

Dimensionnement d'une installation de liquéfaction. (Partie 1 de Mines-Ponts PSI 2015)

1 Le diazote est assimilé à un gaz parfait diatomique. Aux températures usuelles, en notant R la constante des gaz parfaits, la capacité thermique à volume constant associée à une quantité de matière n de gaz s'écrit par conséquent

$$C_V = \frac{5}{2}nR$$

Rq : Nous verrons dans le cours de physique statistique une justification de ce résultat :

Pour un gaz parfait, l'énergie interne est associée aux nombres de degrés de liberté des molécules. Par ailleurs, le théorème d'équipartition de l'énergie, issu de la physique statistique, assure que chaque degré de liberté des particules contribue à raison de $RT/2$ à l'énergie cinétique molaire du gaz. Pour un gaz diatomique, aux températures usuelles, les degrés de liberté sont les translations du centre de masse de la molécule dans les trois directions de l'espace (trois degrés de liberté) et la rotation de la molécule autour de son centre de masse (deux degrés de liberté). Ainsi, cinq degrés de liberté contribuent à l'énergie interne molaire, d'où $U = 5/2nRT$.

De plus, d'après la relation de Mayer, pour un gaz parfait

$$C_P = C_V + nR = \frac{7}{2}nR$$

d'où

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{7}{5} = 1,4$$

Le compresseur réalise la compression adiabatique réversible d'un gaz parfait. Il est donc possible d'appliquer l'une des formes de la loi de Laplace. Ici, il convient de choisir celle faisant intervenir la température et la pression

$$T^\gamma P^{1-\gamma} = C^{te}$$

Ainsi pour chaque compresseur $P_{entrée}^{1-\gamma} T_{entrée}^\gamma = P_{sortie}^{1-\gamma} T_{sortie}^\gamma$ soit $r = \frac{P_{sortie}}{P_{entrée}} = \left(\frac{T_{sortie}}{T_{entrée}}\right)^{\gamma/\gamma-1}$

Remarque : on peut se poser la question de « l'applicabilité » de la loi de Laplace en écoulement stationnaire. Elle découle de l'application du second principe en écoulement :

$D_m (s_{sortie} - s_{entrée}) = \delta S_{créée} + \delta S_{échangée} = 0$ (évolution adiabatique et réversible). Donc

$s_{sortie} - s_{entrée} = 0$; ce qui redonne les lois de Laplace

La température d'entrée du gaz est fixée à T_E et la température de sortie du diazote ne peut dépasser T_{max} , si bien que dans le cas limite, on obtient la valeur maximale du rapport de compression

$$r_{max} = \left(\frac{T_{max}}{T_E}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

Par ailleurs, les étages de compression étant tous identiques,

$$p_A = r^N p_E$$

Utilisons alors la valeur limite r_{max} afin de calculer le nombre minimum d'étages de compression nécessaires N_{min} . En prenant le logarithme de l'expression précédente, il vient

$$N_{min} = \frac{\ln(P_A/P_E)}{\ln r_{max}} = \frac{(\gamma-1) \ln(P_A/P_E)}{\gamma \ln(T_{max}/T_E)} = 4,6$$

Le nombre N étant entier, choisissons donc l'entier immédiatement supérieur comme nombre minimal de compresseur, soit

$$\boxed{N = 5}$$

$$Rq : \text{alors, } r = 100^{1/5} = \underline{2,51}$$

2 Le rapport de compression r étant maintenu constant, le même nombre d'étages de compression est nécessaire pour obtenir la compression finale p_A . Par conséquent,

Le nombre N de compresseurs est identique.

Si l'ajout d'irrégularités ne modifie pas le nombre d'étages de compression nécessaires, en revanche, la dimension du corps des cylindres des compresseurs est augmentée pour maintenir le même rapport r . Une puissance mécanique supérieure est donc nécessaire pour l'actionnement de chacun des compresseurs.

