

DS de PHYSIQUE n° 5

Samedi 18 janvier 2025

4 heures

Pour ce DS, vous devez choisir un des deux sujets proposés.

Le sujet 1 est constitué de deux extraits d'épreuves de CentraleSupélec

Le sujet 2 (a priori un peu plus facile) est une épreuve de CCINP

Une fois le sujet choisi, vous devez vous y tenir !

SUJET n°1**Problème 1 : Proxima du Centaure** (*extrait Centrale MP 2020*)

Ce problème est une invitation à regarder vers les étoiles, et tout particulièrement l'étoile la plus proche de la planète Terre après le Soleil : Proxima du Centaure aussi appelée *Proxima Centauri*.

Il est constitué de 4 parties totalement indépendantes. La première partie étudie une caractéristique de l'atmosphère terrestre qui a permis le développement de la vie sur Terre et peut-être un jour sur une exoplanète. La deuxième partie est relative à l'observation de Proxima du Centaure et à la détermination de sa distance et de sa taille. La troisième partie s'intéresse à un vaisseau capable de rejoindre Proxima du Centaure et d'explorer une exoplanète dont la découverte fait l'objet de la dernière partie.

Certaines questions peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

Certaines données numériques sont regroupées en fin d'énoncé ; d'autres relèvent de l'initiative du candidat.

II Découverte de Proxima du Centaure**II.A – Première observation de l'étoile**

L'étoile *Proxima Centauri* a été découverte en 1915 par l'astronome britannique Robert Innes, alors directeur de l'observatoire de l'Union à Johannesburg en Afrique du Sud. C'est une étoile de type naine rouge, de masse $M_E = 2,44 \times 10^{29}$ kg et de rayon $R_E = 9,81 \times 10^4$ km. Elle est située à $D_E = 3,99 \times 10^{13}$ km soit 4,22 années-lumière du Soleil.

Dans la suite du sujet, toutes les applications numériques seront faites à la longueur d'onde moyenne du visible $\lambda_{\text{obs}} = 600$ nm.

Q 13. Justifier, par un argument d'ordre de grandeur, que la distance entre la Terre et Proxima du Centaure peut être approximée à 4,22 années-lumière.

Pour voir l'étoile *Proxima Centauri*, un instrument d'optique est utilisé. Il est modélisé dans la suite par deux lentilles :

- une lentille convergente L_1 objectif, de centre optique O_1 , de foyer principal objet F_1 , de foyer principal image F'_1 et de distance focale image $f'_1 = 8$ m ;
- une lentille divergente L_2 de projection, de centre optique O_2 , de foyer principal objet F_2 , de foyer principal image F'_2 et de distance focale image $f'_2 = -0,02$ m.

Si le point objet A et le point image A' sont conjugués par la lentille L de focale f' et de centre O , d'après la Formule de Descartes on a

$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'}$$

et le grandissement transversal est

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

L'instrument d'optique est pointé vers l'étoile *Proxima Centauri*.

- Q 14.** Où est située l'image de l'étoile par la lentille L_1 , appelée image intermédiaire A_1B_1 ? Illustrer cette situation par un schéma.
- Q 15.** Déterminer l'expression de la taille de cette image intermédiaire A_1B_1 (non algébrique) en fonction du rayon R_E de l'étoile et des caractéristiques de la lentille objectif L_1 .
- Q 16.** La lentille de projection L_2 , divergente, sert à faire de l'image intermédiaire A_1B_1 une image définitive $A'B'$, réelle, non inversée et agrandie d'un facteur 4. Calculer la distance O_1O_2 pour respecter ces contraintes.
- Q 17.** Illustrer par un schéma la position de A_1B_1 , de $A'B'$ et de L_2 (sans représenter L_1).
- Q 18.** En 1915, l'image définitive $A'B'$ de l'étoile se formait sur une plaque photographique de dimension $24 \text{ mm} \times 36 \text{ mm}$, composée de cristaux de $10 \mu\text{m}$ de chlorure d'argent, précipité blanc qui noircit à la lumière. L'image définitive de l'étoile *Proxima Centauri* est-elle vue comme ponctuelle ou étendue sur la plaque photo ?
- Q 19.** À l'occasion du centenaire de la découverte de Proxima du Centaure, en 2015, la photo de l'étoile a été reprise avec l'instrument d'optique de l'époque mais la plaque photographique a été remplacée par un capteur CCD (Charge Coupled Device) de 100 millions de pixels, de taille identique à la plaque photo originelle. L'image définitive de l'étoile *Proxima Centauri* est-elle vue comme ponctuelle ou étendue sur le capteur photosensible ? L'efficacité quantique QE d'un capteur CCD donne le taux de transformation de la lumière en charge, soit la probabilité qu'un photon incident donne « naissance » à un électron dans le capteur. Pour la longueur d'onde étudiée, cette sensibilité quantique QE est de 30 %.
- Q 20.** Sachant que la puissance surfacique reçue sur Terre par le Soleil dans le visible est de $600 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$ et que la lentille d'entrée de l'instrument est de diamètre $D_1 = 50 \text{ cm}$, de combien d'électrons sera composé le signal résultant de l'étoile pour une exposition de 12 minutes du capteur ? Quelle est la charge produite par le capteur ?
- Q 21.** La diffraction par la lentille d'entrée L_1 est-elle gênante pour les observations ?

II.B – Mesure de la distance entre la Terre et l'étoile

La parallaxe est l'effet du changement de position de l'observateur sur ce qu'il perçoit.

La parallaxe annuelle est, par définition, l'angle qui mesure le déplacement, au cours de l'année, de la position apparente, perçue depuis la Terre, d'une étoile proche par rapport aux étoiles lointaines (figure 4).

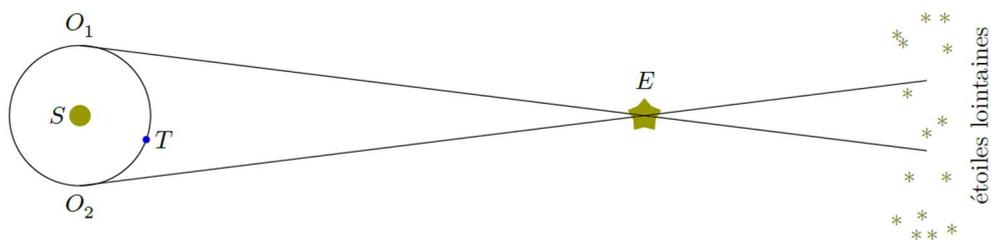


Figure 4 Schéma explicatif de la mesure de parallaxe solaire

Sur la figure 4, deux instants d'observation sont représentés par O_1 et O_2 .

Le satellite Hipparcos (High Precision Parallax Collection Satellite) a mesuré la parallaxe de $P_E = 1545$ millisecondes d'arc pour *Proxima Centauri*.

- Q 22.** Calculer, à partir de cette valeur de la parallaxe P_E , la distance séparant l'étoile *Proxima Centauri* du système solaire et comparer à la valeur donnée au début de cette partie.
- Q 23.** Pourquoi la distance entre la Terre et le Soleil varie-t-elle au cours de l'année ?

II.C – Mesure du rayon de l'étoile

En 2002, le VLT (Very Large Telescope) utilisa l'interférométrie pour mesurer le diamètre angulaire de *Proxima Centauri* : $\alpha \approx 1,02 \pm 0,08$ milliseconde d'arc. Connaissant sa distance, obtenue par la méthode de la parallaxe, il est alors possible de déterminer son rayon.

II.C.1) L'étoile est d'abord supposée ponctuelle et l'instrument d'optique est pointée sur elle. L'étoile se situe à l'infini sur l'axe optique de l'instrument, elle est repérée par son centre S . Le dispositif d'interférométrie est modélisé par deux trous d'Young de taille identique, respectivement en T_1 et T_2 , séparés d'une distance a réglable. Ce dispositif est placé devant la lentille convergente L_1 de l'instrument d'optique. Pour simplifier, on ne tiendra pas compte dans cette partie de la seconde lentille L_2 et les observations sont donc effectuées dans le plan de l'image intermédiaire. Un point M dans ce plan est repéré par son abscisse x (figure 5).

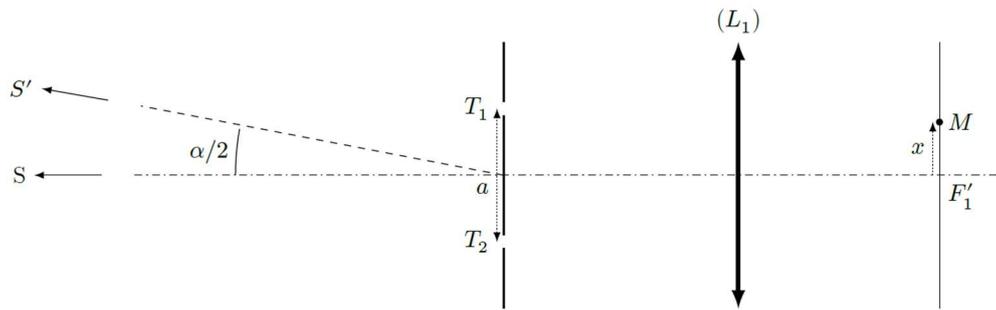


Figure 5 Schéma du dispositif d'interférométrie pour la mesure du rayon de l'étoile *Proxima Centauri*

Q 24. Faire un schéma des deux rayons lumineux passant par T_1 et T_2 qui convergent vers le point M . Représenter la différence de marche entre ces deux rayons sur ce schéma.

