

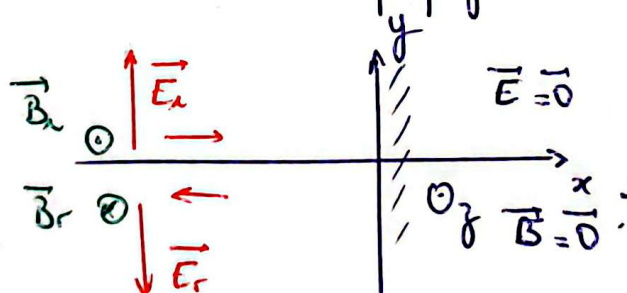
Pression de radiation - Correction

1. Maxwell - Faraday : $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Soit en complexe : $-ik \vec{u}_x \wedge \epsilon_0 \vec{u}_y = -i\omega \vec{B}_x$

$$\begin{aligned} \vec{B}_x &= \frac{k}{\omega} \epsilon_0 \vec{u}_y = \frac{\epsilon_0}{c} \vec{u}_y \\ \vec{B}_x(t) &= \frac{\epsilon_0}{c} e^{i(\omega t - kx)} \vec{u}_y \end{aligned}$$

2. L'onde incidente se propage dans le sens des x croissants



Continuité de la composante tangentielle de $\vec{E}$ à la traversée de la surface en $x=0$

$$E_{\text{tot}}(x=0^-) = E_{\text{tot}}(x=0^+) \rightarrow 0$$

$$E_{iy}(x=0^-) + E_{r_{\text{tan}}}(x=0^-)$$

(superposition du champ incident et du champ réfléchi)

$$\vec{E}_{\text{tan}} = -\vec{E}_i(x=0) = -E_0 \exp(i\omega t) \vec{u}_y$$

Donc $\vec{E}_n = -E_0 \exp(i\omega t + kx) \vec{u}_y + \underbrace{E_{0x} \exp(i\omega t + kx) \vec{u}_x}_{\substack{\text{la condition de propagation} \\ \text{ne donne pas d'indication} \\ \text{sur la composante normale} \\ \text{(qui peut être déterminée)}}}$

↑
propagation
dans le sens
des x croissants

Mais ici $\text{div}(\vec{E}_n + \vec{E}_r) = \text{div} \vec{E}_r = 0$

Donc $E_{0x}(ik) = 0$ et $E_{0x} = 0$

Ainsi $\vec{E}_r = -E_0 \exp(i\omega t + kx) \vec{u}_y$

Rq : on aurait pu a priori envisager une onde
se propageant dans une direction différente
c'est $\vec{k}_{\text{affiché}} = k \vec{u}$ avec $k = \frac{\omega}{c}$
et $\vec{u}$ quelconque.

On justifie proprement (k_{tan} est nécessairement conservé)
que $\vec{k}_{\text{affiché}} = -k \vec{u}_n$

2b $\vec{\text{rot}}(\vec{E}_i + \vec{E}_r) = -\frac{\partial(\vec{B}_i + \vec{B}_r)}{\partial t}$

Mais on a imposé $\vec{\text{rot}} \vec{E}_i = -\frac{\partial \vec{B}_i}{\partial t}$

Donc $\vec{\text{rot}} \vec{E}_r = -\frac{\partial \vec{B}_r}{\partial t}$

En complexes on obtient: $+ik\vec{u}_z \wedge (-E_0\vec{u}_y) = -i\omega\vec{B}$

$$\begin{aligned}\vec{B}_m &= \frac{k}{\omega} E_0 \vec{u}_z \\ \vec{B}(t) &= \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t + kz)} \vec{u}_y.\end{aligned}$$

2c Champs résultants (états)

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_i + \vec{E}_r \\ &= E_0 \left(e^{i(\omega t - kz)} - e^{i(\omega t + kz)} \right) \vec{u}_y \\ &= E_0 e^{i\omega t} \underbrace{\left(e^{-ikz} - e^{ikz} \right)}_{-2i \sin kz} \vec{u}_y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -2i \sin kz E_0 e^{i\omega t} \vec{u}_y \\ \vec{E}(t) &= 2E_0 \sin kz \sin \omega t \vec{u}_y.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{B}_i + \vec{B}_r \\ &= 2 \frac{E_0}{c} e^{i\omega t} \cos kz \vec{u}_z \\ \vec{B}(t) &= 2 \frac{E_0}{c} \cos kz \cos \omega t \vec{u}_z.\end{aligned}$$

2a. Densité moyenne d'énergie

$$\begin{aligned}
 \langle u \rangle &= \left\langle \frac{1}{L} \epsilon E^2 \right\rangle + \left\langle \frac{1}{L} \frac{B^2}{\mu_0} \right\rangle \\
 &= \frac{1}{L} \epsilon 4 E_0^2 \sin^2 k z \langle \sin^2 \omega t \rangle \cdot 1/2 \\
 &\quad + \frac{1}{L \mu_0} 4 \frac{E_0^2}{c^2} \cos^2 k z \langle \cos^2 \omega t \rangle \cdot 1/2 \\
 &\quad \text{avec } \frac{1}{\mu_0 c^2} = \epsilon_0
 \end{aligned}$$