En pratique, la prise en compte d'irrégularités s'accompagne d'une augmentation plus élevée de la température lors de la compression. Il est alors nécessaire de diminuer r afin de vérifier la contrainte sur la température. (En effet, d'après le second principe, la variation d'entropie massique Δs à travers le compresseur est nulle dans le cas adiabatique ($s_e = 0$) et réversible ($s_c = 0$), alors qu'elle est positive dans le cas adiabatique ($s_e = 0$) et irréversible ($s_c > 0$). Compte tenu de l'identité thermodynamique : $dh = Tds + vdp$, pour une même variation de pression, une augmentation d'entropie conduira à une élévation plus importante de l'enthalpie massique h , donc de la température.)

3 En se plaçant comme indiqué par l'énoncé dans le cas $N = 5$, le rapport de compression prend la valeur $r = (P_A/P_E)^{1/N}$. Calculons la température T_{sortie} du diazote en sortie de l'un des compresseurs. En utilisant la relation de Laplace, avec T_E la température d'entrée, il vient

$$\boxed{T_{\text{sortie}} = r^{(\gamma-1)/\gamma} T_E = \left(\frac{P_A}{P_E}\right)^{(\gamma-1)/(N\gamma)} T_E} \quad Rq : T_{\text{sortie}} = \underline{390 \text{ K}}$$

Appliquons le premier principe industriel aux systèmes constitués par chacun des deux fluides dans l'échangeur thermique. En toute généralité, le bilan s'écrit, en notant P_θ et P_m les puissances thermique et mécanique reçues par le fluide et \mathcal{D} le débit massique :

$$\mathcal{D} \times \Delta(h + e_c + e_p) = P_\theta + P_m$$

Dans le cas présent, l'ensemble est isolé de l'extérieur. L'unique échange d'énergie est le transfert thermique d'un fluide vers l'autre. Par ailleurs, la variation d'énergie macroscopique est supposée négligeable : il n'y a ni variation de l'énergie cinétique, ni variation de l'énergie potentielle de pesanteur. Écrivons le bilan pour chacun des deux fluides :

$$\mathcal{D}_{\text{azote}} \Delta h_{\text{azote}} = P_{\theta, \text{azote}} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_{\text{eau}} \Delta h_{\text{eau}} = P_{\theta, \text{eau}} = -P_{\theta, \text{azote}}$$

Finalement,

$$\boxed{\mathcal{D}_{\text{eau}} \Delta h_{\text{eau}} + \mathcal{D} \Delta h_{\text{azote}} = 0}$$

Plaçons-nous dans le cas limite où la température de sortie de l'eau est au maximum admissible T'_{max} . L'eau est assimilée à une phase condensée incompressible et le diazote à un gaz parfait diatomique, de sorte que les variations d'enthalpie s'expriment en fonction des capacités thermiques massiques

$$\Delta h_{\text{eau}} = c_e(T'_{\text{max}} - T_e) \quad \text{et} \quad \Delta h_{\text{azote}} = \frac{7R}{2M}(T_E - T_S)$$

Finalement,

$$\boxed{\frac{\mathcal{D}_{\text{eau}}}{\mathcal{D}} = \frac{7R}{2M} \frac{[(P_A/P_E)^{(\gamma-1)/(N\gamma)} - 1] T_E}{c_e(T'_{\text{max}} - T_e)} = 0,32}$$

D'après le schéma de l'installation, le réfrigérant se fait par une circulation d'eau à contre sens de celle de l'azote, ce qui permet a priori de faire chuter la température du diazote jusqu'à 280 K (température d'entrée de l'eau) et risque de faire monter la température de l'eau jusqu'à 390 K (température du diazote à la sortie du compresseur et à l'entrée du réfrigérant), d'où la nécessité de contrôler le débit d'eau pour éviter de dépasser les 350 K. En revanche, si la circulation des 2 fluides se faisait dans le même sens, la température de l'eau en sortie du réfrigérant serait nécessairement inférieure ou égale à la température du diazote en sortie du réfrigérant, donc à 300 K ; la limite des 350 K ne risquerait donc pas d'être atteinte ! (Et dans ce cas, la formule précédente appliquée avec 300 K au lieu de $T'_{max} = 350$ K conduit à un rapport $\mathcal{D}_{eau} / \mathcal{D}$ de 1,12).

