ce problème conduit à comparer le comportement d'un fond en acier amagnétique à celui d'un fond en acier magnétique, **cependant aucune connaissance des milieux magnétiques n'est nécessaire.** Les comparaisons seront abordées tout simplement en utilisant les valeurs des perméabilités magnétiques relatives  $\mu_r$  données ci-après, sachant que la perméabilité magnétique du vide  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$  doit être systématiquement remplacée par la perméabilité magnétique absolue du métal :  $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$

b) On tiendra compte aussi du fait que la conductivité électrique  $\gamma$  des deux métaux considérés n'est pas la même. Les données sont :

- pour l'acier amagnétique :  $\mu_r = 1$  et  $\gamma = 10^6 \text{ S.m}^{-1}$
- pour l'acier magnétique :  $\mu_r = 350$  et  $\gamma = 5 \cdot 10^6 \text{ S.m}^{-1}$

c) La permittivité du vide sera prise égale à  $\epsilon_0 = 1/(36\pi \cdot 10^9) \text{ F.m}^{-1}$

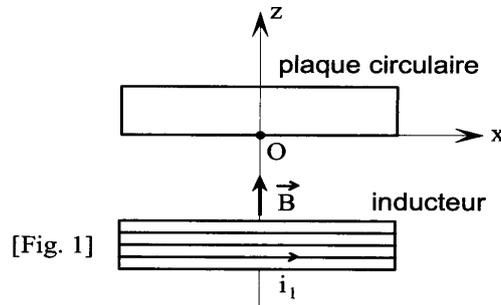
d) L'expression donnée ci-après du laplacien vectoriel d'un vecteur  $\vec{j}$ , pourra être utilisée sans démonstration :

$$\Delta \vec{j} = \text{grad} \left[ \text{div} \vec{j} \right] - \text{rot} \left[ \text{rot} \vec{j} \right]$$

e) On désignera par  $i$  le nombre complexe de module unité et d'argument  $\pi/2$  et à toute grandeur harmonique de pulsation  $\omega$  :  $a(M,t) = a(M) \cos[\omega t + \phi(M)]$  on associera le nombre complexe  $\underline{a}(M,t) = \underline{A}(M) \exp[i \omega t]$  où  $\underline{A}(M)$  représente l'amplitude complexe  $\underline{A}(M) = a(M) \exp[i \phi(M)]$ .

## 1) Courants de Foucault - Effet de peau.

Un inducteur alimenté par un courant  $i_1$  génère un champ magnétique  $\vec{B}$  sinusoïdal de fréquence compatible avec l'approximation des régimes quasi stationnaires (A.R.Q.S.). Ce champ est globalement orienté suivant un axe Oz (Figure 1) autour duquel il conserve une symétrie de révolution. Il agit sur un disque métallique coaxial dont la face en regard vers l'inducteur est centrée en O.



1.1 - Exprimer la loi qui permet de prévoir globalement le sens de rotation des courants induits dans la plaque circulaire. Préciser celui-ci. Quelle est la fréquence des courants induits ?

1.2 - Pour modéliser ces courants, on recherche une solution conforme aux équations de Maxwell et compatible avec l'hypothèse de charges mobiles entraînées en rotation autour de l'axe Oz, avec une vitesse angulaire  $\Omega(z,t)$  uniforme dans chaque section droite de la plaque circulaire, de la forme :  $\Omega(z,t) = \Omega(z) \cos(\omega t + \varphi(z))$ .

Toute l'étude se fera en coordonnées cartésiennes dans le référentiel orthonormé Oxyz, l'axe Oy non représenté sur la figure 1 étant orienté normalement au plan du dessin, vers l'arrière.

1.2.1. Exprimer la vitesse linéaire  $\vec{v}$  des charges électriques en un point  $M(x,y,z)$  du disque, sous forme d'un produit vectoriel fonction du rayon vecteur  $\vec{OM}$  et du vecteur axial  $\vec{\Omega}$  représentant la vitesse de rotation, orienté selon Oz.

1.2.2. En déduire les composantes  $j_x$  et  $j_y$  de la densité de courant  $\vec{j}$  en fonction du nombre  $n$  de charges élémentaires  $-e$  mobiles par unité de volume, de la vitesse angulaire  $\Omega(z,t)$  et des coordonnées du point M.

1.2.3. Calculer les dérivées partielles :  $\frac{\partial^2 j_x}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 j_x}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial^2 j_y}{\partial x^2}$  et  $\frac{\partial^2 j_y}{\partial y^2}$

1.3 - Equations de Maxwell

1.3.1. Exprimer la loi d'Ohm locale pour un métal de conductivité  $\gamma$ .

1.3.2. Ecrire les équations de Maxwell pour un métal de perméabilité absolue  $\mu$ .

1.3.3. A partir de ces équations de Maxwell, retrouver l'équation locale de conservation de la charge.

1.3.4. Si les conditions initiales étaient telles qu'une densité volumique de charges  $\rho_0$  soit présente à l'instant  $t = 0$ , montrer qu'elle disparaîtrait en un temps très court. Evaluer ce temps et conclure qu'en régime établi, le conducteur reste globalement neutre en tout point de son volume. Donner l'expression simplifiée de l'équation de Maxwell-Gauss.

1.3.5. Montrer que, lorsque la fréquence imposée est égale à 25 kHz, les courants de déplacement sont tout à fait négligeables devant les courants de conduction. Dans ce cas, donner l'expression simplifiée de l'équation de Maxwell-Ampère.

1.3.6. Réécrire les équations de Maxwell ainsi obtenues, en utilisant la notation complexe pour les dérivations en fonction du temps. En déduire une relation exprimant la proportionnalité entre la densité de courant  $\vec{j}$  et son laplacien vectoriel  $\Delta \vec{j}$ .