Q 25. Établir l'expression de l'ordre d'interférence $p_S(M)$, produit par la source S au point M .

Q 26. Décrire alors la figure d'interférences.

Q 27. En notant I_0 l'intensité moyenne, donner, sans démonstration, l'expression de l'intensité lumineuse $I(M)$ dans le plan d'observation.

II.C.2) L'étoile est à présent modélisée comme une source étendue vue sous un diamètre angulaire α . On considère un autre point source S' à la périphérie de l'étoile (figure 5).

Q 28. Faire un schéma des deux rayons lumineux issus de S' , passant par T_1 et T_2 et qui convergent vers le point M . Représenter la différence de marche entre ces deux rayons sur ce schéma.

Q 29. Établir l'expression de l'ordre d'interférence $p_{S'}(M)$ produit par la source S' au point M .

Q 30. En déduire l'expression de la plus petite valeur de a qui conduit au brouillage de la figure d'interférence produite par les deux sources incohérentes S et S' .

Q 31. Faire l'application numérique et commenter.

Q 32. Expliquer qualitativement pourquoi le raisonnement précédent, utilisant deux sources ponctuelles l'une située au centre et l'autre sur le bord apparent de l'étoile, rend compte des observations obtenues avec l'objet étendu qu'est la véritable étoile.

III Voyager vers Proxima du Centaure

Pour accomplir un voyage hypothétique vers Proxima du Centaure, on envisage un vaisseau à voile solaire, propulsé grâce à la réflexion du rayonnement électromagnétique du Soleil sur la voile. Plus la voile est grande et réfléchissante, plus grande est la force de propulsion.

Une onde plane progressive monochromatique, se propageant selon \vec{u}_x depuis les $x < 0$, arrive sur la voile solaire, métal de conductivité réelle γ , assimilée dans un premier temps à un demi espace infini $x > 0$ (dénommé dans la suite approximation espace infini).

L'onde incidente dans le demi espace vide des $x < 0$ s'écrit, en notation complexe,

$$\vec{E}_i = \underline{E}_0 \exp(j(\omega t - kx)) \vec{u}_y$$

et arrive en $x = 0$ sur un métal de conductivité γ .

Q 33. Rappeler sans démonstration l'équation dont le champ électrique est solution dans le vide. En déduire la relation de dispersion liant k et ω en fonction de la célérité c de l'onde. Comment qualifier la propagation de cette onde ?

Q 34. Établir l'expression du champ magnétique associé à cette onde incidente.

Q 35. Déterminer l'expression de la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting associé à cette onde incidente.

Cette onde incidente donne naissance à l'interface avec la voile solaire à :

— une onde réfléchie (se propageant selon $-\vec{u}_x$ dans l'espace $x < 0$) de la forme

$$\vec{E}_r = \underline{r} \underline{E}_0 \exp(j(\omega t + kx)) \vec{u}_y ;$$

— une onde transmise (se propageant selon $+\vec{u}_x$ dans l'espace $x > 0$) de la forme

$$\vec{E}_t = \underline{t} \underline{E}_0 \exp(j(\omega t - \underline{k}_m x)) \vec{u}_y.$$

Dans le métal (demi espace $x > 0$), le champ électrique de l'onde transmise vérifie l'équation différentielle

$$\Delta \vec{E}_t = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial t} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}_t}{\partial t^2}. \quad (\text{III.1})$$

Q 36. Proposer une simplification de l'équation (III.1) pour une onde, dans le domaine du visible ou de l'infrarouge, se propageant dans l'or de conductivité $\gamma = 45 \times 10^6 \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$.

Q 37. Exprimer le vecteur d'onde complexe \underline{k}_m en fonction d'une longueur δ dont on donnera l'expression et la signification.

Q 38. Proposer une épaisseur raisonnable pour la voile solaire afin que l'approximation espace infini puisse être conservée. Sachant que la masse volumique de l'or est $\rho = 19,3 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$, estimer la masse d'une voile solaire de surface 100 m^2 .

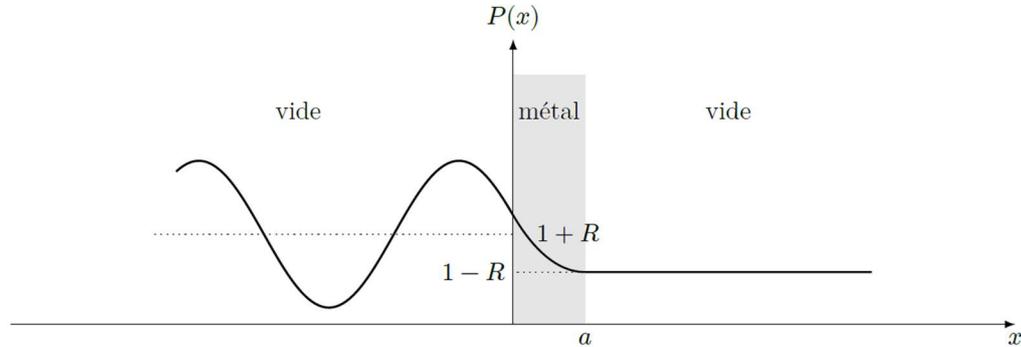


Figure 6

La figure 6 représente l'évolution spatiale de la norme du vecteur de Poynting moyen pour une voile pour laquelle l'approximation espace infini n'est plus vérifiée. R est le coefficient de réflexion en énergie de la voile.

Q 39. Commenter cette figure. À quel phénomène la situation étudiée est-elle analogue ?

Q 40. En utilisant le modèle corpusculaire de la lumière, proposer une expression de la force qui s'exerce sur la voile en fonction, entre autres paramètres, de la puissance électromagnétique moyenne incidente par unité de surface et de R , coefficient de réflexion en énergie de la voile. Évaluer l'ordre de grandeur de cette force à proximité de la Terre où la puissance surfacique du rayonnement solaire est d'environ $1000 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$.

Données

Perméabilité magnétique du vide

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$$

Permittivité diélectrique du vide

$$\varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$$

Charge élémentaire

$$e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$$

Constante d'Avogadro

$$\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

Constante de Boltzmann

$$k_B = 1,381 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$$

Constante des gaz parfaits

$$R = 8,314 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$$

Constante de Planck

$$h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$$

Vitesse de la lumière dans le vide

$$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Constante universelle de la gravitation

$$\mathcal{G} = 6,674 \times 10^{-11} \text{ m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$$

Masse de l'électron

$$m_e = 9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

Masse du proton

$$m_p = 1,673 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

Rayon moyen de la Terre

$$R_T = 6,38 \times 10^6 \text{ m}$$

Distance Terre-Soleil

$$D_{TS} = 1,50 \times 10^8 \text{ km}$$

Masse de la Terre

$$M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$$

Rayon du Soleil

$$R_S = 6,96 \times 10^8 \text{ m}$$

Masse du Soleil

$$M_S = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$$

Problème 2 : Expérimenter avec un morceau de scotch (extrait de CentraleSupélec 2017)

III Mesure de la biréfringence d'un ruban adhésif

Dans toute cette partie, l'air est assimilé au vide et on note c la célérité de la lumière dans le vide.

III.A – Préambule : Mesure d'une différence d'indice optique à l'aide d'un interféromètre de Mach-Zehnder

On dispose de deux lames transparentes à faces parallèles, de même épaisseur e (connue avec précision) et d'indices optiques différents :

- une lame « de référence » (\mathcal{L}_0), d'indice optique n_0 connu ;
- une lame « d'essai » (\mathcal{L}_e), d'indice optique $n_e = n_0 + \Delta n$ (avec $\Delta n > 0$).

Afin de mesurer Δn , on place chacune de ces lames dans un des bras d'un interféromètre de Mach-Zehnder (figure 7).