4 La courbe \mathcal{C}_1 est une isotherme. Ainsi,

La grandeur conservée le long de la courbe \mathcal{C}_1 est la température.

À basse pression, le diazote est assimilable à un gaz parfait. La seconde loi de Joule permet alors d'affirmer que la variation d'enthalpie peut s'écrire

$$dh = c_p dT$$

Les isothermes se confondent alors avec les isenthalpes. Par conséquent, les courbes isothermes présentent des asymptotes verticales dans le domaine des basses pressions, ce que l'on constate sur le diagramme enthalpique.

5 La courbe \mathcal{C}_2 est celle d'une transformation isentropique. Par conséquent,

La grandeur conservée le long de la courbe \mathcal{C}_2 est l'entropie.

Supposons une compression le long de la courbe \mathcal{C}_2 , donc isentropique ($ds = 0$). L'identité thermodynamique rappelée plus haut donne alors :

$$dh = v dP$$

Le volume massique v étant une grandeur positive, le rapport dh/dP est positif. La courbe \mathcal{C}_2 est donc croissante.

6 La partie gauche de la courbe \mathcal{C}_3 jusqu'au point O est la limite pour laquelle tout le diazote est sous forme liquide. C'est la courbe d'ébullition. La partie droite de cette même courbe représente les conditions limites pour lesquelles tout le diazote est sous forme gazeuse, c'est la courbe de rosée.

Notons le point particulier O, appelé point critique. Au-dessus de ce point (pour des pressions élevées donc), il n'existe plus de transition de phase marquée entre l'état liquide et l'état gazeux ; on parle d'état supercritique.

7 La courbe \mathcal{C}_4 étant une isotitre,

La grandeur conservée le long de la courbe \mathcal{C}_4 est le titre x .

Au point M, le diazote est à l'équilibre liquide/vapeur. Il est positionné sur la courbe \mathcal{C}_4 . Sa température est de -200 °C pour une pression de 0,6 bar. Enfin, on lit sur le graphique un titre massique de 10% de liquide et de 90% de vapeur.

En l'absence d'isotitre, le théorème des moments chimiques permet de conclure quant à la composition du mélange liquide-vapeur.

8 D'après le théorème des moments chimiques, l'enthalpie massique en C s'écrit

$$h_C = x h_{liq} + (1 - x) h_{vap}$$

Ce théorème « des moments chimiques » n'est rien d'autre que l'expression de l'extensivité de la fonction H ; on peut en effet retrouver ce résultat en écrivant que pour une masse m de mélange liquide / vapeur, l'enthalpie totale se décompose en :

$$H_{\text{total}} = H_{\text{liq}} + H_{\text{vap}} = m_{\text{liq}} h_{\text{liq}} + m_{\text{vap}} h_{\text{vap}} = m (x h_{\text{liq}} + (1-x) h_{\text{vap}})$$

soit en divisant par m : $h = H_{\text{total}}/m = (x h_{\text{liq}} + (1-x) h_{\text{vap}})$

9 Le débit de diazote en C sous forme liquide vaut $x\mathcal{D}$ tandis que le débit sous forme gazeuse vaut $(1-x)\mathcal{D}$. Au sein du réservoir, il n'y a aucun échange d'énergie avec le milieu extérieur. Par conséquent, l'enthalpie massique du mélange est conservée. La composition du mélange reste donc inchangée. Ainsi, en régime permanent, les débits en sortie et en entrée sont égaux, soit encore

$$\mathcal{D}_m = x\mathcal{D} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}' = (1-x)\mathcal{D}$$