1.4 - On recherche pour les composantes  $j_x$  et  $j_y$  de la densité volumique de courant, des expressions complexes qui puissent s'écrire :  $\underline{J}_x(\vec{r}) \exp[i \omega t]$  et  $\underline{J}_y(\vec{r}) \exp[i \omega t]$ .

Monter alors, en utilisant les résultats obtenus en 1.2.3, que ces expressions sont régies par des équations différentielles de la forme :

$$\frac{\partial^2 \underline{J}_x}{\partial z^2} = f(\underline{J}_x) \quad [1] \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \underline{J}_y}{\partial z^2} = f(\underline{J}_y) \quad [2]$$

de la dépendance en  $z$

1.5 - Résoudre ces équations et écrire l'expression générale des amplitudes complexes  $\underline{J}_x$  et  $\underline{J}_y$  en faisant apparaître, dans chaque cas, les deux constantes d'intégration.

1.6 - Introduire une grandeur  $\delta$  homogène à une longueur et caractéristique de l'atténuation suivant l'axe Oz. Quel nom donne-t-on habituellement à cette grandeur ? Montrer qu'elle peut s'écrire :

$$\delta \approx \frac{503,3}{\sqrt{\gamma \mu_1 f}}$$

1.7 - L'inducteur est alimenté par un générateur délivrant une fréquence  $f = 25$  kHz.

La plaque a une épaisseur égale à 1 cm.

- a) Calculer la profondeur de pénétration des courants dans les deux cas, acier amagnétique puis acier magnétique, compte tenu des valeurs numériques données en début de problème.
- b) Justifier que, malgré la petitesse de son épaisseur, l'on puisse considérer la plaque comme illimitée en  $z$ .
- c) Simplifier alors les expressions de  $\underline{J}_x$  et de  $\underline{J}_y$ .

1.8 - En regroupant tous les résultats établis dans cette partie, donner en notation réelle l'expression complète du vecteur densité de courant  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  en notant  $J_0$  la valeur maximale de son amplitude.

**Problème 2 : Ecrantage d'un champ magnétique** (d'après CCP MP 2009)

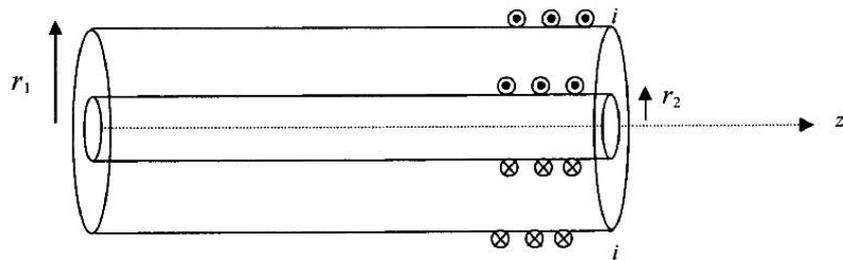
Dans tout le problème, on travaille dans l'ARQS (approximation du régime quasi-stationnaire).

On donne :  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$

**Ecrantage par un solénoïde en court-circuit**

On considère deux solénoïdes  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  coaxiaux, d'axe  $Oz$ , creux, de même longueur  $l = 20 \text{ cm}$ , de rayons respectifs  $r_1 = 10 \text{ cm}$  et  $r_2 = 5 \text{ cm}$ , et comportant respectivement  $N_1 = 700$  et  $N_2 = 500$  spires jointives, enroulées dans le même sens (voir la figure 1). Ces deux bobinages ont pour résistances respectives  $R_1 = R_2 = 50 \Omega$ . On pourra introduire les nombres de spires par unité de longueur, respectivement notés  $n_1$  et  $n_2$ .

On effectue l'étude en négligeant tout effet de bord, c'est-à-dire en considérant ces solénoïdes comme très longs.



1) Le solénoïde  $\Sigma_1$  est parcouru par un courant d'intensité  $i$ ,  $\Sigma_2$  étant en circuit ouvert.

a. Exprimer le champ magnétique  $\vec{B}_1$  créé dans tout l'espace.

b. En déduire que le coefficient d'inductance  $L_1$  de  $\Sigma_1$  vaut  $\mu_0 \frac{N_1^2}{l} \pi r_1^2$  ; donner l'expression de  $L_2$ , l'inductance de  $\Sigma_2$  et calculer sa valeur numérique.

c. Définir le coefficient de mutuelle inductance  $M$  entre les deux solénoïdes. Montrer que

$$M = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} \pi r_2^2.$$

2) Le solénoïde  $\Sigma_1$  est alimenté par un générateur idéal de courant électromoteur  $i_0(t) = I_0 \cos(\omega t)$  avec  $I_0 = 1 \text{ A}$  ; les deux extrémités du solénoïde  $\Sigma_2$  sont reliées par un fil sans résistance.

a. Déterminer l'amplitude complexe du courant  $i_2(t)$  circulant dans  $\Sigma_2$  en fonction de  $M$ ,  $L_2$

et  $R_2$ . La mettre sous la forme  $\underline{i}_2 = \frac{Kj \frac{\omega}{\omega_c} i_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$ . On donnera l'expression de  $K$  en fonction de

$N_1$  et  $N_2$  et celle de  $\omega_c$  en fonction de  $R_2$  et  $L_2$ .

b. En déduire l'expression de l'amplitude complexe  $\vec{B}_2(t)$  du champ magnétique total à l'intérieur du solénoïde  $\Sigma_2$ .

