

DEVOIR MAISON n°6

Correction

Problème 1 : Etude d'une lunette astronomique

Partie 1

Le système centré (S), d'axe Ox, est constitué de deux lentilles minces (L₁) et (L₂). La position d'un point A sur l'axe optique est repérée par $x = \overline{F_1 A}$, celle de son image par (S), A' sur l'axe, est repérée par $x' = \overline{F'_2 A'}$:

$$A \xrightarrow{S} A' \text{ soit } A \xrightarrow{L_1} A_1 \xrightarrow{L_2} A'.$$

1-a- On applique les relations de conjugaison de Newton aux couples de points

$$* (A, A_1) \text{ conjugués par } L_1 : \overline{F_1 A} \cdot \overline{F'_1 A_1} = -f_1'^2 \quad \text{soit} \quad \overline{x} \cdot \overline{F'_1 A_1} = -f_1'^2$$

$$* (A_1, A') \text{ conjugués par } L_2 : \overline{F_2 A_1} \cdot \overline{F'_2 A'} = -f_2'^2 \quad \text{soit} \quad \overline{F_2 A_1} \cdot x' = -f_2'^2$$

Avec $\overline{F_2 A_1} = \overline{F_2 F'_1} + \overline{F'_1 A_1} = -\Delta + \overline{F'_1 A_1}$ Il suffit de remplacer dans cette relation les expressions de $\overline{F'_1 A_1}$ et $\overline{F_2 A_1}$ par celles données précédemment : $-\frac{f_2'^2}{x'} = -\Delta - \frac{f_1'^2}{x}$ Soit la relation demandée

$$\boxed{\frac{f_2'^2}{x'} - \frac{f_1'^2}{x} = \Delta} \quad (1)$$

1-b- Si $x = 0$, alors $A = F_1$, son image A_1 par L_1 est à l'infini et l'image de A_1 par L_2 , donc de F_1 par le doublet est en F'_2 foyer objet de L_2 : $\boxed{x' = 0}$ $x' = 0$.

1-c- $AB \xrightarrow{L_1} A_1 B_1 \xrightarrow{L_2} A' B'$ A, A_1 et A' appartenant à l'axe optique et les objets AB donc $A_1 B_1$ et $A' B'$ sont perpendiculaires à l'axe optique (aplanétisme des lentilles dans les conditions de Gauss).

$$\gamma_T = \frac{\overline{A' B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A' B'}}{\overline{A_1 B_1}} \cdot \frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{AB}} = \gamma_{L_2} \cdot \gamma_{L_1} = \frac{\overline{F_2' A'}}{\overline{F_2' O_2}} \cdot \frac{\overline{F_1 O}}{\overline{F_1 A}} = \frac{x'}{-f_2'} \cdot \frac{f_1}{x} = -\frac{x'}{x} \cdot \frac{f_1}{f_2'}$$

en utilisant les relations de grandissement de Newton pour γ_{L_1} et γ_{L_2}

Grandissement transversal du doublet $\boxed{\gamma_T = -\frac{x'}{x} \cdot \frac{f_1}{f_2'}} \quad (2)$

2- Les points principaux H et H' sont les points conjugués par S tels que le grandissement transversal soit égal à 1.

2-a- D'après 2 $x_{H'}$ et x_H vérifient : $-\frac{x_{H'}}{x_H} \cdot \frac{f_1}{f_2'} = 1$ soit $\frac{x_{H'}}{x_H} = -\frac{f_2'}{f_1}$: $\frac{1}{x_H} = -\frac{1}{x_{H'}} \cdot \frac{f_2'}{f_1} \quad (3)$

H et H' sont conjugués par S, leur abscisse vérifie (1) : $\frac{f_2'^2}{x_{H'}} - \frac{f_1'^2}{x_H} = \Delta$

(1) et (3) conduisent à $\frac{f_2'^2}{x_{H'}} + \frac{f_1'^2}{x_{H'}} \cdot \frac{f_2'}{f_1} = \Delta$ soit $\frac{f_2' \cdot (f_2' + f_1')}{x_{H'}} = \Delta$ $\boxed{x_{H'} = \frac{f_2' \cdot (f_2' + f_1')}{\Delta}}$