10 Effectuons un bilan d'enthalpie sur le système (E). Pour ce faire, mettons en œuvre comme à la question 3 le premier principe industriel. Les hypothèses de travail sont identiques, si bien que le bilan enthalpique s'écrit

$$\mathcal{D}'(h_E - h_D) + \mathcal{D}(h_B - h_A) = 0$$

Par ailleurs, $h_D = h_{\text{vap}}$. La détente en (V) étant isenthalpique d'après l'énoncé, $h_B = h_C$. En reprenant l'expression de h_C obtenue à la question 8 et l'expression de \mathcal{D}' obtenue à la question 9, il vient

$$0 = (1-x)\mathcal{D}[h_E - h_{\text{vap}}] + \mathcal{D}[xh_{\text{liq}} + (1-x)h_{\text{vap}} - h_A]$$

$$0 = (1-x)h_E + xh_{\text{liq}} - h_A$$

d'où

$$x = \frac{h_E - h_A}{h_E - h_{\text{liq}}}$$

On peut aller plus vite en appliquant astucieusement le 1^{er} principe industriel au fluide s'écoulant dans l'ensemble {Echangeur E, Détendeur V, Réservoir}. Il s'agit d'un système à une entrée où le fluide est dans l'état A avec un débit D et deux sorties où le fluide est respectivement dans l'état E avec un débit $D' = (1-x)D$ et à l'état de diazote liquide (sortie du réservoir) avec un débit $D_m = xD$; le fluide ne recevant aucun travail ni aucun transfert thermique dans le système, il vient :

$$D h_A - (1-x)D h_E - xD h_{\text{liq}} = 0 \quad \text{CQFD}$$

11 Consignons dans un tableau les données relatives aux états A, E, ainsi que les états liquide et gazeux pour l'azote dans le réservoir.

	pression (bar)	température (°C)	enthalpie (kJ.kg ⁻¹)
A	100	27	500
E	1	27	497 (495 à 500 ok)
liquide	1	-196	519 (515 à 520 ok)
vapeur	1	-196	81 (80 à 85 ok)

Les enthalpies données dans le tableau sont issues de la courbe du diagramme enthalpique.

(voir feuille annexe)

A l'équilibre liquide-vapeur, comme c'est le cas dans le réservoir, la variance du système est réduite de 1. Par conséquent, à la pression atmosphérique, la température du mélange est imposée à -196 °C.

Dans le cas de l'équilibre liquide-vapeur, il convient de considérer l'intersection de l'isobare 1 bar avec la courbe de rosée qui constitue l'enthalpie de la phase vapeur (tout l'azote est encore sous forme vapeur, les premières gouttes se forment) et l'intersection de l'isobare avec la courbe d'ébullition qui constitue l'enthalpie de la phase liquide (tout l'azote est encore sous forme liquide, on est à la limite de vaporisation).

La fraction en liquide vaut

$$x = 0,046$$

(qu. 10) : 0,050 (0,042 à 0,058 ok)

Considérons que le modèle du gaz parfait est valide pour le diazote gazeux. Dans ce cas, d'après la seconde loi de Joule, l'enthalpie ne dépend que de la température. Il vient alors

$$h_A = h_E$$

d'où

$$x = 0$$

12 En B, la pression du diazote est de 100 bar. Par ailleurs, la transformation en (V) est isenthalpique. Plaçons le point C à l'intersection de l'isotitre $x = 0,050$ et de l'isobare $P = 1$ bar. Le point B est alors à l'intersection de l'isobare $P = 100$ bar et de l'isenthalpe passant par C. Le point ainsi obtenu est situé entre les isothermes $T = -120$ °C et $T = -110$ °C. (voir feuille annexe)

La température au point B peut donc être estimée à environ $T_B = -117$ °C. L'azote en B est dans l'état supercritique.

(-115 à -119 ok)

13 Le débit de diazote \mathcal{D} s'évalue à partir du débit d'azote liquide produit :

$$\mathcal{D} = \frac{\mathcal{D}_m}{x}$$

Appliquons le premier principe industriel à l'un des compresseurs. Les hypothèses précédentes de conservation de l'énergie macroscopique sont applicables ici. Notons $\mathcal{P}_{\text{moteur}}$ la puissance des actions mécaniques exercées par le compresseur sur le fluide qui le traverse. Il n'y a de plus aucun échange thermique. Ainsi, en notant Δh_{azote} la variation d'enthalpie massique de l'azote par passage dans l'un des compresseurs, il vient

$$\mathcal{D} \Delta h_{\text{azote}} = \mathcal{P}_{\text{moteur}}$$

Dans le cadre du modèle du gaz parfait, en conservant les notations introduites dans la question 3,

$$\Delta h_{\text{azote}} = \frac{7R}{2M} (T_{\text{sortie}} - T_E) = \frac{7R}{2M} T_E (r^{(\gamma-1)/\gamma} - 1)$$