Montrer que ce champ tend vers 0 à haute fréquence et commenter.

c. Application numérique : calculer  $\omega_c$  ainsi que les amplitudes de  $i_2(t)$  et de  $\vec{B}_2(t)$  pour une fréquence de 11 kHz. Calculer également le rapport  $B_2/B_1$  des amplitudes de  $\vec{B}_2(t)$  et  $\vec{B}_1(t)$ , champ créé par le solénoïde  $\Sigma_1$  seul.

## Ecrantage par un cylindre métallique creux

Le solénoïde  $\Sigma_2$  est maintenant remplacé par un cylindre conducteur  $C_2$  d'axe  $Oz$ , creux, de rayon intérieur  $r_2 = 5$  cm, d'épaisseur  $h = 50$   $\mu\text{m}$ , de longueur  $l$  et de conductivité  $\gamma = 4.10^7$  S.  $\text{m}^{-1}$ .

Le solénoïde  $\Sigma_1$  est toujours présente et parcouru par le courant  $i_0(t)$  introduit à la question 2. On néglige à nouveau tout effet de bord.

3) On associe aux courants parcourant le cylindre (courants de Foucault) un vecteur densité volumique de courant de la forme :  $\vec{J} = J_0 \vec{e}_\theta$  en coordonnées cylindriques,  $J_0$  étant supposé uniforme.

- a. Exprimer le champ magnétique créé dans tout l'espace en fonction de  $i_0, J_0$  et des données du problème.
- b. Déterminer en fonction de  $i_0, J_0$  et des données du problème, le champ électrique qui s'applique aux charges mobiles du cylindre  $C_2$ . On n'oubliera pas que l'épaisseur  $h$  est très faible devant le rayon  $r_2$ .
- c. En reprenant les notations des questions 1 et 2, déduire des questions précédentes que :

$$\vec{B}_2 = \frac{\vec{B}_1}{1 + j\omega\tau}$$

On exprimera  $\tau$  en fonction de  $r_2, h, \gamma$  et  $\mu_0$ .

- d. L'écrantage est-il plus efficace avec ce cylindre ou avec le solénoïde de la question 2 ? On s'appuiera sur des applications numériques.
- e. On admet qu'en régime permanent sinusoïdal de pulsation  $\omega$ , les courants de Foucault qui apparaissent au sein d'un métal sont localisés au voisinage de la surface du métal, sur une épaisseur typique  $\delta$  qui s'écrit :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}$$

Discuter l'hypothèse d'uniformité du vecteur densité de courant au sein de  $C_2$ , dans le cadre de cette étude.

- f. L'étude effectuée dans cette question aurait-elle pu être menée en modélisant les courants de Foucault de manière surfacique ? Discuter.

4) On cherche à caractériser le cylindre  $C_2$  par une inductance  $L_2$  et une résistance  $R_2$ .

- a. Déterminer, en fonction de  $J_0$ , l'intensité  $I$  qui traverse une section droite de  $C_2$ , de longueur  $l$  et de hauteur  $h$ .
- b. Proposer alors une détermination de  $L_2$  par une méthode énergétique. On n'oubliera pas que l'épaisseur  $h$  est très faible devant le rayon  $r_2$ .

Commenter l'expression obtenue.

- c. Pour calculer une résistance  $R_2$  adaptée à la situation, on imagine qu'on fend le cylindre selon une génératrice et qu'on soumet les deux bords ainsi obtenus à une différence de potentiel  $U$  (voir la figure 2).

Relier la densité de courant au champ électrique, puis à la différence de potentiel ; en déduire la résistance  $R_2$ .



Figure 2. Cylindre vu de face

- d. Montrer que les approches effectuées aux questions 2 et 3 sont en fait équivalentes pour décrire le phénomène d'écrantage.

### Problème 3 : Modèle autodynamo du champ géomagnétique (extrait de Mines MP 2019)

Un modèle possible pour la circulation des courants électriques dans le noyau métallique liquide de la Terre, couplée à la rotation de la Terre, est le modèle autodynamo (cf. fig. 2). Le système comporte  $N$  spires (circulaires de rayon  $a$ , de centre  $O$  et d'axe  $(Oz)$ , qui créent le champ géomagnétique). Il comporte aussi un disque central de rayon  $b < a$ , qui peut tourner autour de l'axe  $(Oz)$  avec la vitesse angulaire  $\omega(t)$  et le moment d'inertie  $I$  (il modélise les interactions mécaniques avec la rotation de la Terre). Ce disque, conducteur, est parcouru par le même courant  $i(t)$  que les spires; il est aussi entraîné par la rotation de la Terre avec un couple moteur  $\vec{\Gamma} = \Gamma_0 \vec{e}_z$ . Enfin, la résistance électrique totale du circuit est notée  $R$ .

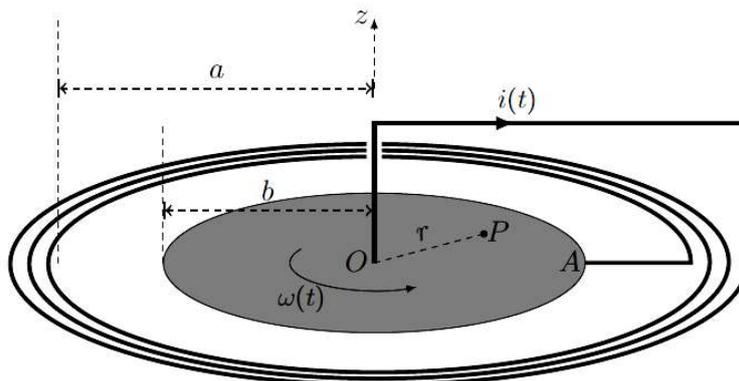


FIGURE 2 – Le modèle autodynamo pour le champ géomagnétique

On note  $\vec{B}(P)$  le champ magnétique créé par ce dispositif en un point  $P$  du disque tournant, avec  $r = OP$ ; on supposera  $N \gg 1$ . Si  $i(t) \neq 0$ , on note  $M_{r_{\max}} = -\frac{1}{i(t)} \int_0^{r_{\max}} r \vec{e}_z \cdot \vec{B}(P) dr$ ; en particulier on pourra utiliser dans ce qui suit les intégrales  $M_a$  et  $M_b$  pour  $r_{\max} = a$  ou  $b$  respectivement.

