

Interférences à ondes multiples - Réseau

I- Présentation des réseaux

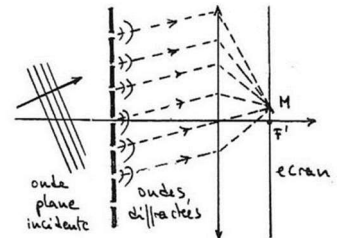
Un réseau (diffractant) est un dispositif interférentiel à division du front d'onde constitué d'un très grand nombre de traits diffractant parallèles répartis périodiquement.

Ordre de grandeur :

- Période spatiale des motifs ou « pas » du réseau : $a \sim 1 \text{ à } 10 \mu\text{m}$
- Fréquence spatiale des motifs : $\frac{1}{a} \sim 100 \text{ à } 1000 \text{ traits par mm (en mm}^{-1}\text{)}$
- Longueur du réseau : qq cm
- Nombre de motifs : $N \sim 10^3 \text{ à } 10^4$

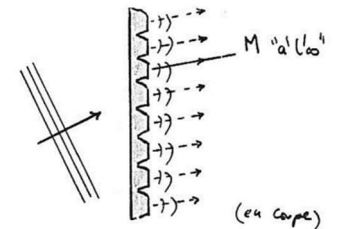
Exemple de travail : plaque opaque percée de N fentes

Le réseau se comporte comme un diviseur d'onde et crée N ondes secondaires cohérentes à partir de l'onde primaire. L'intensité observée en sortie résulte de la superposition de N ondes secondaires. On parle d'interférence à « N ondes » ou « à ondes multiples »



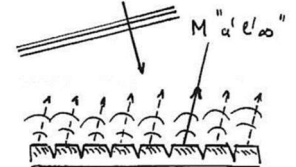
Exemples plus réalistes

En transmission : plaque de verre gravée périodiquement de « traits »
La plaque devient opaque un niveau des traits et est transparente ailleurs ; le bloc de verre entre deux traits est le motif diffractant qui émet une onde secondaire.



En réflexion : plaque métallique (miroir) gravé périodiquement de traits. Même principe : chaque « mini miroir » diffracte une onde secondaire.

La face d'un CD se comporte comme un réseau.



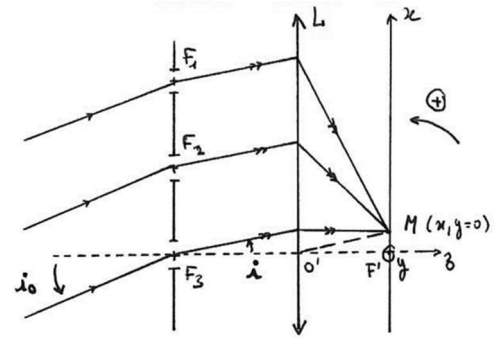
Cadre de l'étude :

- Eclairage par une onde plane monochromatique (lumière cohérente)
- Observation « à l'infini » / dans le plan focal image d'une lentille convergente.

II- Réseau de fente éclairé par une onde plane : condition d'interférences exactement constructives et existence de pics d'intensité. Finesse des pics.

Le réseau est formé de fentes « très longues » parallèles à $\vec{u}_y$: l'intensité observée est invariante par translation selon $\vec{u}_y$, comme pour les fentes d'Young.

- On ne s'intéresse pas à la diffraction en elle-même mais aux interférences secondaires entre les ondes secondaires (comme dans l'étude des trous d'Young)
- L'invariance permet de chercher l'intensité $I(M)$ pour un plan de coordonnées $(x, y = 0)$ et de se limiter à un schéma plan.
- Notations :
 F_1, F_2 , etc ... sont les centres des fentes considérées comme les sources des ondes secondaires.
 i_0 : angle orienté que fait la direction de l'onde plane incidente avec la normale au réseau.
 i : angle orienté repérant la direction du point M « à l'infini » que l'on étudie par rapport à la normale au réseau.