Finalement, la puissance mécanique totale \mathcal{P}_{tot} pour les cinq étages de compression nécessaires s'écrit

$$\mathcal{P}_{\text{tot}} = \frac{7RN \mathcal{D}_m T_E}{2Mx} (r^{(\gamma-1)/\gamma} - 1) = 2,8 \cdot 10^5 \text{ W} \quad (2,4 \text{ à } 3,4 \text{ ok})$$

Cette puissance est calculée pour le débit massique \mathcal{D}_m . Exprimons alors le débit volumique \mathcal{D}_V associé à l'aide de la densité d du diazote

$$\mathcal{D}_V = \frac{\mathcal{D}_m}{d \rho_{\text{eau}}} = 3,7 \cdot 10^{-2} \text{ L.s}^{-1} = 1,3 \cdot 10^2 \text{ L.h}^{-1}$$

Calculons finalement la puissance \mathcal{P} nécessaire pour une machine produisant un débit volumique $\mathcal{D}_{V1} = 1 \text{ L.h}^{-1}$ de diazote liquide.

$$\mathcal{P} = \frac{\mathcal{P}_{\text{tot}} \mathcal{D}_{V1}}{\mathcal{D}_V} = 2,1 \cdot 10^3 \text{ W} \quad (1,7 \text{ à } 2,5 \text{ ok})$$

La puissance nécessaire à un fonctionnement réversible de la machine modélisée dans les questions précédentes est inférieure d'environ 5 % à celle qui existait au Collège de France, qui nécessitait d'après l'énoncé environ 2,2 kW. L'existence d'irréversibilités, inévitables sur une machine réelle, est à l'origine de cette baisse de rendement. Cependant, l'ordre de grandeur trouvé est excellent (presque étonnant...)!

(Attention au commentaire si on a trouvé une valeur > 2,2 kW ; a priori ce n'est pas très satisfaisant.)

—

Problème 2 : Force de poussée d'un turboréacteur de dragster. (Extrait de Mines-Ponts MP 2013)

14 Le gaz est supposé parfait et l'évolution adiabatique réversible donc la loi de Laplace permet d'écrire

$$P_s^{1-\Gamma} T_s^\Gamma = P_e^{1-\Gamma} T_e^\Gamma$$

d'où

$$T_s = T_e \left(\frac{P_e}{P_s} \right)^{(1-\Gamma)/\Gamma}$$

Ainsi,

$$\theta_s = (\theta_e + 273) \left(\frac{P_e}{P_s} \right)^{(1-\Gamma)/\Gamma} - 273 = 547 \text{ } ^\circ\text{C}$$

15 Dans le référentiel où le réacteur est fixe, appliquons le premier principe industriel au fluide qui s'écoule dans la tuyère, en notant q et w_i le transfert thermique et le travail massique reçus par le fluide lors de cet écoulement ; d'après les hypothèses l'énoncé, $q = 0$ (adiabaticité) et $w_i = 0$, d'où :

$$\Delta(h + e_c + e_p) = q + w_i = 0$$

Comme $z_e \approx z_s$ on a : $\Delta e_p = 0$; et comme on néglige la vitesse d'entrée : $\Delta e_c = c_s^2/2$; il vient donc :