□ 6 — Quelle est la direction de  $\vec{B}(P)$ ? Quels sont les signes de  $M_a$  et  $M_b$ ? Comparer  $M_a$  et  $M_b$ . Expliciter l'inductance propre  $L$  du circuit électrique de la figure 2 en fonction notamment d'une de ces intégrales.

□ 7 — On suppose d'abord que le courant  $i(t)$  traverse le disque uniquement en ligne droite du point  $A$  de sa périphérie à  $O$ . Exprimer la force de Laplace  $d\vec{F}_L$  s'exerçant sur un élément de longueur du segment  $AO$ . Exprimer alors le moment  $\Gamma_L = \vec{\Gamma}_L \cdot \vec{e}_z$  des forces de Laplace exercées sur ce disque en fonction de  $i(t)$  et  $M_b$ . Même si le courant se répartit de manière arbitraire sur ce disque de  $A$  à  $O$ , on peut montrer, et on admettra, que l'expression établie ici du moment des forces de Laplace reste inchangée.

□ 8 — En faisant l'hypothèse de la conservation de la puissance lors de la conversion électromécanique, relier la force électro-motrice  $e(t)$  induite par les mouvements de rotation du disque à  $M_b$ ,  $i(t)$  et  $\omega(t)$ .

□ 9 — Établir les équations régissant les évolutions du courant dans le noyau et de sa vitesse de rotation sous la forme d'un système différentiel couplé

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = i(t) [\alpha\omega(t) - \beta] \\ \frac{d\omega}{dt} = \gamma - \delta i^2(t) \end{cases}$$

On exprimera les constantes positives  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , et  $\delta$  en fonction de  $R$ ,  $L$ ,  $M_b$ ,  $I$  et  $\Gamma_0$ .

Soit  $i_0$  un courant constant arbitraire, on considère la fonction

$$\mathcal{H}(\omega, i) = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Li^2 - \frac{L\Gamma_0}{M_b} \ln \left| \frac{i}{i_0} \right| - \frac{IR}{M_b}\omega$$

□ 10 — Calculer  $\frac{d\mathcal{H}}{dt}$  et simplifier son expression. Comment peut-on interpréter la fonction  $\mathcal{H}$ ? Déterminer les points du plan  $(i, \omega)$  pour lesquels le gradient de  $\mathcal{H}$  s'annule. Comment s'interprètent ces points?

□ 11 — Décrire la stabilité des équilibres du champ géomagnétique associés à la portion du plan de phase représenté sur la figure 3.

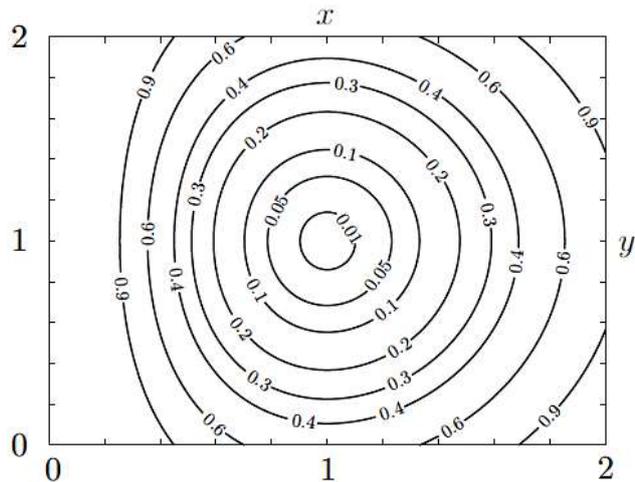


FIGURE 3 – Courbes de valeurs constante définies par la fonction  $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - \ln(x) - y = c$ . Les valeurs de  $c$  sont indiquées sur les courbes.

**FIN du Sujet n°1**



## SUJET n°2

### Problème 1 : Champ électromagnétique dans un condensateur plan cylindrique.

(Extrait de ENSAM 1998)

*Ce problème propose une approche originale, dite itérative, du calcul du champ électromagnétique dans un condensateur, puis compare cette approche avec un calcul direct.*

*La partie D est indépendante des précédentes.*

*On trouvera en fin d'énoncé une annexe comportant des résultats utiles à la résolution du problème.*

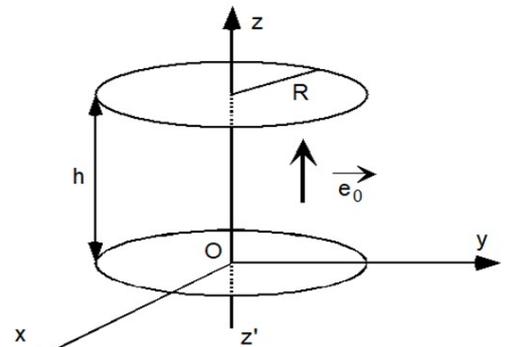
Un condensateur plan est constitué par des armatures métalliques circulaires de rayon  $R$  et de même axe  $\Delta = z' z$ , séparées d'une hauteur  $h$  (Figure 1). Ce condensateur est soumis à une tension alternative de fréquence  $f = \omega/2\pi$ , qui, en première approximation, produit à l'instant  $t$  dans l'espace vide entre les armatures un champ :

$$\vec{E}_0 = \vec{e}_0 \cos \omega t$$

Ce champ est uniforme, sinusoïdal dans le temps et axial (c'est à dire parallèle à l'axe  $\Delta$ ), et on l'écrit en notation complexe :

$$\vec{E}_0 = \vec{e}_0 \exp i \omega t$$

Dans tout le problème, on néglige les effets de bord et on utilise les coordonnées cylindriques d'axe  $\Delta$  (voir annexe).