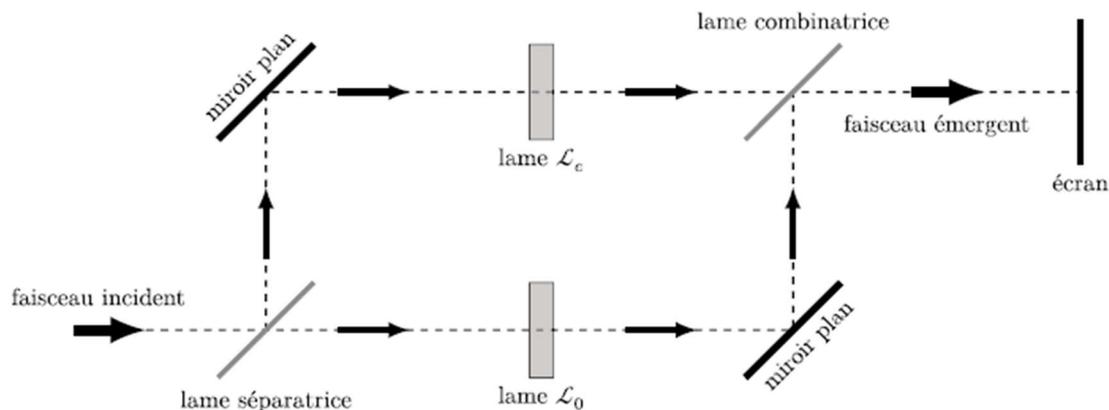


Figure 7 Schéma de principe de l'interféromètre de Mach-Zehnder et placement des lames étudiées.

De façon simple, l'interféromètre de Mach-Zehnder est constituée de deux lames semi-réfléchissantes et de deux miroirs plans (tous ces éléments sont parallèles entre eux). La lame semi-réfléchissante placée en entrée du dispositif est appelée lame *séparatrice* ; elle permet de diviser le faisceau incident en deux faisceaux secondaires orthogonaux entre eux et de même intensité. Les deux miroirs plans (un dans chaque bras de l'interféromètre) permettent d'orienter les faisceaux secondaires vers la sortie du dispositif. La lame semi-réfléchissante placée en sortie du dispositif, rigoureusement identique à la lame séparatrice, est appelée lame *combinatrice* car elle permet de superposer les deux faisceaux secondaires en direction de l'écran (ou d'un photodétecteur).

III.A.1) L'interféromètre de Mach-Zehnder est un interféromètre à division d'amplitude. Citer le nom d'un autre interféromètre de ce type et dater approximativement son invention.

III.A.2) Pourquoi n'est-il pas nécessaire d'accoler une lame compensatrice à la lame séparatrice dans ce dispositif ?

La « compensatrice est une lame que l'on ajoute en « complément » d'une lame semi réfléchissante pour compenser le fait que l'un des faisceaux traverse une fois de plus l'épaisseur de la lame semi réfléchissante que l'autre.

III.A.3) Le faisceau incident est un faisceau de lumière parallèle. On suppose que les deux lames sont orientées de façon à être éclairées sous incidence normale. Déterminer la différence de marche δ entre les deux faisceaux en sortie de l'interféromètre.

III.A.4) Dans le cas où le faisceau incident est monochromatique de longueur d'onde λ , exprimer l'intensité lumineuse I obtenue sur l'écran en sortie du dispositif (on se placera dans le cadre du modèle scalaire de la lumière et on notera I_0 l'intensité lumineuse obtenue sur l'écran en masquant l'un des deux miroirs). Décrire brièvement ce que l'on observe sur l'écran.

III.A.5) Pour quelle(s) longueur(s) d'onde, l'intensité I est-elle maximale ?

III.A.6) Proposer un protocole de mesure de Δn à l'aide de ce dispositif (et de tout le matériel classique d'un laboratoire d'optique).

III.B – Propagation d'une onde polarisée à travers un morceau de Scotch®

Le Scotch® est un milieu *biréfringent*, c'est-à-dire que son indice de réfraction n'est pas unique : il dépend de la direction de polarisation de l'onde lumineuse qui le traverse. Pour la suite, on considère un morceau de Scotch® assimilé à une lame plane à faces parallèles, orthogonales à l'axe Oz , d'épaisseur e . On envoie sur cette lame une onde lumineuse plane, progressive (selon $+Oz$), monochromatique, polarisée rectilignement, et on admet que :

- pour une polarisation rectiligne selon Ox , l'onde se propage à la vitesse $v_o = \frac{c}{n_o}$ dans la lame, sans changer de direction de polarisation ;
- pour une polarisation rectiligne selon Oy , l'onde se propage à la vitesse $v_e = \frac{c}{n_e}$ dans la lame, avec $n_e = n_o + \Delta n$, sans changer de direction de polarisation.

Les axes Ox et Oy sont appelés *lignes neutres* de la lame.

L'origine de l'axe Oz est choisie au niveau de la face d'entrée de la lame. On néglige tout phénomène de réflexion partielle au niveau des faces de la lame.

III.B.1) En notation complexe, le champ électrique associé à l'onde incidente (dans le domaine $z < 0$) s'écrit $\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})}$, où ω est la pulsation de l'onde et \vec{E}_0 un vecteur constant.

- a) Exprimer le vecteur d'onde \vec{k} correspondant à la situation étudiée.
- b) Justifier que les vecteurs \vec{k} et \vec{E}_0 sont nécessairement orthogonaux entre eux.

III.B.2) On suppose dans cette question que l'onde incidente est polarisée rectilignement selon Ox . Expliciter, en notation complexe, le champ électrique associé à l'onde au niveau de la face de sortie de la lame (en $z = e$), puis en un point quelconque du domaine $z > e$.

III.B.3) L'onde incidente est désormais polarisée rectilignement selon la première bissectrice des axes Ox et Oy : $\vec{E}_0 = \frac{E_0}{\sqrt{2}} (\vec{u}_x + \vec{u}_y)$ (avec $E_0 = \|\vec{E}_0\|$).

- a) En admettant que la biréfringence du Scotch® est un phénomène linéaire, donner en notation complexe l'expression du champ électrique obtenu dans le domaine $z > e$.
- b) Après avoir traversé la lame, l'onde est-elle toujours polarisée rectilignement ?
- c) Montrer que, si $\Delta n e = p\lambda$ avec p un entier et λ la longueur d'onde de l'onde dans le vide, l'onde émergente est polarisée rectilignement dans la même direction que l'onde incidente.

III.C – Analyse d'une expérience

Au cours de l'année scolaire 2011/2012, un groupe de quatre élèves d'une classe de terminale a réalisé une expérience de mesure de la biréfringence d'un ruban adhésif. Le principe de cette mesure est décrit dans le document annexe (situé à l'intérieur du document réponse).

III.C.1) Présentation du dispositif

- a) Comment peut-on s'assurer expérimentalement qu'un polariseur et un analyseur sont croisés (*i.e.* orientés selon des directions orthogonales entre elles) ?
- b) Comment procéder pour orienter les lignes neutres du ruban adhésif à 45° par rapport aux axes du polariseur et de l'analyseur ?

III.C.2) Étalonnage du spectrogoniomètre

- a) En admettant que le réseau est éclairé sous incidence normale tout au long de l'expérience et que les relevés effectués correspondent au spectre d'ordre 1, déterminer le pas a du réseau utilisé.
- b) En pratique, quelles sont les principales sources d'incertitude sur la valeur de a ainsi obtenue ?

III.C.3) Mesure de la biréfringence du Scotch®

- a) D'après l'étude réalisée dans la sous-partie III.B, à quoi correspondent les « raies d'absorption » observées ?
- b) « En observant les spectres de la lumière après l'analyseur pour une ou deux épaisseurs de Scotch®, on remarque que les spectres sont continus. On observe à partir de trois épaisseurs une première raie d'absorption. » En déduire une estimation de la valeur maximale de Δn sachant que l'épaisseur d'une couche du ruban adhésif utilisé est $e = 28,0 \mu\text{m}$.
- c) À partir des différents résultats présentés dans le document et de ceux établis précédemment, proposer une autre valeur expérimentale de Δn pour le ruban adhésif étudié. Comparer à celle obtenue par les auteurs du document et commenter.

III.C.4) Le dispositif {polariseur – ruban adhésif – analyseur} est en fait analogue à l'interféromètre de Mach-Zehnder étudié dans la sous-partie III.A.

- a) À quoi correspondent les deux bras de l'interféromètre ? Quel élément permet ici de réaliser la division d'amplitude ?
- b) Justifier la partie *en italique* dans l'affirmation suivante : « La plaque de verre est orientée de sorte que les lignes neutres du Scotch® soient orientées de 45° par rapport aux axes du polariseur et de l'analyseur (*car c'est dans cette position que les contrastes sont les plus importants*) ».

IV Obtention de graphène par le procédé d'exfoliation « au Scotch[®] »

Le *graphène* est un cristal bidimensionnel, constitué d'atomes de carbone répartis régulièrement sur un réseau hexagonal en forme de nid d'abeille. En appliquant un simple morceau de Scotch[®] sur un cristal de graphite, les physiciens Konstantin Novoselov et Andre Geim ont réussi, en 2004, à isoler et à observer une unique feuille de graphène. Ils ont reçu le prix Nobel de physique en 2010 pour ces travaux. Le graphène s'est avéré être un matériau fascinant, aux propriétés électroniques exceptionnelles et donne lieu, depuis 2004, à des recherches variées à la fois en physique fondamentale et en physique appliquée.