$$c_s = \sqrt{2(h_e - h_s)}$$

Or, pour un gaz parfait, $h_e - h_s = c_P(\theta_e - \theta_s)$

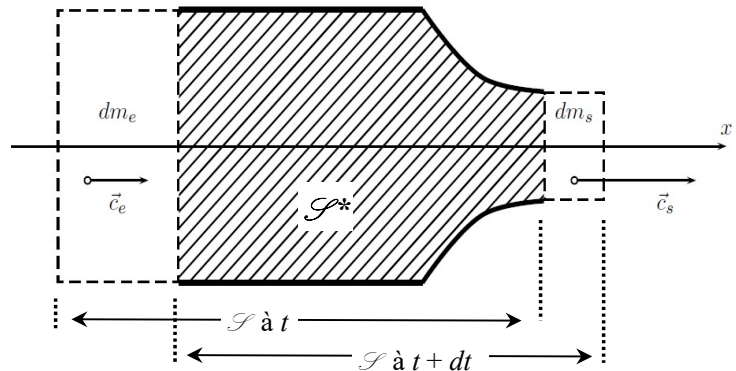
donc
$$\boxed{\vec{c}_s = \sqrt{2 c_P(\theta_e - \theta_s)} \vec{e}_x \quad \text{et} \quad c_s = 841 \text{ m.s}^{-1}}$$

16 **Question délicate...** L'énoncé affirme que la force de poussée cherchée est « générée par la variation de quantité de mouvement du gaz qui entre et qui sort du réacteur ». Cela signifie que tout se passe comme si le système {réacteur + gaz en écoulement} était isolé et que sa quantité de mouvement totale se conservait ; ainsi, entre $t + dt$, une variation $d\vec{p}$ de quantité de mouvement du gaz qui s'écoule induit une variation $d\vec{p}_{\text{réacteur}} = -d\vec{p}$ de quantité de mouvement du réacteur, ce qui équivaut à une force de poussée :

$$\vec{\Pi} = d\vec{p}_{\text{réacteur}}/dt = -d\vec{p}/dt$$

Il faut donc effectuer un bilan de quantité de mouvement ! Mais sur quel système ? Plaçons-nous dans le référentiel du réacteur et considérons un système fermé en écoulement, « à cheval » sur le réacteur, comme celui utilisé habituellement dans la démonstration du 1^{er} principe industriel (schéma ci-dessous). Et au lieu de faire un bilan d'énergie, faisons un bilan de quantité de mouvement entre t et $t + dt$. On note :

- \mathcal{S} le système fermé considéré et $\vec{p}(t)$ sa quantité de mouvement à t ,
- \mathcal{S}^* le système ouvert constitué du fluide situé à chaque instant à l'intérieur du réacteur, et $\vec{p}^*(t)$ sa quantité de mouvement à t ,
- dm_e et dm_s les masses qui entrent et sortent de \mathcal{S}^* entre t , et $t + dt$, de quantités de mouvement respectives $dm_e \vec{c}_e$ et $dm_s \vec{c}_s$.



Sachant qu'en régime permanent $\vec{p}^*(t + dt) = \vec{p}^*(t)$ et $dm_s = dm_e = D_m dt$, la variation de quantité de mouvement de \mathcal{S} entre t et $t + dt$ s'écrit :

$$\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) = \{ \vec{p}^*(t + dt) + dm_s \vec{c}_s \} - \{ \vec{p}^*(t) + dm_e \vec{c}_e \} = dm_s \vec{c}_s - dm_e \vec{c}_e = D_m dt (\vec{c}_s - \vec{c}_e)$$

Finalement :
$$\boxed{\vec{\Pi} = -d\vec{p}/dt = D_m (\vec{c}_e - \vec{c}_s) = D_m (c_e - c_s) \vec{e}_x}$$

| Cette poussée est bien à contresens de l'écoulement du fluide, car $c_s > c_e$.

AN : $c_e = 0$ (départ arrêté et pas de vent) ; $c_s = 841 \text{ m/s}$ (qu.15) ; $D_m = 80,0 \text{ kg/s}$

$$\rightarrow \boxed{\Pi = 6,73 \cdot 10^4 \text{ N}}$$

17 En ne prenant en compte que la poussée comme force selon l'axe horizontal (Ox), le théorème du centre d'inertie appliqué au dragster et projeté sur cet axe donne pour norme a de l'accélération :

$$a = \frac{\Pi}{m}$$

d'où

$$\boxed{a = \frac{\Pi}{m g} g = 6,47 g}$$

Cette valeur est élevée, bien que supportable par un corps humain entraîné.