**Figure 1**

On effectue une approche dans laquelle le champ électrique  $\vec{E}_0$  induit un champ magnétique  $\vec{B}_1$ , lequel engendre un champ électrique  $\vec{E}_2$ , qui crée à son tour un champ magnétique  $\vec{B}_3$ , qui engendre  $\vec{E}_4$ , etc...

#### A Calcul des champs $\vec{B}_1$ et $\vec{E}_2$ .

- A.1 Les variations dans le temps du champ électrique  $\vec{E}_0$  créent un champ magnétique  $\vec{B}_1$ . On veut calculer  $\vec{B}_1$ .
- A.1.a En un point  $M$  entre les plaques, donner l'équation de Maxwell à laquelle satisfait  $\vec{B}_1(M, t)$  en fonction de  $\omega$ ,  $c$  (la vitesse de la lumière dans le vide) et  $\vec{E}_0$ .
- A.1.b On se place dans les coordonnées cylindriques. Montrer que  $\vec{B}_1(M, t)$  est orthoradial (dirigé selon  $\vec{u}_\theta$ ).  
Peut-on prévoir son sens au temps  $t$  ?
- A.1.c En calculant la circulation de  $\vec{B}_1$  le long d'un contour  $C_1$  bien choisi, déterminer l'expression de  $\vec{B}_1(M, t)$  en fonction de  $c$ ,  $X = \frac{\omega \rho}{2c}$  et  $\vec{E}_0$ . Quelle est la dimension de  $X$  ?
- A.2 Les variations dans le temps du champ magnétique  $\vec{B}_1$  créent un champ électrique  $\vec{E}_2$ . On veut calculer  $\vec{E}_2$ .
- A.2.a Quelle relation lie  $\vec{E}_2$  à  $\vec{B}_1$  ? En déduire l'équation satisfaite par  $\vec{E}_2(M, t)$  en fonction de  $c$ ,  $X$ ,  $\omega$  et  $\vec{E}_0$ .
- A.2.b On suppose  $\vec{E}_2$  axial et indépendant de  $z$ . Montrer que cette hypothèse est plausible.
- A.2.c En calculant la circulation de  $\vec{E}_2$  le long d'un contour  $C_2$  bien choisi, déterminer l'expression de  $\vec{E}_2(M, t)$  en fonction de en fonction de  $X$  et  $\vec{E}_0$ . On prendra  $\vec{E}_2(\rho = 0) = \vec{0}$  ; commenter ce choix.

## B Comportement à basse fréquence.

A basse fréquence ( $X \ll 1$ ) on ne garde dans l'expression de chaque champ (électrique, magnétique, ainsi que les grandeurs énergétiques introduites ci-après) que le terme d'ordre le plus bas non nul en  $X$ .

- B.1 Exprimer, dans ces conditions, le champ magnétique total  $\overline{\underline{B}}_{BF}(M, t)$  et le champ électrique total  $\overline{\underline{E}}_{BF}(M, t)$  qui règnent en  $M$  à l'instant  $t$  à l'intérieur du condensateur, en fonction de  $c$ ,  $X$  et  $\underline{E}_0$ . Comment appelle-t-on usuellement cette approximation ?
- B.2 Étude énergétique.
- B.2.a Calculer la densité volumique instantanée  $\varepsilon_e(\rho, t)$  d'énergie électrique et la densité volumique instantanée  $\varepsilon_m(\rho, t)$  d'énergie magnétique dans le condensateur en fonction de  $\varepsilon_0$  (la permittivité du vide),  $X$ ,  $\omega t$  et  $e_0 = |\underline{e}_0|$ .
- B.2.b On note  $\langle e_{e/m} \rangle_t$  les moyennes temporelles correspondantes. Exprimer le rapport  $\frac{\langle \varepsilon_m \rangle_t}{\langle \varepsilon_e \rangle_t}$  en fonction de  $X$ .  
Commenter.
- B.2.c Soit  $\overline{\underline{P}}$  le vecteur de Poynting associé à ce champ électromagnétique. Calculer  $\overline{\underline{P}}$  à l'ordre le plus bas en  $X$ , en fonction de  $\varepsilon_0$ ,  $c$ ,  $X$ ,  $e_0$  et  $\omega t$ .
- B.3.d En déduire que les échanges par rayonnement se limitent à la surface latérale du condensateur. Calculer la puissance instantanée  $\mathcal{P}(t)$  rayonnée depuis l'espace inter-armatures vers l'extérieur du condensateur, puis sa moyenne  $\langle \mathcal{P} \rangle_t$ . Commenter ces expressions en effectuant un bilan énergétique.

## C Comportement à haute fréquence.

A haute fréquence, on ne peut plus négliger les termes en  $X$  de degré plus élevé. On va donc calculer  $\overline{\underline{B}}_3$  dont  $\overline{\underline{E}}_2$  est la source,  $\overline{\underline{E}}_4$  dont  $\overline{\underline{B}}_3$  est la source, etc ...