(3) donne x_H $\boxed{x_H = -\frac{f_1' \cdot (f_2' + f_1')}{\Delta}}$

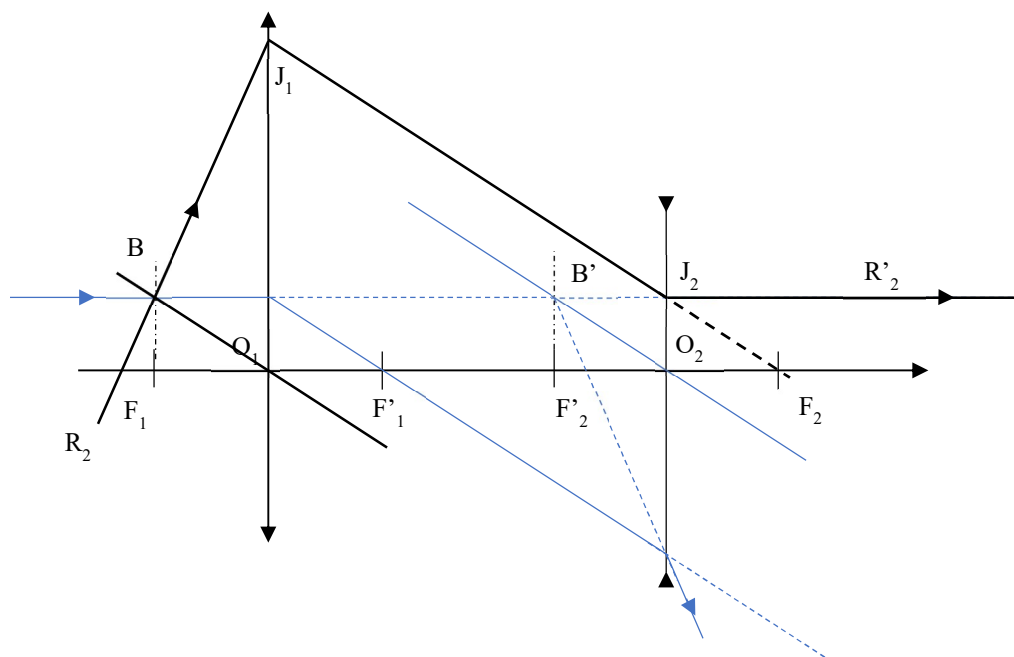
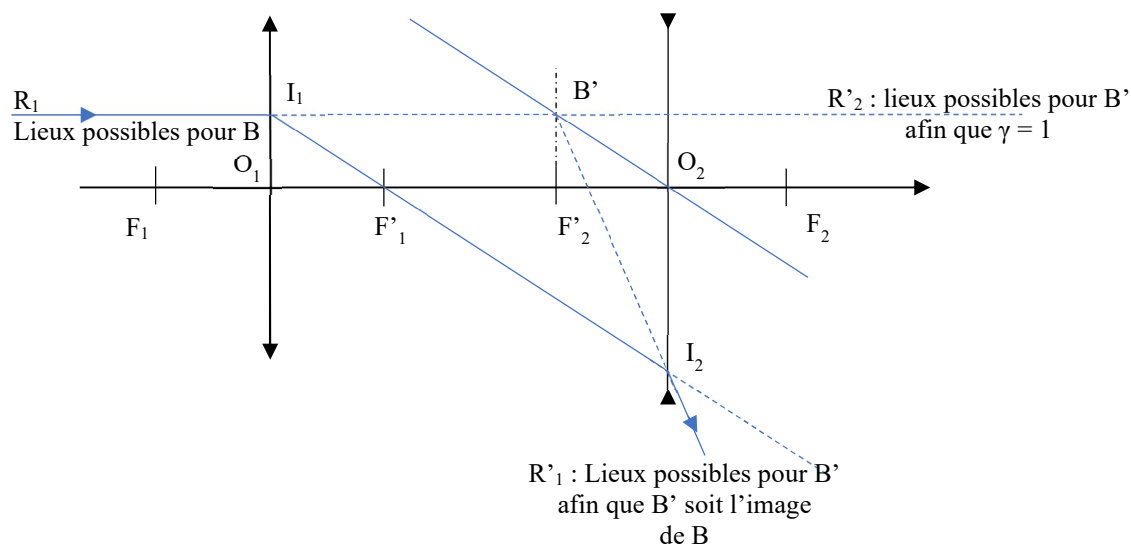
2-b- Voir schéma ci-dessous