Les pilotes d'avion de chasse subissent des accélérations jusqu'à environ $10 g$. Une accélération de l'ordre du g peut être ressentie dans certains manèges (et provoque déjà des sensations fortes).

Problème 3 : éléments de correction

I-A.1- Pour un diélectrique h-l-i, il n'y a ni charge ni courant de surface.

$$\text{En } z = 0 : \vec{E}_i + \vec{E}_r = \vec{E}_{tr}$$

Les champs s'expriment de la façon suivante:

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{0i} \exp[j(\omega t - k_i \cdot z)] \quad \text{pour l'onde incidente}$$

$$\vec{E}_r = \vec{E}_{0r} \exp[j(\omega t + k_r \cdot z)] \quad \text{pour l'onde réfléchie}$$

$$\vec{E}_{tr} = \vec{E}_{0tr} \exp[j(\omega t - k_{tr} \cdot z)] \quad \text{pour l'onde réfractée}$$

$$\text{En } z = 0 \text{ en simplifiant } \exp(j\omega t): \vec{E}_{0i} + \vec{E}_{0r} = \vec{E}_{0tr}$$

I-A.2- Pour le champ \vec{B} en $z = 0$: $\vec{B}_i + \vec{B}_r = \vec{B}_{tr}$

Les expressions pour \vec{B} sont similaires; on aura donc : $\vec{B}_{0i} + \vec{B}_{0r} = \vec{B}_{0tr}$.

$$\text{Mais pour des OPPM dans un l-i-h : } \vec{B}_i = \frac{n_1}{c} \vec{e}_z \wedge \vec{E}_i; \quad \vec{B}_r = \frac{n_1}{c} (-\vec{e}_z) \wedge \vec{E}_r; \quad \vec{B}_{tr} = \frac{n_2}{c} \vec{e}_z \wedge \vec{E}_{tr}$$

$$\text{D'où la relation supplémentaire : } n_1 \vec{e}_z \wedge [\vec{E}_i - \vec{E}_r] = n_2 \vec{e}_z \wedge \vec{E}_{tr} \text{ qui implique } n_1 [\vec{E}_i - \vec{E}_r] = n_2 \vec{E}_{tr}.$$

I-A.3- En projetant sur la direction de vibration du champ électrique, on obtient les facteurs

$$\text{de réflexion en amplitude: } r_{1 \rightarrow 2} = \frac{E_{0r}}{E_{0i}} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad \text{et en transmission } t_{1 \rightarrow 2} = \frac{E_{0tr}}{E_{0i}} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

I-B- $r_1 = r_{\text{air} \rightarrow \text{verre}} = -0,2$ et $t_1 = t_{\text{air} \rightarrow \text{verre}} = +0,8$; $r_2 = r_{\text{verre} \rightarrow \text{air}} = +0,2 = -r_1$ et $t_2 = t_{\text{verre} \rightarrow \text{air}} = +1,2$.

Le signe négatif pour r_1 implique **un changement de phase de π à la réflexion.**

I-C1- Pour la première réflexion : $s_0 = r_1 \cdot S_{\text{incident}}$.

I-C2- Pour le rayon a_1 : $s_{a1} = t_1 \cdot r_2 \cdot t_2 \cdot S_{\text{incident}}$.

De même $s_{a2} = t_1 \cdot r_2 \cdot r_2 \cdot t_2 \cdot S_{\text{incident}} = t_1 \cdot (r_2)^3 \cdot t_2 \cdot S_{\text{incident}}$.

On voit apparaître une suite qui s'exprime par : $s_{aN} = t_1 \cdot t_2 \cdot (r_2)^{2N-1} \cdot S_{\text{incident}}$.

I-C3- Pour le rayon b_1 : $s_{b1} = t_1 \cdot t_2 \cdot r_1 \cdot t_1 \cdot t_2 \cdot S_{\text{incident}}$. De même $s_{b2} = t_1 \cdot t_2 \cdot r_1 \cdot r_1 \cdot t_1 \cdot t_2 \cdot S_{\text{incident}}$.

Cette fois la suite qui apparaît est : $s_{bN} = (t_1 t_2)^2 \cdot (r_1)^{2N-1} \cdot S_{\text{incident}}$.