- C.1 Donner l'orientation de  $\overline{\underline{B}}_3$ . Quelle est l'équation satisfaite par  $\overline{\underline{B}}_3$  ? En procédant comme dans la partie A, déterminer l'expression de  $\overline{\underline{B}}_3(M, t)$  en fonction de  $c$ ,  $X$  et  $\underline{E}_0$ .
- C.2 Déterminer l'expression de  $\overline{\underline{E}}_4(M, t)$ .
- C.3 Déterminer par récurrence les expressions de  $\overline{\underline{E}}_{2n}(M, t)$  et  $\overline{\underline{B}}_{2n+1}(M, t)$  pour tout rang  $n$ .
- C.4 Étude du champ électrique.
- C.4.a Montrer que le champ électrique total  $\overline{\underline{E}}(M, t)$  qui règne à l'intérieur du condensateur s'exprime simplement à l'aide de la fonction de Bessel  $J_0(x)$  (donnée en annexe), où  $x$  est une grandeur adimensionnée que l'on exprimera.
- C.4.b Décrire le champ  $\overline{\underline{E}}(M, t)$  et examiner ses variations en fonction de  $\omega$ . Montrer qu'à la périphérie du condensateur, certaines valeurs de  $\omega$  annulent le champ électrique. Expliquer pourquoi ces fréquences vont jouer un rôle particulier si on ferme le condensateur au niveau de sa surface latérale, par une feuille d'aluminium.

## D Calcul direct du champ électrique total E.

On souhaite maintenant effectuer un calcul direct du champ électrique  $\overline{\underline{E}}$  qui règne entre les armatures.

- D.1 Obtenir l'équation générale de propagation qui relie les dérivées partielles d'un champ électrique.
- D.2 On cherche à cette équation une solution axiale, ayant la symétrie du cylindre (invariance par rotation et par translation selon l'axe de révolution), qu'on écrit en notation complexe :

$$\overline{\underline{E}}(M, t) = E(\rho) \exp(i\omega t) \vec{k}$$

Donner l'équation différentielle du second ordre satisfaite par la fonction scalaire  $E(\rho)$  pour une fréquence donnée.

- D.3 Montrer, par un changement de variable judicieux, que cette équation différentielle peut s'écrire :

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} + 1 \right) E(x) = 0$$

- D.4 Montrer qu'on obtient la même solution que précédemment.

## ANNEXES

### Annexe I : Coordonnées cylindriques et expression des opérateurs différentiels dans les coordonnées cylindriques.

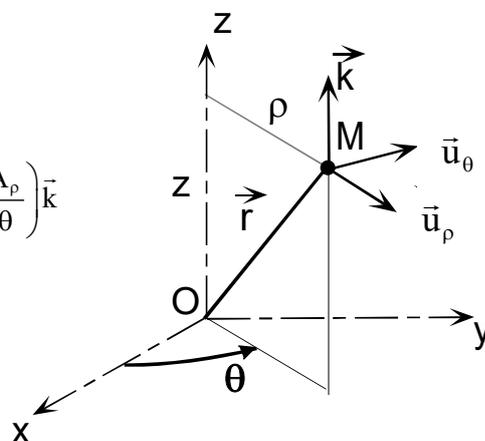
Dans les coordonnées cylindriques, un point M est repéré par le jeu de coordonnées  $\rho, \theta, z$  et la base locale est  $\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{k}$ .

Soit  $\vec{A}$  un champ vectoriel et  $f$  un champ scalaire quelconques ; à condition que  $\rho \neq 0$ , on a :

$$(1) \quad \vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

$$(2) \quad \text{div} \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$(3) \quad \vec{\text{rot}} \vec{A} = \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_\rho + \left( \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\theta) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} \right) \vec{k}$$



Dans le cas particulier d'un champ scalaire à symétrie cylindrique, le laplacien se réduit à :

$$(4) \quad \Delta f(\rho) = \frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{df}{d\rho}$$

### Annexe II : Les fonctions de Bessel.

Les fonctions de Bessel  $J_\nu(z)$  sont des solutions de l'équation différentielle :

$$(5) \quad \frac{d^2 J_\nu(z)}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dJ_\nu(z)}{dz} + \left( 1 - \frac{\nu^2}{z^2} \right) J_\nu(z) = 0 \quad \nu \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}$$

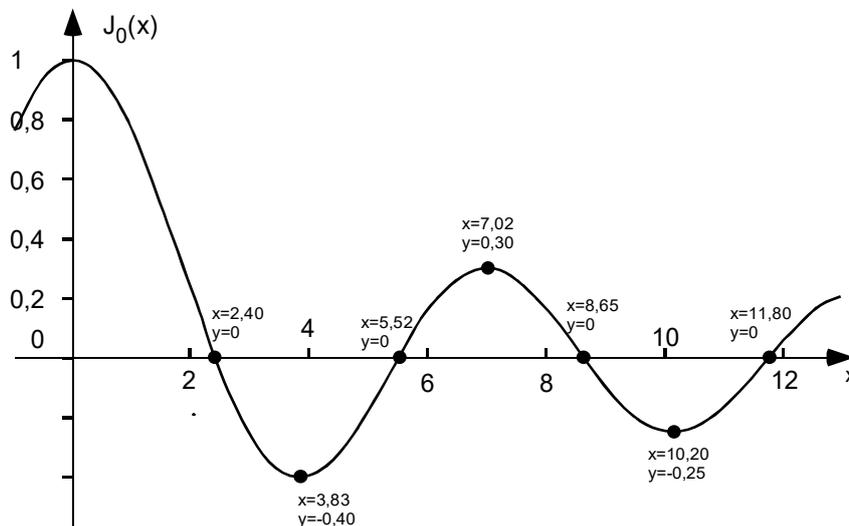
Les fonctions de Bessel de première espèce (qui sont définies en 0) sont également définies par la série :

$$(6) \quad J_\nu(z) = \left( \frac{z}{2} \right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu+k+1)} \left( \frac{z}{2} \right)^{2k} \right) \quad |\arg z| < \pi \quad \text{où } \Gamma \text{ est la fonction qui généralise la fonction factorielle.}$$