Soit un objet AB de dimension donnée, un incident particulier est le rayon $R_1 = BI_1$ parallèle à l'axe optique. L'image B' par le doublet doit être à l'intersection de l'émergent du doublet associé à R_1 et de

R'_2 parallèle à l'axe à la même distance de l'axe que R_1 (grandissement = 1). BI_1 , après déviation par L_1 donne $I_1F'_1I_2$ et l'émergent de L_2 associé, R'_1 , passe par l'intersection du rayon non dévié passant par O_2 et parallèle à I_1I_2 avec le plan focal image de L_2 : B' est à l'intersection de R'_1 et R'_2 . H' est le projeté orthogonal de B' sur l'axe optique.

De même B est à l'intersection de R_1 et de l'incident associé à R'_2 : R_2 . A R'_2 correspond l'incident sur L_2 , J_1J_2 passant par F_2 et l'incident sur L_1 , R_2 , passe par J_1 et l'intersection du plan focal objet de L_1 avec le rayon parallèle à J_1J_2 passant par O_1 . $B =$ intersection de R_1 et R_2 . H est le projeté orthogonal de B sur l'axe optique.

On constate sur la figure réalisée que, dans le cas particulier étudié, H est confondu avec F_1 et H' avec F'_2 . Vérification par le calcul : $f'_2 = -f'_1$: $x_H = 0$: $H = F_1$ et $x_{H'} = 0$: $H' = F'_2$.



3-a- Par définition le foyer objet F du doublet admet par celui-ci une image à l'infini sur l'axe

$$F \xrightarrow{s} A'\infty \quad \overline{F'_2 A'} = x' \rightarrow \infty \quad \frac{1}{x'} \rightarrow 0 \quad (1) \text{ conduit à } x_F = \overline{F_1 F} = -\frac{f_1'^2}{\Delta}$$

Remarque : $F \xrightarrow{L_1} A_1 = F_2 \xrightarrow{L_2} A'\infty$. A_1 doit donc être confondu avec F_2 , foyer objet de L_2 .

F et F₂ sont conjugués par L₁ : $\overline{F_1 F_2} = -f_1'^2$

$$x_F = \overline{F_1 F} = -\frac{f_1'^2}{\Delta}$$

De même, par définition le foyer image F' du doublet est l'image par celui-ci du point A à l'infini sur

l'axe $A\infty \xrightarrow{s} F' \quad \overline{F_1 A} = x \rightarrow \infty \quad \frac{1}{x} \rightarrow 0 \quad (1) \text{ conduit à } \boxed{x_{F'} = \overline{F_2' F'} = \frac{f_2'^2}{\Delta}}$

Remarque $A\infty \xrightarrow{L_1} A_1 = F_1' \xrightarrow{L_2} F'$. A₁ doit donc être confondu avec F₁', foyer image de L₁.

F₁' et F' sont conjugués par L₂ : $\overline{F_2 F_1'} \cdot \overline{F_2' F'} = -f_2'^2 \quad x_{F'} = \overline{F_2' F'} = \frac{f_2'^2}{\Delta}$

3-b- $f = \overline{HF} = x_F - x_H = -\frac{f_1'^2}{\Delta} + \frac{f_1' \cdot (f_1' + f_2')}{\Delta} = \frac{f_1' f_2'}{\Delta}$

De même $f' = \overline{H'F'} = x_{F'} - x_{H'} = \frac{f_2'^2}{\Delta} - \frac{f_2' \cdot (f_1' + f_2')}{\Delta} = -\frac{f_1' f_2'}{\Delta}$

On remarque que $\overline{H'F'} = -\overline{HF}$ soit $f = -f'$

3-c- La vergence de S est définie par $C = \frac{1}{f'} = -\frac{\Delta}{f_1' \cdot f_2'} = -\frac{\overline{F_1' F_2}}{f_1' \cdot f_2'} = -\frac{-f_1' + e - f_2'}{f_1' \cdot f_2'} = \frac{1}{f_2'} - \frac{e}{f_1' \cdot f_2'} + \frac{1}{f_1'}$

Soit $\boxed{C = C_1 + C_2 - e \cdot C_1 \cdot C_2}$.