IV.A – Diagramme de phases du carbone

Le carbone solide existe sous deux variétés allotropiques aux propriétés physico-chimiques très différentes : le *diamant* (dur, cassant, transparent, isolant) et le *graphite* (mou, noir, conducteur). On donne sur la figure 8 le diagramme d'état du carbone.

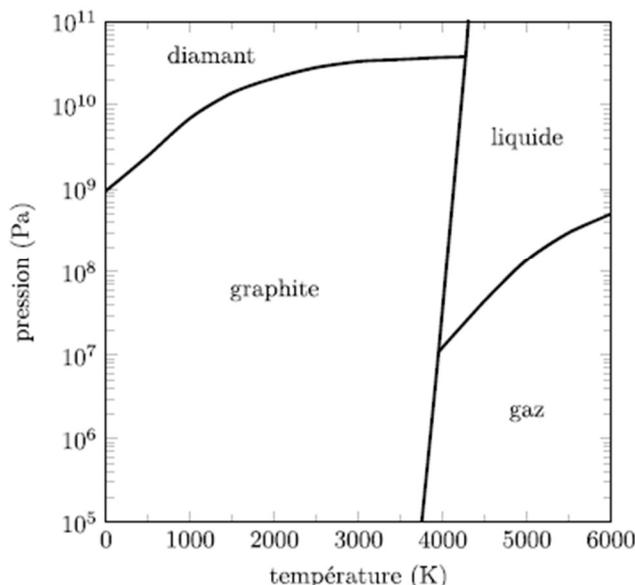


Figure 8 Diagramme de phases du carbone

- IV.A.1) Quelle est la forme stable du carbone à 0 °C sous 1 bar ?
- IV.A.2) Sous quelles pressions le graphite peut-il se transformer en diamant ? Où peut-on rencontrer de telles pressions ?
- IV.A.3) Comment expliquer que des diamants puissent être achetés dans des bijouteries ?

IV.B – Structure cristallographique du diamant

Le diamant cristallise dans une structure cubique telle que les atomes de carbone forment un réseau cubique à faces centrées et occupent un site tétraédrique sur deux en alternance.

- IV.B.1) Dessiner la maille du diamant.
- IV.B.2) Quelle est la compacité de l'édifice en supposant qu'il y a tangence entre atomes de carbone les plus proches ?
- IV.B.3) La masse volumique du diamant vaut $3520 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. En déduire la distance séparant deux atomes de carbone.

IV.C – Structure cristallographique du graphite et comparaison

Le graphite présente une structure en feuillets superposés de type ABAB. Au sein d'un même feuillet, les carbones ont une géométrie trigonale plane avec des angles de 120° et des longueurs de liaison de 141 pm. La maille hexagonale associée à la structure est représentée figure 9.

IV.C – Structure cristallographique du graphite et comparaison

Le graphite présente une structure en feuillets superposés de type ABAB. Au sein d'un même feuillet, les carbones ont une géométrie trigonale plane avec des angles de 120° et des longueurs de liaison de 141 pm. La maille hexagonale associée à la structure est représentée figure 9.

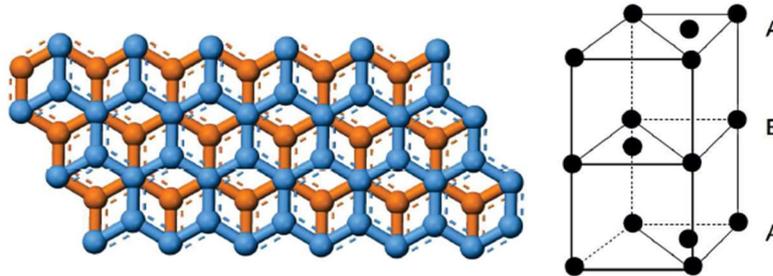


Figure 9 À gauche : représentation schématique des feuillets du graphite vus de dessus. À droite : maille hexagonale du graphite

IV.C.1) Déterminer le nombre d'atomes en propre par maille.

IV.C.2) La densité du graphite étant comprise entre 2,09 et 2,23, en déduire une fourchette pour la distance entre deux feuillets.

IV.C.3) En comparant les différentes distances entre atomes de carbone rencontrées dans cette partie, discuter la nature des liaisons C-C dans le diamant, dans les feuillets du graphite et entre les feuillets du graphite. Commenter.

IV.D – Du graphite au graphène

Le graphène correspond à un unique feuillet d'atomes de carbones constituant le graphite. La figure 10 explique comment obtenir un tel feuillet à partir d'un bloc de graphite (tiré d'une mine de crayon par exemple) et d'un morceau de ruban adhésif.

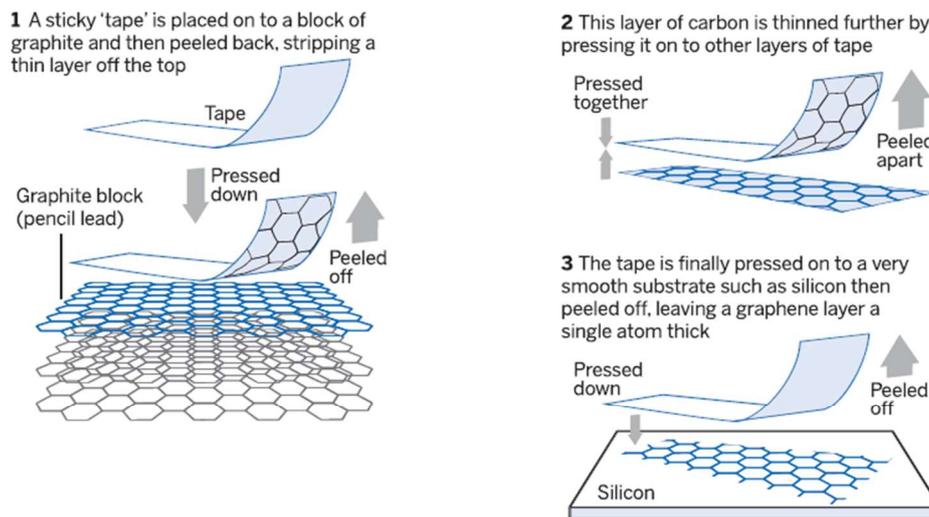


Figure 10 Illustration extraite de l'article *Faster, stronger, bendier* de Clive Cookson, publié dans *Financial Times* du 28 janvier 2013

IV.D.1) À partir d'arguments qualitatifs uniquement, justifier la faisabilité d'un tel procédé.

IV.D.2) Dans le domaine de la recherche, le graphène est particulièrement étudié pour ses propriétés électroniques exceptionnelles. Comment expliquer simplement les propriétés conductrices du graphène ?

Annexe - Une expérience de mesure de la biréfringence du Scotch[®]

Présentation du dispositif

Afin d'observer le phénomène de biréfringence du Scotch[®], nous avons réalisé une boîte dans laquelle nous avons glissé deux polariseurs croisés de part et d'autre d'une plaque de verre circulaire pouvant pivoter autour d'un axe horizontal. Sur cette plaque de verre est collé du Scotch[®] avec différentes épaisseurs (voir photo ci-dessous). L'ensemble est éclairé par un faisceau parallèle de lumière blanche.

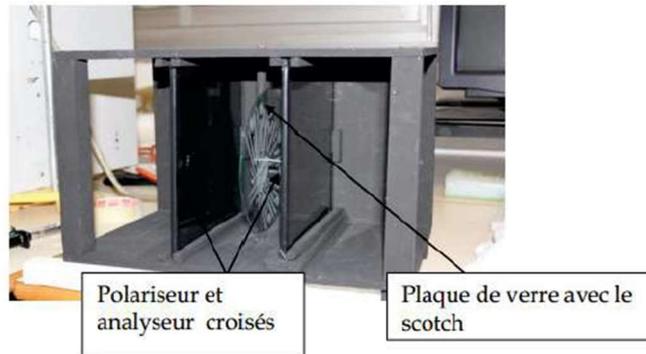


Figure 1 Notre boîte (la lumière entre par la gauche et sort par la droite).

Nous avons commencé par analyser spectralement la lumière à la sortie de l'analyseur et ce pour une, deux, trois, ..., épaisseurs de Scotch[®]. Pour chaque épaisseur, la plaque de verre est orientée de sorte que les lignes neutres du Scotch[®] soient orientées de 45° par rapport aux axes du polariseur et de l'analyseur (car c'est dans cette position que les contrastes sont les plus importants). Puis nous avons mesuré la différence d'indice entre les deux lignes neutres du Scotch[®].