Dans le cas particulier  $\nu=0$ , nous avons :

$$(7) \quad J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left( \frac{z}{2} \right)^{2k}$$

Pour  $x$  réel, le graphe de la fonction  $J_0(x)$  est, pour sa partie  $x > 0$ , le suivant :



## Problème 2 : Propulseur électromagnétique (Extrait de XMP 2000)

L'objet de ce problème est l'analyse d'un propulseur électromagnétique capable d'accélérer de petites masses de l'ordre du gramme et de les éjecter à des vitesses supersoniques de l'ordre de plusieurs kilomètres par seconde. Dans la première partie, on en étudie le principe et on évalue les ordres de grandeur des paramètres cruciaux. La poussée sur le projectile est en fait exercée par un plasma ; ses propriétés et son action sont analysées dans la seconde partie. Enfin, la troisième et dernière partie est consacrée à une étude dynamique sur un modèle électromécanique du système.

Les trois parties sont largement indépendantes. Dans tout le problème, on se placera dans l'approximation des régimes quasi-permanents (A.R.Q.P.) .

### Données numériques

Résistivité du rail (cuivre)	$\rho_{Cu} = 1,72 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$
Longueur du rail	$X = 3 \text{ m}$
Distance entre les deux rails	$w = 0,013 \text{ m}$
Hauteur effective des rails	$h = 0,040 \text{ m}$
Résistance du rail par unité de longueur	$R' \simeq 850 \mu\Omega \text{ m}^{-1}$
Intensité initiale	$I_0 = 300 \text{ kA}$
Inductance du circuit de stockage	$L_0 = 22 \mu\text{H}$
Résistance du circuit de stockage	$R_0 = 160 \mu\Omega$
Résistance du plasma	$R_p \simeq 500 \mu\Omega$
Conductivité électrique moyenne du plasma	$\sigma_p \simeq 11,0 \times 10^3 \text{ S m}^{-1}$
Masse du plasma	$M_p \simeq 0,1 \times 10^{-3} \text{ kg}$
Masse du projectile	$M_0 = 2,9 \times 10^{-3} \text{ kg}$
Masse molaire du cuivre	$M_{Cu} = 63,5 \times 10^{-3} \text{ kg}$
Constante des gaz parfaits	$R = 8,31 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$
Perméabilité magnétique du vide (et du plasma)	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$
Constante d'Avogadro	$N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

### Première partie Principe et ordres de grandeur

**A** – Un circuit électrique rigide est caractérisé par sa résistance  $R$  et son inductance  $L$ . Soit  $I(t)$  l'intensité du courant qui le parcourt.

1. Exprimer le flux magnétique  $\Phi$  propre à travers le circuit. En déduire la force électromotrice d'autoinduction.

2. Lors de l'établissement du courant de 0 à  $I(t)$ , le générateur doit fournir, en plus de l'énergie « dissipée » par effet Joule, une énergie supplémentaire  $E_m$  appelée « énergie magnétique ». Exprimer  $E_m$  en fonction de  $L$  et de  $I(t)$ .

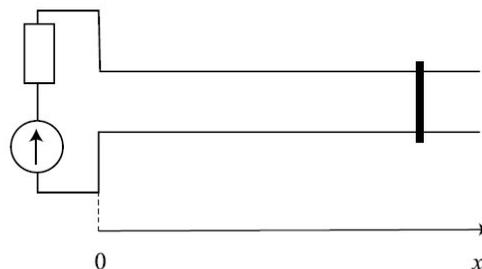


Figure 1

**B** – Le circuit possède maintenant une partie mobile constituée d'un barreau pouvant glisser sans frottement le long de deux rails parallèles de direction  $Ox$  (fig.1). On désignera par  $x$  son déplacement et par  $\dot{x}$  sa vitesse. L'inductance du circuit dépend alors de  $x$ , soit  $L(x)$ .

1. Lorsqu'un courant électrique parcourt le circuit, le barreau se met en mouvement. Expliquer brièvement pourquoi.

2. Exprimer à l'instant  $t$  la puissance fournie par le générateur en sus de celle dissipée par effet Joule.

3. Une partie de cette puissance correspond à la variation de l'énergie magnétique  $dE_m/dt$  où  $E_m$  est donnée par l'expression trouvée en **A-2**; l'autre partie est la puissance mécanique  $P_{méca}$  donnée au barreau. Exprimer  $P_{méca}$  en fonction de  $I(t)$ ,  $dL/dx$  et  $\dot{x}$ .

4. En déduire que la force qui s'exerce sur la barreau a pour expression :  $F = \frac{1}{2} I^2 \frac{dL}{dx}$ .

**C** – On désire évaluer un ordre de grandeur de l'inductance par unité de longueur des rails  $L' = dL/dx$ .

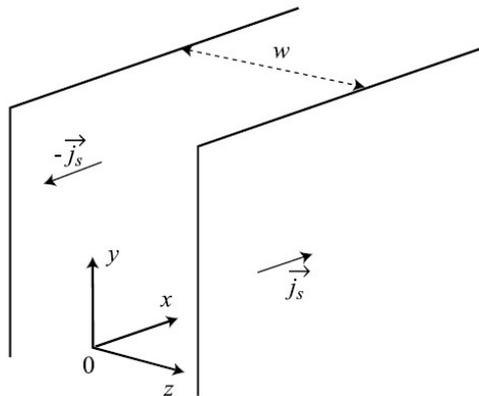


Figure 2

1. On considère d'abord deux plans conducteurs infinis, parallèles au plan  $xOy$  et espacés de  $w$  (fig.2). Ils portent chacun une densité surfacique de courant uniforme,  $j_s \vec{e}_x$  pour le plan  $z = w/2$  et  $-j_s \vec{e}_x$  pour l'autre en  $z = -w/2$ .

a) Montrer par un argument de symétrie clairement explicité qu'en tout point le champ magnétique créé par cette distribution de courant est dirigé selon  $Oy$ .

b) Montrer que ce champ est uniforme dans chaque région délimitée par les plaques, nul à l'extérieur, et donner alors son expression entre les plaques en fonction de  $j_s$ .