Attention, les angles sont orientés : **faire le schéma avec i et i_0 positifs.**

Proposition :

Le déphasage en M entre deux ondes diffractées par deux fentes successives s'écrit :

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} a (\sin i - \sin i_0)$$

Démonstration :

Proposition :

En tout point M repéré par un angle i vérifiant $\varphi = p \cdot 2\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$ c'est-à-dire

$$\sin i - \sin i_0 = p \frac{\lambda}{a}, p \in \mathbb{Z}, \text{ on observe un important maximum d'intensité appelé « pic$$

d'intensité du réseau ».

L'entier relatif p permet de numérotter les pics. On l'appelle « ordre » du pic

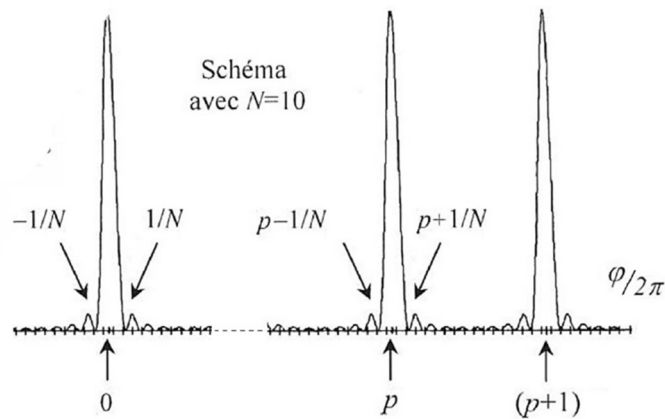
Démonstration :

Proposition :

L'intensité diffractée par un réseau hors de pics est quasi nulle.

La largeur du pic d'ordre p est obtenue par la condition : $p - \frac{1}{N} \leq \frac{\varphi}{2\pi} \leq p + \frac{1}{N}$

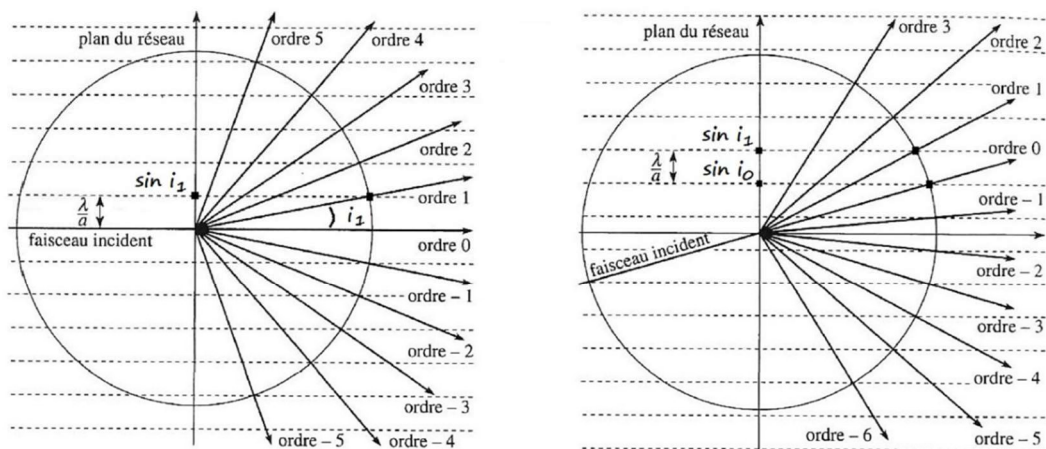
Comme $N \gg 1$, les pics sont extrêmement « fins ».



Justification :

Réseau éclairé par un faisceau laser - illustration des pics observés :

$$\sin i = \sin i_0 + p\lambda/a$$



On peut se contenter d'une approche qualitative. Plus quantitativement, on peut exploiter la formule $\sin i = \sin i_0 + p\lambda/a$, en construisant un cercle unité et une « échelle » de pas λ/a , normale au plan du réseau, dont les intersections avec le cercle donnent les directions des pics. Il faut bien positionner l'échelle à partir du pic d'ordre 0 qui se trouve dans la direction de l'optique géométrique.