Observations des spectres

Pour faire cette étude, nous avons utilisé un spectrogoniomètre. La lumière entre dans le collimateur et se dirige vers la plate-forme sur laquelle on place un réseau (ou un prisme) qui décompose la lumière. Le spectre de cette lumière peut ensuite être observé à l'aide d'une lunette. Avec un tel appareil, on peut, en pointant la lunette sur une raie d'émission ou d'absorption, relever la position de cette dernière.

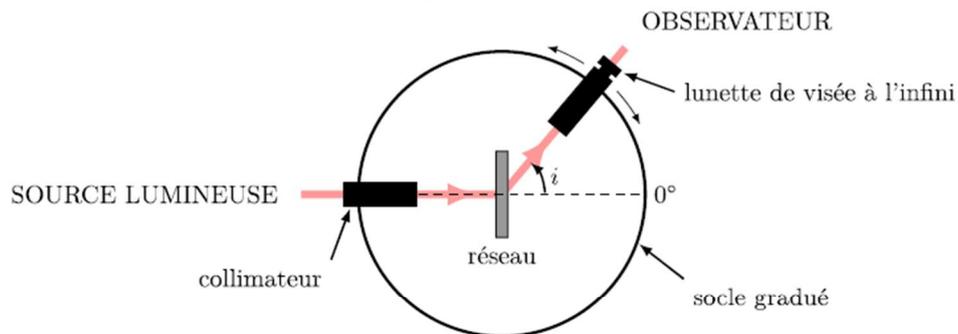


Figure 2 Schéma du spectrogoniomètre (vue de dessus).

En observant les spectres de la lumière après l'analyseur pour une ou deux épaisseurs de Scotch[®], on remarque que les spectres sont continus. On observe à partir de trois épaisseurs une première raie d'absorption. Nous avons alors décidé de porter le nombre d'épaisseurs de Scotch[®] à dix afin d'observer plusieurs raies d'absorption.

Étalonnage du spectrogoniomètre

Nous avons tout d'abord mesuré avec la graduation du socle les positions des raies d'émission d'une lampe à vapeur de zinc et d'une lampe à vapeur de mercure. Nous avons ensuite calculé le sinus des angles trouvés à

l'aide du goniomètre pour chaque raie d'émission et y avons associé les longueurs d'onde correspondantes grâce aux tables de valeurs.

Source	Valeur de l'angle sur le goniomètre (en°)	Sinus de cet angle	Longueur d'onde de la raie d'émission (en nm)
Lampe à vapeur de zinc	16,33	0,281	468,0
	16,48	0,284	472,0
	16,78	0,289	480,0
	22,37	0,380	637,0
Lampe à vapeur de mercure	15,23	0,263	435,8
	19,12	0,328	546,1
	20,23	0,346	576,6
	20,28	0,347	579,1

À l'aide d'un logiciel de traitement des données, nous avons tracé la courbe d'étalonnage du sinus des angles en fonction des longueurs d'onde correspondantes. Cette courbe est une droite.

Mesure de la biréfringence du Scotch®

Nous avons ensuite repris l'analyse spectrale de la lumière sortant de l'analyseur après avoir traversé dix épaisseurs de Scotch®. Nous avons ainsi pu mesurer les valeurs des angles pour les raies d'absorption et avons calculé leur sinus. Grâce à la courbe d'étalonnage nous avons alors déterminé les longueurs d'onde correspondant à ces raies.

Valeur de l'angle sur le goniomètre (en°)	Sinus de cet angle	Longueur d'onde correspondante (en nm)
15,13	0,261	433,4
17,25	0,297	494,9
20,03	0,343	573,2
24,03	0,407	680,0

Grâce à ces mesures nous avons la possibilité désormais de déterminer la différence des indices dans le Scotch®. À l'aide de notre simulation informatique utilisant un logiciel de géométrie dynamique et pour les longueurs d'onde ci-dessus, nous avons recherché la différence d'indice entre l'indice n_0 et l'indice n_e pour laquelle il y a absorption de la radiation par le système {polariseur-Scotch®-analyseur}. Nous avons considéré l'indice n_0 comme égal à 1, et nous avons joué sur la valeur de l'indice n_e jusqu'à obtenir l'extinction de la lumière. Voilà les valeurs obtenues :

Longueur d'onde (en nm)	Indice n_e
433,4	1,0175
494,9	1,0146
573,2	1,01253
680,0	1,01118

Nous avons finalement fait la moyenne de toutes ces valeurs, et nous obtenons :

$$\Delta n = n_e - n_0 = 0,0139$$

SUJET n°2

Epreuve CCINP MP 2013

OPTIQUE : L'ŒIL ET SES DEFAUTS

Les **parties I et II** sont indépendantes. Aucune connaissance sur l'œil et son fonctionnement n'est exigée.

PARTIE I : ETUDE SIMPLIFIEE DE L'ŒIL HUMAIN

L'œil humain a sensiblement la forme d'une sphère limitée par une membrane (la sclérotique) qui est transparente à l'avant de l'œil et forme la cornée (**figure 1**). L'intérieur du globe oculaire est divisé en deux parties séparées par le cristallin qui est une lentille convergente. Cette lentille est élastique et ses rayons de courbure varient lorsque l'œil accommode, c'est-à-dire quand il passe de la vision de loin à la vision de près. La partie antérieure entre la cornée et le cristallin est remplie d'un liquide appelé humeur aqueuse. L'iris permet à l'œil de diaphragmer et définit la pupille. La partie postérieure du cristallin est formée du corps vitré. La rétine qui sert de détecteur est tapissée de cellules de deux types différents, les cônes et les bâtonnets qui transforment l'excitation lumineuse en influx nerveux. La fovéa, partie de la rétine située sur l'axe optique de l'œil, est la partie la plus sensible de la rétine.

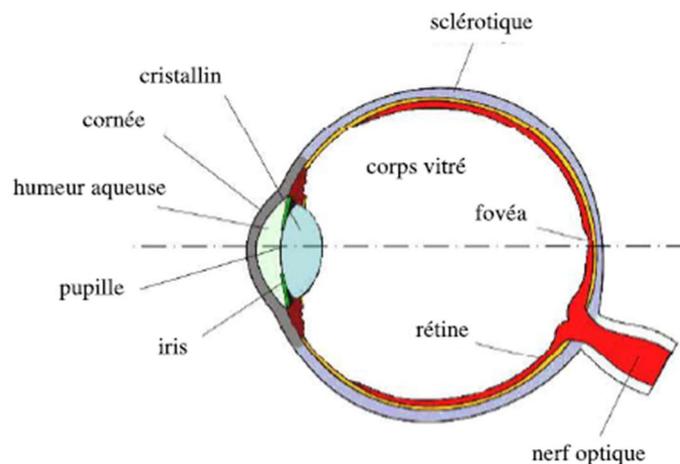


Figure 1 : coupe de l'œil humain

Les sous-parties I.A et I.B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

I.A. Modèle simplifié de l'œil pour la vision de loin

Pour simplifier l'étude de l'œil, on peut assimiler celui-ci à une lentille (L) plan-convexe d'indice n plongée dans l'air d'indice 1. La lentille (L) possède une face d'entrée plane et une face de sortie sphérique.

On se place dans le cas de la vision de loin quand l'œil n'accomode pas. Un rayon parallèle à l'axe optique, situé à la distance h de celui-ci, est issu d'un point objet A_∞ à l'infini sur l'axe optique (**figure 2**, page 3). Il pénètre par la face d'entrée plane de la lentille pour arriver au point I de la face concave où il se réfracte en passant du milieu, d'indice $n = 1,33$, à l'air, d'indice 1. Le rayon émergent intercepte l'axe optique au point image A_i .

C est le centre de courbure de la face de sortie de la lentille et R_C son rayon de courbure. On note i l'angle d'incidence et r l'angle réfracté par rapport à la normale CI . Dans un premier temps, les rayons ne seront pas considérés paraxiaux.