Dans le cas de lentille accolées, $e = 0$, on retrouve $\boxed{C = C_1 + C_2}$.

Partie II- Lunette astronomique - Longue vue

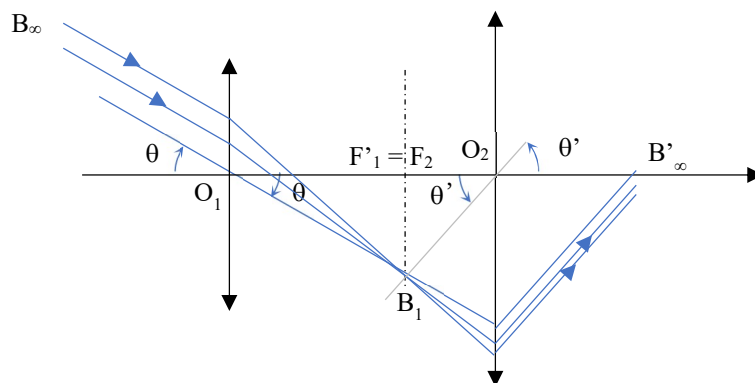
1- La lunette est afocale (donne d'un objet à l'infini une image à l'infini pour pouvoir être observée sans "fatigue " par un œil "normal") : $A\infty \xrightarrow{L_1} A_1 = F_1' = F_2 \xrightarrow{L_2} A'\infty$

1-a- Les foyers image F₁' de L₁ et objet F₂ de L₂ doivent être confondus : $\boxed{\Delta = 0}$.

1-b- La relation (1) établie en I devient : $\frac{f_2'^2}{x'} - \frac{f_1'^2}{x} = 0$ soit $\boxed{\frac{x'}{x} = \frac{f_2'^2}{f_1'^2}}$

1-c- D'après la relation (2), le grandissement devient $\boxed{\gamma_T = -\frac{x'}{x} \cdot \frac{f_1'}{f_2'} = -\frac{f_2'}{f_1'} = \text{constante}}$

1-d-i- Voir courbe 2 ci-dessous



1-d-ii- En utilisant la courbe tracée : $\tan(\theta) = \frac{\overline{F'_1 B_1}}{\overline{O_1 F'_1}}$ et conditions de Gauss : $\theta \approx \tan(\theta)$

$$\tan(\theta') = \frac{\overline{F'_1 B_1}}{\overline{O_2 F'_1}} = \frac{\overline{F'_1 B_1}}{\overline{O_2 F_2}} \quad \theta' \approx \tan(\theta')$$

Soit $G = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{\overline{O_1 F'_1}}{\overline{O_2 F_2}} = -\frac{f'_1}{f'_2}$

On retrouve la relation pour le doublet afocal : $G \cdot \gamma_T = 1$

1-d-iii- La Lune sera donc vue à travers la lunette sous l'angle $\alpha' = G \cdot \alpha$ avec $G = -40$ soit $\alpha' = -20,7^\circ$. L'image sera renversée.

II- Longue vue $A \infty \xrightarrow{L_v} A'$ $A \infty \xrightarrow{L_1} A_1 = F'_1 \xrightarrow{L_v} A_2 \xrightarrow{L_2} A'$