Remarque : les ordres p visibles sont ceux vérifiant $\left| \sin i_0 + p \frac{\lambda}{a} \right| \leq 1$

III- Calcul de l'éclairement à l'infini

On souhaite ici calculer explicitement $I(M)$. Les N ondes qui se superposent en M étant cohérentes, il faut d'abord calculer $\underline{s}(M, t)$ en sommant les contributions de ces N ondes, puis en déduire $I(M) = |\underline{s}|^2$

Pour y arriver simplement, il faut s'appuyer sur le schéma ci-contre (repris du paragraphe I-) où on aura choisi i_0 et i positifs et numéroté les fentes de 0 à $N-1$.

Remarque : il faut choisir un indice de sommation sur les N fentes : i et p sont proscrits (angle repérant M et ordre des pics par la suite) ; n et k sont possibles mais attention à ne pas confondre avec un indice optique ou un vecteur d'onde ! Nous choisirons m . On appellera F_m le centre de la fente numéro m .

$$\underline{s}(M, t) = \sum_{m=0}^{N-1} \underline{s}_m(M, t) = \sum_{m=0}^{N-1} s_0 e^{j\left(-\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}(SF_m M) + \varphi^0\right)}$$

Attention : S étant à l'infini (onde plane), le chemin optique $(SF_m M)$ diverge pour tout m .

Idee : on met en facteur dans la somme l'amplitude $\underline{s}_0(M, t)$ correspondant à l'onde diffractée par la fente numérotée 0, ce qui fait apparaître la différence $(SF_m M) - (SF_0 M)$ qui est finie.

D'une certaine façon, cela revient à choisir $(SF_0 M)$ comme chemin « de référence ».

$$\underline{s}(M, t) = \underbrace{s_0 e^{j\left(-\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}(SF_0 M) + \varphi^0\right)}}_{\underline{s}_0(M, t)} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{\lambda}[(SF_m M) - (SF_0 M)]}$$

$\Phi_0(M, t)$ est la phase de M à t de l'onde qui a suivi le chemin « de référence » $SF_0 M$.

Or, en introduisant φ , déphasage entre deux ondes diffractées par deux fentes successives, on a par périodicité du motif : $\frac{2\pi}{\lambda}[(SF_m M) - (SF_0 M)] = m\varphi$ et $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}a(\sin i - \sin i_0)$

Remarque : On voit ici l'intérêt de numéroté à partir de 0 car si on part de $m = 1$, on a

$$\frac{2\pi}{\lambda}[(SF_m M) - (SF_1 M)] = (m-1)\varphi ; \text{ ce qui est moins pratique.}$$

Et si on numérote les fentes de bas en haut : $\frac{2\pi}{\lambda}[(SF_m M) - (SF_0 M)] = -m\varphi$; le signe n'est pas gênant, mais sera toujours présent.

$$\text{On a alors : } \underline{s}(M, t) = s_0 e^{j\Phi_0(M, t)} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} e^{jm\varphi} = s_0 e^{j\Phi_0(M, t)} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} (e^{j\varphi})^m = s_0 e^{j\Phi_0(M, t)} \frac{1 - (e^{j\varphi})^N}{1 - e^{j\varphi}}$$

$$\text{Astuce calculatoire : } \frac{1 - (e^{j\varphi})^N}{1 - e^{j\varphi}} = \frac{e^{j\frac{N\varphi}{2}} \cdot e^{-j\frac{N\varphi}{2}} - e^{j\frac{N\varphi}{2}} \cdot e^{-j\frac{N\varphi}{2}}}{e^{j\frac{\varphi}{2}} \cdot e^{-j\frac{\varphi}{2}} - e^{j\frac{\varphi}{2}} \cdot e^{-j\frac{\varphi}{2}}} = e^{j(N-1)\frac{\varphi}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

$$\text{Ainsi } I(M) = |\underline{s}|^2 = s_0^2 \underbrace{\left| e^{j\left(\Phi_0 + (N-1)\frac{\varphi}{2}\right)} \right|^2}_1 \frac{\sin^2\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