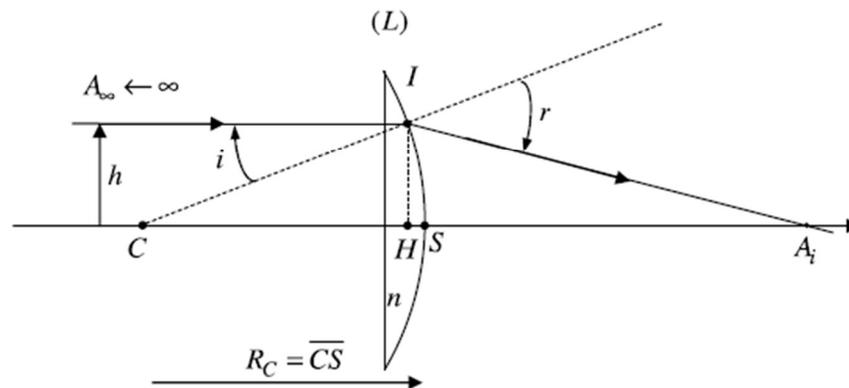


Figure 2 : modèle simplifié de l'œil pour la vision de loin

- I.1. Exprimer la relation entre les angles i et r à l'aide de la loi de Snell-Descartes.
- I.2. Soit H , le projeté de I sur l'axe optique. Exprimer les distances algébriques \overline{CH} et $\overline{HA_i}$ en fonction de i , r et R_C .
- I.3. En déduire l'expression de la distance algébrique $\overline{CA_i}$ en fonction de i , r et R_C .
- I.4. L'œil regarde un objet en plein soleil de sorte que sa pupille est fermée. Dans ce cas, $h = HI$ est très inférieur à R_C et les rayons lumineux peuvent être considérés comme étant paraxiaux.
 - I.4.a Montrer, dans ces conditions, que la position du point A_i ne dépend pas de i et donc de h .
 - I.4.b Dans ces conditions, H est confondu avec S (voir figure 2) et A_i est le foyer image F_i de la lentille. On appelle $f_i = \overline{SF_i}$ sa distance focale image. Déterminer f_i en fonction de n et R_C .
 - I.4.c La vergence de l'œil normal, quand il n'accomode pas, est $V = 60 \delta$. Calculer f_i et R_C .
- I.5. L'œil regarde toujours un objet à l'infini, mais cette fois-ci, à la nuit tombante, de sorte que sa pupille est grande ouverte. Les rayons lumineux ne peuvent plus être considérés paraxiaux.
 - I.5.a Montrer que $\overline{CA_i}$ s'exprime en fonction de i , R_C et n par la relation :

$$\overline{CA_i} = \frac{nR_C}{n \cos i - \sqrt{1 - n^2 \sin^2 i}}.$$
 - I.5.b On cherche à exprimer la position du point A_i en fonction de la hauteur h du rayon par rapport à l'axe optique. On considère pour cela que $\frac{h}{R_C} \ll 1$ de sorte que l'on peut faire les développements limités de $\cos i$ et $\sin i$ au second ordre. Donner l'expression de $\overline{CA_i}$ en fonction de n , R_C et h .

- I.5.c** En déduire en fonction de n , R_C et h l'étalement relatif η du point de focalisation d'un rayon issu de l'infini :

$$\eta = \left| \frac{\overline{CA_i}(h) - \overline{CA_i}(h \rightarrow 0)}{\overline{CA_i}(h \rightarrow 0)} \right|.$$

- I.5.d** Pour l'œil, on peut considérer que le diamètre maximal d'ouverture de la pupille est de l'ordre de grandeur du rayon de courbure R_C . Calculer η .
- I.5.e** Expliquer pourquoi la vision de loin est moins nette quand l'éclairement est faible et pourquoi on a le réflexe de plisser les yeux pour voir plus net au loin.

I.B. Modèle simplifié de l'œil pour la vision de près

Pour la vision de près, on peut assimiler l'œil à une lentille mince (L) biconvexe, convergente, plongée dans l'air d'indice 1. Tous les rayons lumineux seront considérés comme étant paraxiaux. S est le centre optique de la lentille, F_o son foyer principal objet, F_i son foyer principal image, V sa vergence et f_i sa distance focale image. La rétine, centrée au point R , est située à une distance du cristallin anatomiquement invariable : la distance $SR = 16,7$ mm reste fixe quelle que soit l'accommodation.

L'œil normal (emmétrope) permet de voir des objets situés devant lui depuis la distance $d_{\min} = 25$ cm (distance minimale de vision distincte) jusqu'à la distance d_{\max} infinie (distance maximale de vision distincte). Pour cela, l'œil accommode, c'est-à-dire que les rayons de courbure de la lentille biconvexe se modifient sous l'effet des muscles ciliaires.

On se place dans le cas de la vision de près quand l'œil accommode au maximum. Si l'image se forme sur la rétine au niveau de la fovéa, l'œil peut distinguer deux points proches suffisamment contrastés si leur distance angulaire est supérieure à $\varepsilon = 4 \times 10^{-4}$ rad. Cette limite de résolution augmente fortement en vision périphérique.

- I.6.** On note $p_o = \overline{SA_o}$ la mesure algébrique repérant la position d'un objet lumineux A_oB_o perpendiculaire à l'axe optique et dont l'image se forme sur la rétine. La position de l'image est repérée par la grandeur algébrique $p_i = \overline{SA_i}$.

- I.6.a** Donner la relation entre p_o , p_i et la vergence V de la lentille (L). Quel nom porte cette relation ? Donner la dimension de la vergence V et son unité en fonction des unités de base du Système International.
- I.6.b** Calculer la valeur V_{\max} de V quand l'œil emmétrope regarde un objet situé à la distance minimale de vision distincte d_{\min} .
- I.6.c** Calculer la valeur V_{\min} de V dans le cas où ce même œil emmétrope regarde un objet placé cette fois à la distance maximale de vision distincte d_{\max} .
- I.6.d** La variation de la vergence de l'œil $A = V_{\max} - V_{\min}$ est appelée l'amplitude d'accommodation. Calculer A dans le cas de l'œil emmétrope.

- I.8.** Une personne voit nettement un point à l'infini sans accommoder mais ne peut voir un point situé à moins de 1 m en accommodant au maximum. Pour pouvoir lire confortablement un journal placé à 25 cm devant lui, il porte des lunettes dont chaque verre (assimilé à une lentille mince convergente (L_L) de vergence V_L et de centre optique S_L) est placé 2 cm devant le centre optique de l'œil (**figure 3**). Dans ces conditions, il n'accommode pas.

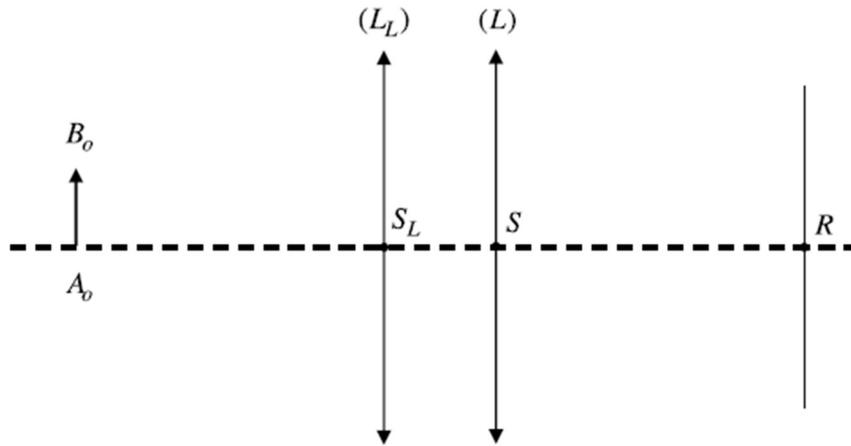


Figure 3 : lentille correctrice placée devant l'œil pour la vision de près.

- I.8.a** Calculer la vergence V_L de chacun des verres des lunettes.
- I.8.b** En reprenant le schéma de la **figure 3**, représenter deux rayons issus de B_o qui atteignent la rétine. Les échelles peuvent ne pas être respectées mais vous justifierez votre construction géométrique.
- I.8.c** En conservant ses lunettes, l'individu presbyte peut-il voir des objets situés à moins de 25 cm de ses yeux ? Si oui, jusqu'à quelle distance de ses yeux ?
- I.8.d** L'individu presbyte peut-il regarder de loin avec ses lunettes ? En conclusion, quel type de lunettes doit-il porter pour pouvoir facilement passer de la vision de près à la vision de loin ?

PARTIE II : MESURE DU RAYON DE COURBURE D'UNE LENTILLE

Pour caractériser une lentille mince correctrice, un opticien lunetier utilise le dispositif de la **figure 4** dit des « anneaux de Newton ».