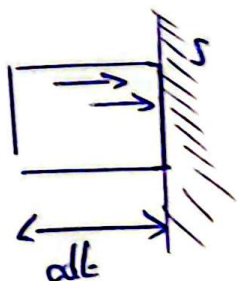
$$\underline{\langle u \rangle = \epsilon E_0^2}$$

Nombre moyenne de photons par unité de volume $n = \frac{\epsilon E_0^2}{h \nu}$

Nombre moyenne de photons par unité de volume associée à l'onde incidente : $n_0 = \frac{n}{2}$
 (moitié des photons $\rightarrow$ et l'autre moitié $\leftarrow$)

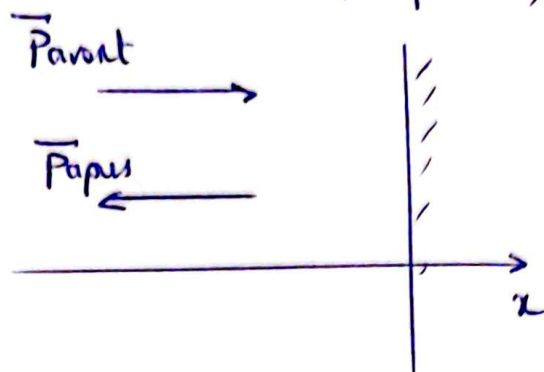
3- Les photons heurtent S pendant dt sont :

- * les photons se dirigeant vers S (associés à l'onde incidente)
- * les photons situés à t à moins de $c dt$ (donc ds le cylindre de volume $S c dt$)



$$dN_{\text{photons heurtant S}} = n_0 S c dt$$

Variation de quantité de mouvement d'un photon
sur d'une chose (réflexion)



$$\vec{p}_{\text{inc}} = + \frac{h\nu}{c} \vec{u}_x$$

$$\vec{p}_{\text{ref}} = - \frac{h\nu}{c} \vec{u}_x$$

$$\Delta \vec{p}_{\text{photon}} = - 2 \frac{h\nu}{c} \vec{u}_x$$

L'ensemble des photons heurtant S pendant dt ont une quantité de mouvement variant de

$$\begin{aligned} d\vec{p}_{\text{tous photons}} &= dN \Delta \vec{p}_{\text{photon}} \\ &= - 2 \frac{h\nu}{c} n_0 S c dt \vec{u}_x \end{aligned}$$

Cette quantité de mouvement est échangée avec le miroir

$$d\vec{p}_{\text{miroir}} = + 2 h\nu n_0 S dt \vec{u}_x$$

Le miroir subit donc une force

$$\vec{F}_{\text{photon-miroir}} = \frac{d\vec{p}_{\text{miroir}}}{dt} = + 2 h\nu n_0 S \vec{u}_x$$

Soit une pression de radiation

$$P = 2 n_0 h\nu = \langle u \rangle = \epsilon E_0^2$$

4a

$$\text{div } \vec{E} = 0$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \vec{E}) &= \underbrace{\vec{\text{grad}} (\text{div } \vec{E})}_0 - \Delta \vec{E} \\ &= - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\text{rot}} \vec{B}) \\ &= - \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

$$\Delta \vec{E} = + \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

De la forme demandée $A = \epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$

$$B = \mu_0 \gamma$$

Dans le cadre d'une évolution sinusoidal de pulsation ω .

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} &= \mu_0 (i\gamma\omega - \epsilon_0 \omega^2) \vec{E} \\ &\approx i\mu_0 \gamma\omega \vec{E} \quad \text{dans l'approximation } \gamma \gg \epsilon_0 \omega \end{aligned}$$

la relation proprement dite

$$-K^2 = i\mu_0 \gamma\omega = -e^{-i\frac{\pi}{4}} \mu_0 \gamma\omega$$

$$\text{Soit } K = \pm e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\mu_0 \gamma\omega} = \pm \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma\omega}{2}} (1-i)$$

On obtient donc 2 solutions possibles.

$$\vec{E} = \underbrace{E_{10} e^{-\alpha x} e^{i(\omega t - \alpha x)}}_{\text{Onde se propageant en s'alternant dans le sens } \rightarrow} \vec{u}_y + \underbrace{E_{20} e^{\alpha x} e^{i(\omega t + \alpha x)}}_{\text{Onde se propageant dans le sens } \leftarrow \text{ (en s'alternant)}}$$

Total.