Conclusion :
$$I(M) = s_0^2 \frac{\sin^2\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{N^2 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \quad \text{avec} \quad I_0 = N^2 s_0^2 = I_{\max}$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} a (\sin i - \sin i_0)$$

I est maximale pour $\varphi = 0 [2\pi]$ et vaut $I_{\max} = N^2 s_0^2$

I s'annule pour $\varphi = \frac{2\pi}{N} \left[\frac{2\pi}{N} \right]$ (sauf $\varphi = 0 [2\pi]$)

I présente des maximums secondaires pour $\varphi = \frac{3\pi}{N}, \frac{5\pi}{N}, \dots$ d'intensité $\frac{I_0}{N^2} \ll I_0$

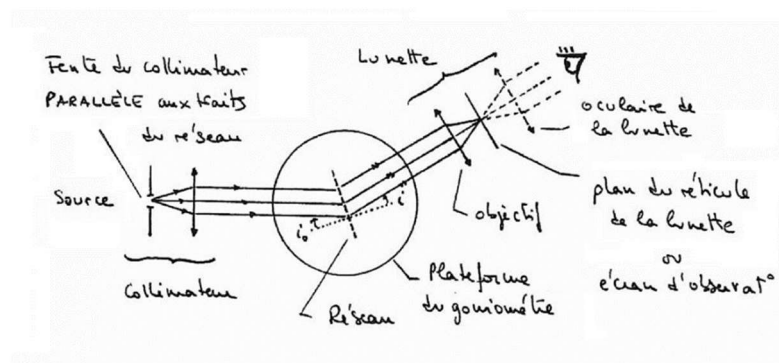
Toute la lumière est concentrée dans les pics.

IV- Utilisation d'un réseau en spectroscopie

Idée : La position angulaire d'un pic lumineux d'ordre $p \neq 0$ dépend de λ .

On peut se servir d'un réseau comme d'un **élément dispersif** pour faire de la spectroscopie (analyse d'un spectre inconnu)

Montage : le réseau est posé sur la plateforme d'un goniomètre, éclairé via un collimateur à fente et l'observation se fait à l'aide d'une lunette.

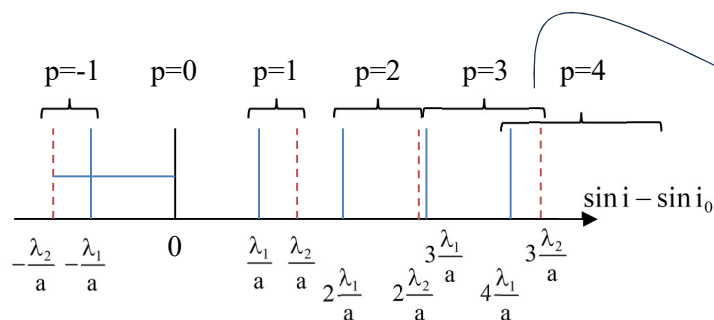


i_0 est réglable par orientation du réseau par rapport au collimateur.

Si la fente du collimateur est infiniment fine, l'onde incidente est associée à une unique valeur de i_0 (inexact en pratique)

Observation : on utilise l'ordre 1 ou 2 et on relie la position angulaire de la raie à la longueur

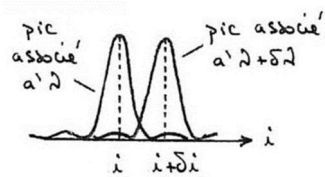
d'onde par $\sin i - \sin i_0 = p \frac{\lambda}{a}$, $p \in \mathbb{Z}$



Lorsque p devient grand ($p > 3$ avec $\frac{1}{a} \sim 100$ traits / mm) on observe un **recouvrement d'ordre**