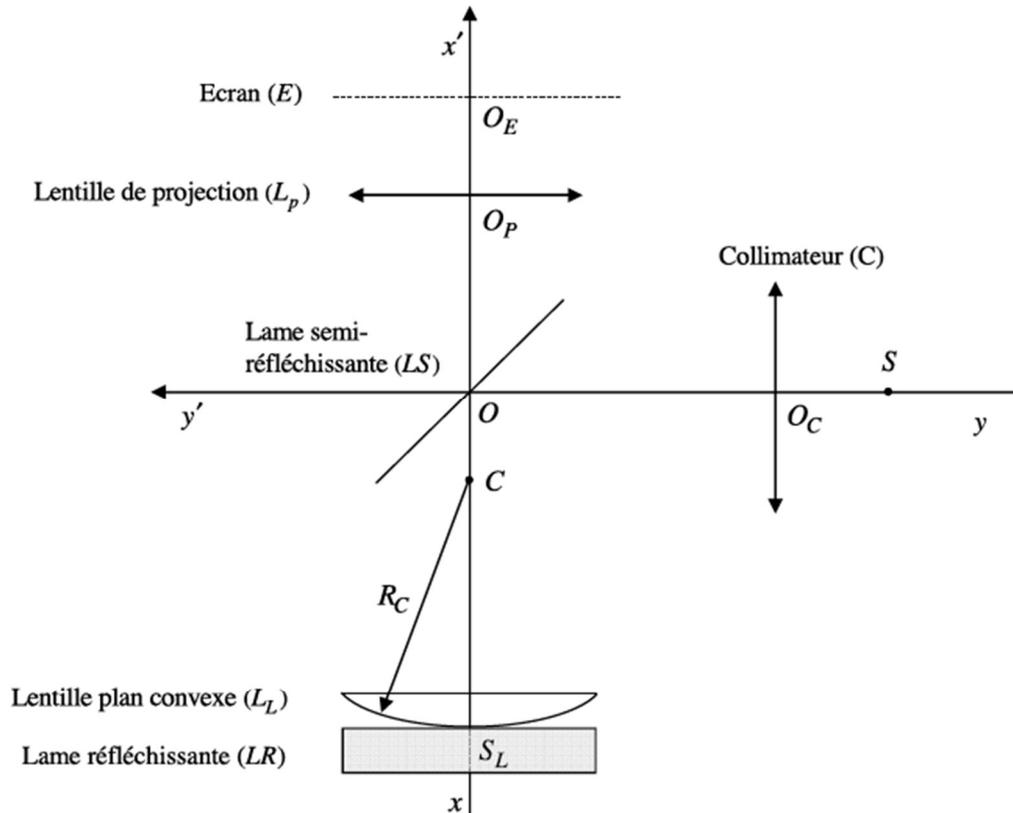


Figure 4 : dispositif des anneaux de Newton (la figure n'est pas à l'échelle)

Un collimateur fournit, à l'aide d'une source ponctuelle S située au foyer principal objet d'une lentille convergente de centre O_C , un faisceau de lumière parallèle, monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ_0 qui tombe sur une lame semi-réfléchissante (LS) d'épaisseur négligeable, centrée en O et inclinée à 45° sur l'axe du collimateur (yy'). Une partie du faisceau se réfléchit parallèlement à l'axe (xx'), axe du système centré formé de la lentille plan convexe étudiée (L_L) et de la face plane de la lame réfléchissante (LR) qui sont en contact ponctuel au point S_L . L'intervalle situé entre la face sphérique de rayon R_C de centre C de (L_L) et la face plane réfléchissante de (LR) forme une lame d'air d'épaisseur e qui varie en fonction de la distance r à l'axe du système (**figure 5**, page suivante)

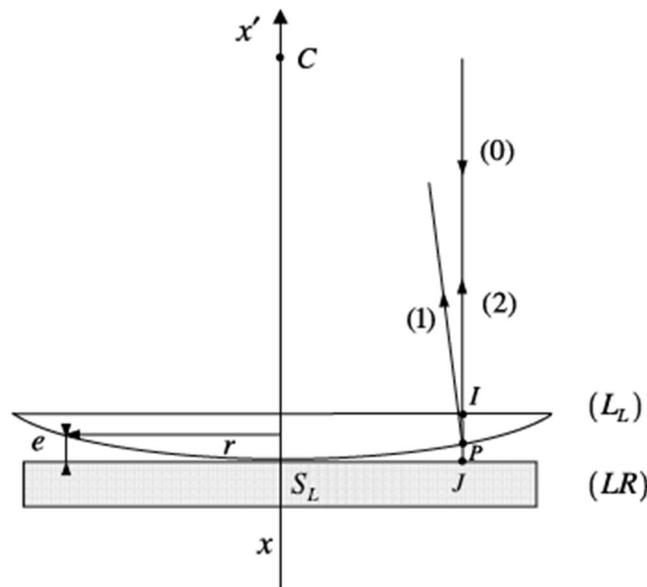


Figure 5 : marche d'un rayon lumineux (0) réfléchi soit par la face sphérique de (L_L) (rayon (1)) soit par la surface plane de (L_R) (rayon (2)).

II.1. L'onde plane tombant sur la lentille (L_L) (rayon (0)) se divise en deux ondes de même amplitude à l'interface verre-air au point P . La première onde est réfléchie à l'interface verre-air (rayon (1)) tandis que la seconde est totalement réfléchie en J sur (L_R) (rayon (2)). Les deux ondes interfèrent au point P . La figure d'interférences localisée au voisinage de la lentille est visualisée sur l'écran à l'aide de la lentille convergente de projection (L_P) de centre O_P qui forme l'image de la lentille sur l'écran (E) placé perpendiculairement à l'axe (xx') au point O_E (figure 4, précédente)

II.1.a Donner l'expression de l'épaisseur e de la lame d'air en fonction de r et R_C .

II.1.b On se place dans le cas où le rayon de courbure de la lentille est très grand devant son diamètre d'ouverture. Montrer que dans ce cas, l'épaisseur peut se mettre sous la forme : $e \cong \alpha \frac{r^2}{R_C}$ où α est une constante numérique dont on précisera la valeur.

II.1.c L'épaisseur e étant très faible par rapport à r , donner au point P l'expression de la différence de chemin optique géométrique $\Delta L = L_2 - L_1$ entre les rayons (2) et (1) en fonction de r et R_C .

II.1.d En tenant compte des déphasages introduits lors des différentes réflexions, donner l'expression de la différence de phase $\Delta\Phi$ entre les deux ondes qui interfèrent au point P .

II.1.e En déduire l'expression de l'intensité lumineuse au point P , en fonction de r , R_C , λ_0 et de l'intensité I_0 de l'onde incidente. Justifier l'aspect de la figure d'interférence observée sur l'écran (E) (figure 6, page suivante)

II.1.f Pour quelles valeurs de r , observe-t-on des franges sombres ?

II.2. La figure d'interférence localisée au voisinage de la lentille est projetée sur l'écran (E) par l'intermédiaire de la lentille (L_P) de distance focale image $f_{pi} = +10$ cm. On donne $O_P S_L = 15$ cm. La photographie de la figure d'interférence observée sur l'écran est donnée **figure 6** alors que l'on opère avec une lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda_0 = 546,074$ nm.

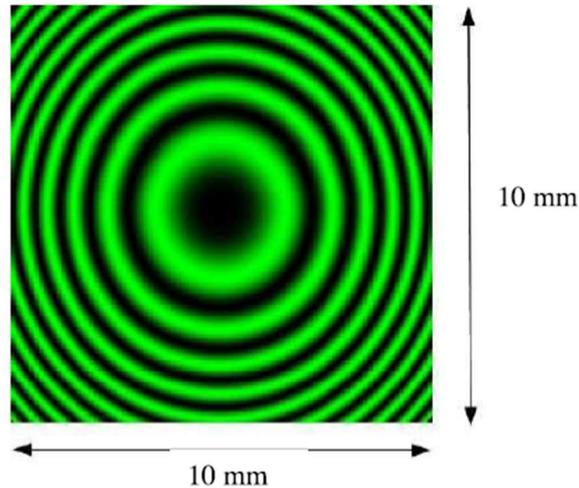


Figure 6 : photographie de la figure d'interférence

- II.2.a** Calculer la distance $O_P O_E$ à laquelle on doit positionner l'écran par rapport à la lentille de projection.
- II.2.b** Calculer le grandissement transversal G_{tP} du système de projection.
- II.2.c** Calculer à partir des informations fournies par la photographie de la **figure 6** le rayon R_C de la lentille (L).

ELECTROMAGNETISME : PROPAGATION EN ELECTROMAGNETISME

Les parties III, IV et V sont indépendantes. Conformément aux usages internationaux, les vecteurs sont notés en gras tandis que les grandeurs complexes sont soulignées d'une barre.

PARTIE III : REFLEXION D'UNE ONDE ELECTROMAGNETIQUE

Dans l'espace, défini par le repère (O, x, y, z) , une onde plane électromagnétique, progressive, sinusoïdale, monochromatique de pulsation ω et polarisée rectilignement suivant Ox arrive, conformément à la **figure 7**, avec l'incidence i sur l'interface en $z=0$ séparant le vide ($z < 0$) d'un milieu conducteur métallique parfait non chargé ($z > 0$) de permittivité et perméabilité assimilables respectivement à $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$ et $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$. On s'intéresse aux champs complexes caractérisant les ondes.