$\vec{E}_i \rightarrow$

$\vec{E}_t \rightarrow$

On remarque que l'onde $\rightarrow$
(pas de source du côté $x > 0$)

On remarque $\vec{E} = E_0 e^{-\alpha x} e^{i(\omega t - \alpha x)} \vec{u}_y$

Soit $K = +\alpha(1-i)$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} =$$

$$-iK \vec{u}_x \wedge \vec{E} = -i\omega \vec{B}$$

$$\vec{B} = \frac{v}{\omega c} (1-i) E_0 e^{i(\omega t - Kx)} \vec{u}_z$$

4c - On est ici dans le cadre d'une modification volumique. Les champs sont donc continus en $x=0$.

$$x < 0 \quad \begin{aligned} \vec{E}_i &= E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{u}_y \\ \vec{E}_r &= E_r e^{i(\omega t + kx)} \vec{u}_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{B}_i &= \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - kx)} \vec{u}_z \\ \vec{B}_r &= -\frac{E_r}{c} e^{i(\omega t + kx)} \vec{u}_z \end{aligned}$$

$$x > 0 \quad \begin{aligned} \vec{E}_t &= E_t e^{-\alpha x} e^{i(\omega t - \alpha x)} \vec{u}_y \\ \vec{B}_t &= \frac{\alpha}{\omega} (1-i) E_t e^{i(\omega t - \alpha x)} \vec{u}_z \end{aligned}$$

Continuité en $x=0$

$$\begin{cases} E_0 + E_r = E_t \\ \frac{E_0}{c} - \frac{E_r}{c} = \frac{\alpha}{\omega} (1-i) E_t \end{cases}$$

Donc $2E_0 = \left(1 + \frac{\alpha c}{\omega} (1-i)\right) E_t$

$$\begin{aligned} E_t &= \frac{2}{1 + \frac{\alpha c}{\omega} (1-i)} E_0 \\ \vec{E}_t &= \frac{2}{1 + \frac{\alpha c}{\omega} (1-i)} E_0 e^{-\alpha x} e^{i(\omega t - \alpha x)} \vec{u}_y \\ \vec{B}_t &= \frac{\alpha}{\omega} \frac{2(1-i)}{1 + \frac{\alpha c}{\omega} (1-i)} E_0 e^{-\alpha x} e^{i(\omega t - \alpha x)} \vec{u}_z \end{aligned}$$

Dans le métal $\vec{j} = \sigma \vec{E}_t$

4d. * Force volumique

$$\vec{f} = \cancel{\rho \vec{E}_t} + \vec{f} \wedge \vec{B}_t = \vec{f} \wedge \vec{B}_t$$

* Force s'exerçant sur le volume $dS dx$.

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= \delta \vec{E}_t \vec{u}_y \wedge B_t \vec{u}_z dS dx \\ &= \delta E_t B_t \vec{u}_x dS dx. \end{aligned}$$

* La force moyenne sur

$$\langle d\vec{F} \rangle = \delta \langle E_t B_t \rangle \vec{u}_x dS dx.$$

$$\text{Avec } \langle E_t B_t \rangle = \mathcal{L} \left(\frac{1}{2} \left(\underline{E}_t \underline{B}_t^* \right) \right)$$

$$\frac{1}{2} \underline{E}_t \underline{B}_t^* = \frac{1}{2} \frac{2E_0}{1 + \frac{\alpha c}{\omega} (1-i)} e^{-\alpha x} \frac{\alpha}{\omega} \frac{2(1+i)}{1 + \frac{\alpha c}{\omega} (1+i)} E_0 e^{-\alpha x}$$

$$= \frac{\alpha}{\omega} \frac{2E_0^2 (1+i) e^{-2\alpha x}}{\left(1 + \frac{\alpha c}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{\alpha c}{\omega}\right)^2}$$

$$\langle d\vec{F} \rangle = \delta \frac{\alpha}{\omega} \frac{2E_0^2 e^{-2\alpha x}}{\left(1 + \frac{\alpha c}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{\alpha c}{\omega}\right)^2} \vec{u}_x dS dx.$$

* Force totale s'exerçant sur dS .

$$\begin{aligned} \langle \vec{F} \rangle &= \delta \frac{\alpha}{\omega} \frac{2E_0^2}{\left(1 + \frac{\alpha c}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{\alpha c}{\omega}\right)^2} \vec{u}_x dS \int_{x=0}^{+\infty} e^{-2\alpha x} dx \\ &= \frac{\delta E_0^2}{\omega \left(\left(1 + \frac{\alpha c}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{\alpha c}{\omega}\right)^2 \right)} \vec{u}_x dS. \end{aligned}$$

On obtient pour la pression de radiation

$$P = \frac{\gamma E_0^2}{\omega \left(\left(1 + \frac{\alpha c}{\omega} \right)^2 + \left(\frac{\alpha c}{\omega} \right)^2 \right)}$$

Dans le cas d'un miroir parfait $\frac{\alpha c}{\omega} \gg 1$.

$$P \sim \frac{\gamma E_0^2}{\omega L \left(\frac{\alpha c}{\omega} \right)^2}$$

$$= \frac{\omega \gamma E_0^2}{L \alpha^2 c^2}$$

$$\text{avec } \alpha^2 = \frac{\mu_0 \gamma \omega}{L}$$

$$= \frac{\cancel{\gamma} E_0^2 \cancel{\omega}}{L \frac{\mu_0 \cancel{\gamma} \cancel{\omega}}{L} c^2}$$

$$\boxed{P = \epsilon_0 E_0^2}$$

On retrouve le m^{ème} expression
et a un effet indépendant de γ
une valeur même si $\gamma \rightarrow +\infty$.