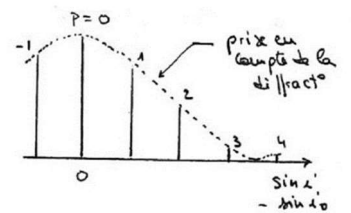
Calcul de l'écart angulaire entre deux pics associés à deux longueurs d'ondes proches

$$\left\{ \begin{array}{ll} 1^{\text{er}} \text{ pic :} & \{ \lambda, i(\lambda) \text{ noté } i \} : \quad \sin i = p \frac{\lambda}{a} + \sin i_0 \\ 2^{\text{ème}} \text{ pic :} & \{ \lambda + \delta\lambda, i(\lambda + \delta\lambda) \text{ noté } i + \delta i \} : \quad \underbrace{\sin(i + \delta i)}_{\sin(i) + \cos(i)\delta i} = p \frac{\lambda + \delta\lambda}{a} + \sin i_0 \end{array} \right.$$



Ainsi $\boxed{\cos(i)\delta i = p \frac{\lambda}{a}}$ p ordre dans lequel on travaille et a le pas du réseau

- Pour séparer les deux pics, on a intérêt à travailler dans un ordre élevé avec un réseau de faible pas (ie avec un grand nombre de traits pas mm)
Au lbao : 300, 600, 1000 traits par mm.
- p est limité par le recouvrement des ordres, le nombre d'ordre visibles et la chute d'intensité à mesure que l'ordre augmente, la diffraction se faisant préférentiellement dans la direction $i = i_0$



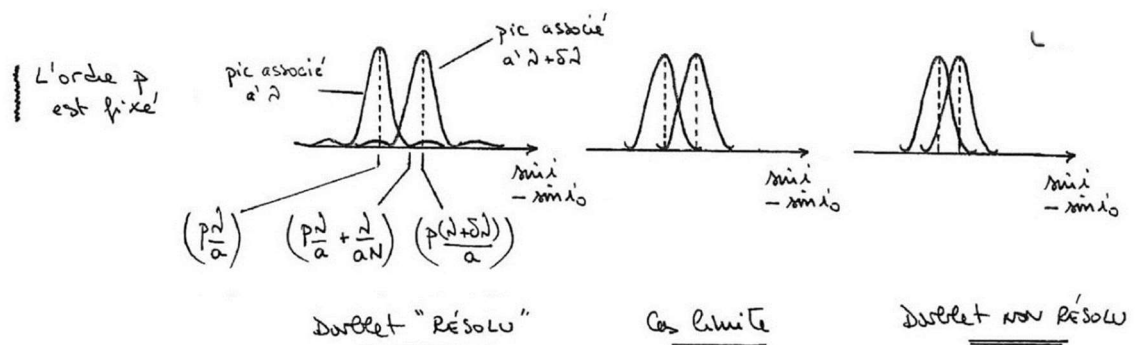
Séparation d'un doublet dans un ordre p fixé. Critère de Rayleigh.

Il n'est pas toujours pratique de raisonner sur l'angle i ; il est préférable de raisonner sur la quantité $\sin i - \sin i_0$; sur un axe de cette variable.

Un pic de longueur d'onde λ est centré en $p \frac{\lambda}{a}$ (ce qui correspond à $\frac{\varphi}{2\pi} = p$)

La demie largeur d'un pic (pour tout p) est de $\frac{\lambda}{Na}$ (ce qui correspond à $\frac{\varphi}{2\pi} = p \pm \frac{1}{N}$)

Qualitativement



Quantitativement : $p \frac{(\lambda + \delta\lambda)}{a} \geq p \frac{\lambda}{a} + \frac{\lambda}{Na} \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{\delta\lambda}{\lambda} \geq \frac{1}{pN}}$$

Remarque : la quantité $\frac{\lambda}{\delta\lambda_{\min \text{ résolu}}} = pN$ est appelée pouvoir de résolution intrinsèque du réseau

dans l'ordre p .

Cette notion est très théorique : en pratique, la résolution est limitée par la taille de la fente du collimateur qui « étale » géométriquement les pics.

V- Complément : minimum de déviation