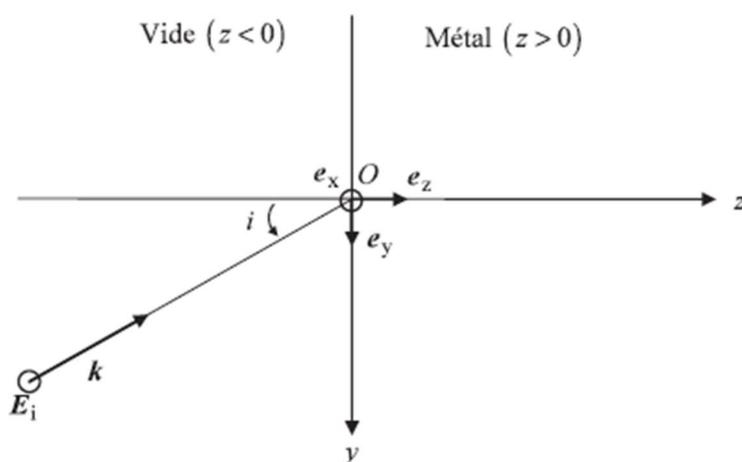


Figure 7 : onde plane électromagnétique incidente

III.1. Onde incidente

- III.1.a Rappeler ce qu'est une onde progressive.
- III.1.b Déterminer les composantes du vecteur de propagation \underline{k} de l'onde incidente.
- III.1.c Ecrire en notations complexes, en un point M du vide repéré par ses coordonnées cartésiennes x , y et $z < 0$ et à un instant t donné, l'expression du champ électrique \underline{E}_i . On notera E_0 son amplitude et on prendra la convention $\exp[-j(\omega t - \varphi)]$ avec $j^2 = -1$.
- III.1.d Dédurre, des équations de Maxwell, l'équation de structure de l'onde.

- III.1.e** Ecrire en notations complexes en fonction de E_0 , en M et à l'instant t , l'expression du champ magnétique \underline{B}_i associé à \underline{E}_i . Quelle est la direction de polarisation de \underline{B}_i ?
- III.1.f** Déterminer l'expression du vecteur de Poynting réel \mathbf{R} de l'onde incidente. Quelle est sa valeur moyenne temporelle $\langle \mathbf{R} \rangle$? Quelle est la direction de \mathbf{R} ? Justifier.

III.2. Onde réfléchie

- III.2.a** Après avoir énoncé les lois de Descartes pour la réflexion, déterminer l'expression du vecteur de propagation \mathbf{k}_r de l'onde réfléchie. On suppose que la polarisation de l'onde réfléchie est du même type et de même direction que celle de l'onde incidente.
- III.2.b** Donner l'expression générale, en M et à l'instant t , du champ électrique \underline{E}_r de l'onde réfléchie, d'amplitude E_{0r} .
- III.2.c** En déduire l'expression générale du champ magnétique \underline{B}_r de l'onde réfléchie.
- III.2.d.** On rappelle les relations de passage des champs électriques et magnétiques :

$$\overline{E}_2 - \overline{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \overline{\mathbf{n}_{1 \rightarrow 2}} \quad \overline{B}_2 - \overline{B}_1 = \mu_0 \overline{\mathbf{J}_s} \wedge \overline{\mathbf{n}_{1 \rightarrow 2}}$$

Quelles composantes des champs électriques et magnétiques sont continues en $z = 0$. Sachant que dans le métal parfait, les champs électriques et magnétiques sont nuls, exprimer E_{0r} en fonction de E_0 .

- III.2.e** Déterminer l'expression du vecteur de Poynting réel \mathbf{R}_r de l'onde réfléchie. Quelle est sa valeur moyenne temporelle $\langle \mathbf{R}_r \rangle$? Comparer $\langle \|\mathbf{R}_r\| \rangle$ avec $\langle \|\mathbf{R}\| \rangle$. Quelle est la direction de \mathbf{R}_r ? Justifier.

III.3. Onde résultante

- III.3.a** Déterminer les expressions des champs réels résultants électrique E_t et magnétique B_t dans le vide.
- III.3.b** Déterminer l'expression du vecteur de Poynting résultant \mathbf{R}_t ainsi que sa valeur moyenne temporelle $\langle \mathbf{R}_t \rangle$. Commenter.

PARTIE IV : COURANT DANS UN CONDUCTEUR EN REGIME VARIABLE

Le conducteur métallique ci-dessus n'est plus supposé parfait mais possède une conductivité γ , ce dernier paramètre intervenant dans la loi d'Ohm locale. Ce conducteur est le siège d'un courant volumique \underline{J} sinusoïdal de pulsation élevée ω . On admet que la loi d'Ohm locale liant le courant volumique et le champ électrique est vérifiée dans le domaine de fréquences considérées.

IV.1 Ecrire les équations locales de Maxwell pour ce milieu non chargé.

IV.2 Définir le courant de déplacement \underline{J}_D et montrer, qu'à très haute fréquence, son amplitude est négligeable devant celle du courant de conduction \underline{J}_C . Pour cela, on prendra l'exemple du cuivre de conductivité $\gamma = 5,7 \cdot 10^7$ S.I. à la fréquence $\nu = 100$ MHz. On négligera par la suite le courant de déplacement dans le conducteur.

IV.3 Montrer que \underline{J} satisfait à une équation aux dérivées partielles de la forme $\Delta \underline{J} - \alpha \frac{\partial \underline{J}}{\partial t} = 0$, où α est une constante à déterminer en fonction de μ_0 et de γ . On rappelle, que pour le champ de vecteurs \underline{F} , $\nabla \wedge (\nabla \wedge \underline{F}) = \nabla(\nabla \cdot \underline{F}) - \nabla^2 \underline{F}$, dans laquelle ∇ représente l'opérateur nabla.

IV.4 Le courant volumique \underline{J} est parallèle à l'axe Oy et ne dépend que du temps t et de la coordonnée z .

IV.4.a Ecrire l'équation aux dérivées partielles satisfaite par $\underline{J}(z, t)$.

IV.4.b Vérifier qu'en notation complexe l'expression de $\underline{J}(z, t)$ peut être du type $\underline{J}(z, t) = \underline{J}_0 \exp(-z/\delta) \exp[j((z/\delta) - \omega t)]$ où δ et ω sont des constantes.

IV.4.c Expliciter δ en fonction de ω , μ_0 et γ .

IV.4.d Calculer δ en utilisant les données numériques fournies au **IV.2**. Préciser son unité et conclure sur la pénétration du courant dans un conducteur à très haute fréquence.

IV.5 Donner l'expression réelle de \underline{J} dans le conducteur et en déduire l'expression du champ électrique réel $\underline{E}(M, t)$ en tout point M du conducteur. Déterminer l'expression de la puissance volumique moyenne $\ll P_j \gg$ dissipée par effet Joule sur une période d'oscillation du champ et dans la totalité du conducteur, en fonction du module de \underline{J}_0 , des paramètres δ et γ et de la surface S du conducteur.

PARTIE V : SUPRACONDUCTIVITE / EFFET MEISSNER

Certains conducteurs métalliques, comme le plomb, deviennent supraconducteurs à température suffisamment basse. On se replace dans les configurations géométriques précédentes avec le vide ($z < 0$) et le milieu conducteur ($z > 0$).

V.1. On admettra qu'un tel supraconducteur est un conducteur parfait pour lequel la densité volumique de courant J_c est reliée au potentiel vecteur A par $J_c = -\frac{ne^2}{m_e} A$, A étant choisi de

façon à ce que sa divergence soit nulle, n , e et m_e représentant respectivement le nombre d'électrons de conduction par unité de volume, la charge élémentaire et la masse de l'électron.

V.1.a Rappeler la contrainte imposée sur le champ électrique intérieur au matériau.

V.1.b Calculer une quantité δ de même nature physique que dans la partie précédente (partie IV) et qui peut se mettre ici sous la forme $\delta = \left(\frac{m_e}{ne^2\mu_0} \right)^{1/2}$ dans le cas du plomb en considérant $n = 10^{28} \text{ m}^{-3}$, $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ et $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.

V.2 Ecrire les équations de Maxwell à l'intérieur du supraconducteur pour les champs électrique et magnétique. Montrer que ce dernier vérifie une équation de la forme $\Delta \mathbf{B} - \lambda^2 \mathbf{B} = 0$, où λ est une constante que l'on exprimera en fonction de δ .

V.3 On suppose qu'à l'extérieur du matériau supraconducteur règne un champ magnétique statique et uniforme $\mathbf{B}_{\text{ext}}(B_0, 0, 0)$.

V.3.a Le champ magnétique étant pris continu à l'interface $z = 0$, comment varie le champ \mathbf{B} à l'intérieur du supraconducteur en fonction de z ?

V.3.b Des assertions suivantes "l'effet Meissner consiste en l'expulsion du champ magnétique du volume du supraconducteur" ou "le champ magnétique est nul à l'intérieur d'un supraconducteur", quelle est celle qui vous semble la plus correcte ? Justifier votre réponse. Pour la fin de l'épreuve, on conservera cette dernière.

V.4 Dédurre des conditions de passage à la traversée de la surface, l'expression du vecteur de densité surfacique de courant \mathbf{J}_s qui apparaît sur la surface du supraconducteur.

V.5 Montrer qu'il existe une force électromagnétique par unité de surface du supraconducteur. Quelle est sa direction ? Quelle pression exerce-t-elle ?