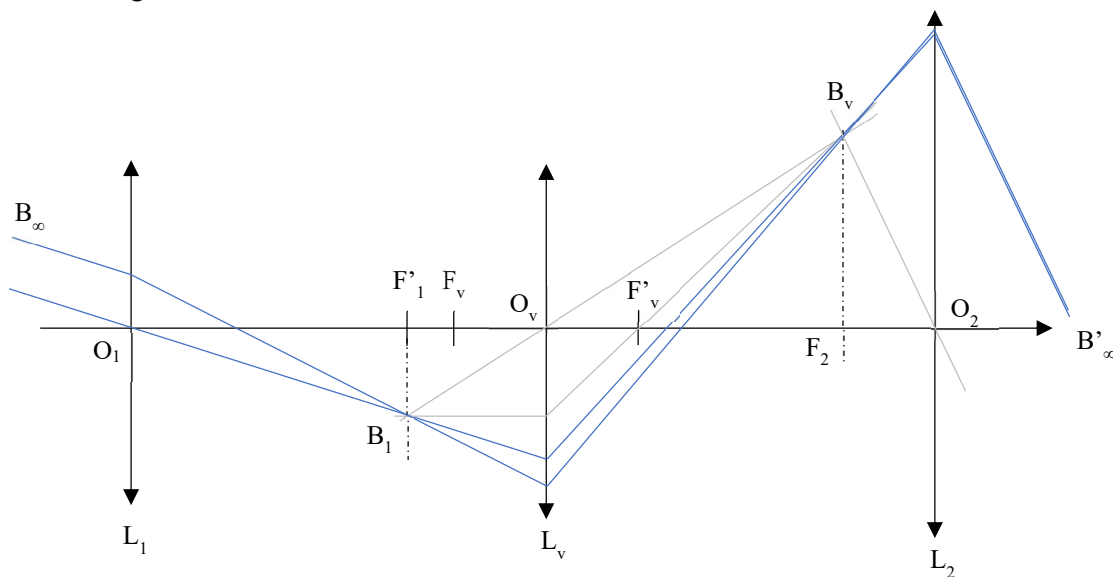
1- Pour être observée sans fatigue, l'image A' de A à l'infini doit être à l'infini. La longue vue doit être afocale. L'image de A à l'infini par L_1 est F'_1 , pour que l'image par L_2 de A_2 soit à l'infini A_2 doit être en F_2 , foyer objet de L_2 . F'_1 et F_2 doivent donc être conjugués par L_v .

Relation de conjugaison de Descartes : $\frac{1}{\overline{O_v F_2}} - \frac{1}{\overline{O_v F'_1}} = \frac{1}{f'_v}$ avec $\overline{O_v F'_1} = -d = -\frac{3}{2} \cdot f'_v$

soit $\frac{1}{\overline{O_v F_2}} = \frac{1}{\overline{O_v F'_1}} + \frac{1}{f'_v} = -\frac{2}{3 \cdot f'_v} + \frac{1}{f'_v} = \frac{1}{3 \cdot f'_v}$ $\overline{O_v F_2} = 3 \cdot f'_v$

$$\overline{O_1 O_2} = \overline{O_1 F'_1} + \overline{F'_1 O_v} + \overline{O_v F_2} + \overline{F_2 O_2} = f'_1 + \frac{3}{2} f'_v + 3 \cdot f'_v + f'_2$$

2-a- Voir figure 3



$$B_\infty \xrightarrow{L_1} B_1 \xrightarrow{L_v} B_v \xrightarrow{L_2} A'$$

dans le pfi L_1 dans le pfo de L_2

On construit successivement B_1 puis son image par L_v : B_v . B_v se trouve nécessairement dans le plan focal objet de L_2 . F_2 est donc le projeté orthogonal de B_v sur l'axe optique.

2-b- D'après la figure 3 : $\tan(\theta) = \frac{\overline{F'_1 B_1}}{\overline{O_1 F'_1}} = \frac{\overline{F'_1 B_1}}{f'_1} \approx \theta$ conditions de Gauss

$$\tan(\theta') = \frac{\overline{F_2 B_2}}{\overline{O_2 F_2}} = -\frac{\overline{F_2 B_2}}{f'_2} \approx \theta'$$

$$G' = \frac{\theta'}{\theta} = -\frac{f'_1}{f'_2} \frac{\overline{F_2 B_2}}{\overline{F'_1 B_1}} = G \cdot \gamma_{Lv} \quad \text{avec} \quad \gamma_{Lv} = \frac{\overline{F_2 B_2}}{\overline{F'_1 B_1}} = \frac{\overline{O_v F_2}}{\overline{O_v F'_1}} = \frac{3f'_v}{-3.f'_v/2} = -2 \quad \boxed{G' = -2.G = +80}$$

L'image de la lune sera droite et vue sous un diamètre angulaire 2 fois plus grand.

2-c- L'encombrement de la lunette étant $\left(\overline{O_1 O_2}\right)_{Lu} = f'_1 + f'_2 = 123 \text{ cm}$

$$\text{celui de la longue vue} \left(\overline{O_1 O_2}\right)_{LV} = f'_1 + \frac{3}{2}f'_v + 3.f'_v + f'_2$$

$$\text{L'encombrement augmente de} \quad \boxed{\frac{9}{2}.f'_v = 8,1 \text{ cm}}$$