2. Les rails sont modélisés comme deux conducteurs plans et minces de hauteur  $h$  finie selon  $Oy$ , ils sont parcourus chacun par l'intensité  $I$ .

a) Calculer la densité surfacique de courant  $j_s$  associée. En faisant l'approximation que les expressions obtenues en **C-1** sont valables, déterminer le flux magnétique par unité de longueur selon  $Ox$  entre les plaques en fonction de  $I$ ,  $w$  et  $h$ . En déduire l'inductance par unité de longueur  $L'$ .

b) *Application numérique* : calculer  $L'$  avec les données rassemblées au début du problème.

**D** – On désire qu'en partant avec une vitesse nulle, une masse de trois grammes atteigne une vitesse d'éjection de 6 km/s après un parcours de 3 m. En supposant la force  $F$  de la question **B-4** constante et en prenant la valeur de  $L'$  obtenue en **C-2.b**), déterminer numériquement l'intensité  $I$  nécessaire.

## Deuxième partie Accélération du projectile par un plasma

En réalité, dans le propulseur électromagnétique, le projectile (un morceau de résine isolante) porte sur sa face arrière de minces feuilles de cuivre, qui fondent rapidement et se vaporisent lorsque elles sont traversées par un courant de très forte intensité; on est alors en présence d'un plasma (gaz ionisé conducteur, localement neutre). La température de ce plasma est suffisamment élevée pour que tous les atomes de cuivre soient ionisés ( $\text{Cu} \rightarrow \text{Cu}^+ + e^-$ ). Dans cette partie, on suppose qu'un régime permanent s'est établi, c'est à dire que la longueur  $l$  selon  $Ox$  du plasma reste constante et que les accélérations de chacune de ses parties sont identiques à l'accélération  $a$  du projectile (voir figure 3).

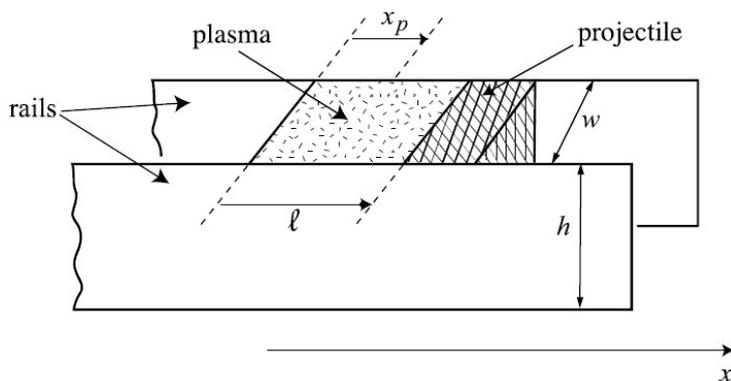


Figure 3

On note  $x_p$  l'abscisse relative d'un point au sein du plasma ( $0 \leq x_p \leq l$ ) et l'on suppose que toutes les grandeurs ne dépendent localement que de  $x_p$ . On note  $P(x_p)$  et  $\rho(x_p)$  la pression et la masse volumique au sein du plasma à l'abscisse  $x_p$ . On admet enfin que tous les effets de bord sont négligeables, ce qui conduit à poser qu'au sein du plasma, le champ magnétique, le champ électrique et la densité volumique de courant sont respectivement de la forme  $\vec{B} = B(x_p)\vec{e}_y$ ,  $\vec{E} = E(x_p)\vec{e}_z$  et  $\vec{J} = J(x_p)\vec{e}_z$ .

**A** – On considère une tranche de plasma, d'épaisseur  $dx_p$ , localisée à l'abscisse  $x_p$ .

1. Quelle est la force d'origine magnétique qui s'exerce sur cette tranche? Comment est-elle orientée?

2. Quelle est la résultante des forces de pression qui s'exercent sur la tranche?

(On pourra montrer que la résultante des forces pressantes s'exerçant sur la tranche est

$$\vec{dF}_p = -\frac{dP}{dx_p} wh dx_p \vec{e}_x)$$

3. Ecrire en projection sur  $Ox$  le théorème de la résultante cinétique pour la tranche.

4. La pression en  $x_p = 0$  est la pression atmosphérique  $P_0$ .

a) En déduire sous forme intégrale la pression à l'extrémité du plasma en  $x_p = l$ .

b) Montrer que, sans autre hypothèse,

$$(M_p + M_0)a = -S \int_0^l J(x_p)B(x_p)dx_p$$

où  $M_p$  est la masse du plasma,  $M_0$  la masse du projectile et  $S = wh$  la section transverse du propulseur.

**B – 1.** Quelle est dans l'A.R.Q.P. la relation entre le champ magnétique et la densité volumique de courant ?

**2.** En déduire que la force résultante exercée sur le système plasma-projectile est  $S \frac{B(0)^2}{2\mu_0}$ , en prenant le champ magnétique nul au niveau du projectile.

**3.** Montrer qu'on retrouve un résultat identique à celui de la question **B-4** de la première partie, dans le cadre de la modélisation utilisée dans la section **C** de cette partie.

**Problème 3 : Modèle autodynamo du champ géomagnétique** (*extrait de Mines MP 2019*)

**Voir la partie 3 du sujet n°1**

—

**FIN du Sujet n°2**