I-C4- Pour le rayon c_1 : $s_{c1} = t_1 \cdot t_2 \cdot t_1 \cdot r_2 \cdot t_2 \cdot t_1 \cdot t_2 \cdot S_{\text{incident}}$. De même $s_{c2} = t_1 \cdot t_2 \cdot t_1 \cdot r_2 \cdot r_2 \cdot t_2 \cdot t_1 \cdot t_2 \cdot S_{\text{incident}}$.

La suite est : $s_{cN} = (t_1 t_2)^3 \cdot (r_2)^{2N-1} \cdot S_{\text{incident}}$.

I-C5- A-N: $s_{aN} = 0,96 \cdot (0,2)^{2N-1} \cdot S_{\text{incident}}$; $s_{bN} = -0,922 \cdot (0,2)^{2N-1} \cdot S_{\text{incident}}$;

$s_{cN} = 0,885 \cdot (0,2)^{2N-1} \cdot S_{\text{incident}}$.

Vu la faible valeur du facteur de réflexion, on pourra ne considérer que le cas $N = 1$

Pour éviter les rayons c_N on peut recouvrir la face arrière de la lame 2 d'un dépôt anti réfléchissant.

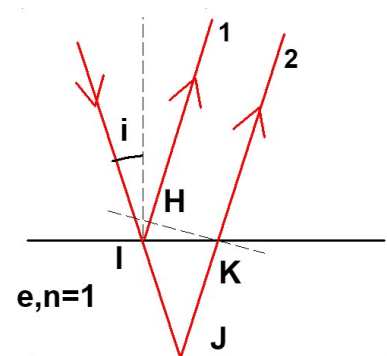
Je pense que les deux rayons à prendre en compte (que le texte nomme a_1 et b_1 sont en fait la superposition

$$"0" + a_0 = 0,2(-1 + 0,96)s_{\text{inc}} = -8 \cdot 10^{-3} s_{\text{inc}} \text{ pour l'un et } b_1 + c_1 = 0,2(-0,922 + 0,885)s_{\text{inc}} = -7,4 \cdot 10^{-3} s_{\text{inc}}$$

II-A.1/ L'épaisseur des lames à faces parallèles, n'intervient pas sur l'angle i . On peut la considérer comme nulle pour simplifier. De même l'épaisseur de verre traversé est la même pour les rayons 1 et 2. Elle n'intervient donc pas sur la différence de chemin optique. Les rayons 1 et 2 se superposent à l'infini (ou dans le pfi d'une lentille convergente). La différence de chemin optique se calcule en dessinant un plan d'onde commun (théorème de Malus).

$$(IJK) - (IH) = 2 \frac{e}{\cos i} - \left(2 \frac{e \sin i}{\cos i} \right) \sin i = 2e \frac{1 - \sin^2 i}{\cos i}$$

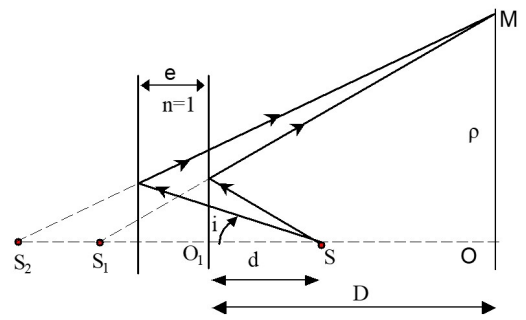
(rappel : l'indice n vaut un), alors: $\delta_{2/1} = 2e \cos i$.



II-A2-a- Les deux images de S sont telles que : $O_1S_1 = O_1S$
 $= d$; $O_1S_2 = d + 2e$, soit $a = S_1S_2 = 2e$.

La distance à l'écran sera : $D_T = D + d + e$.

II-A2-b- La figure d'interférence de 2 sources ponctuelles est constituée d'hyperboloïdes de révolution de foyers $S_1; S_2$. Sur l'écran perpendiculaire à S_1S_2 , les franges sont des cercles de centre O. Les franges ne sont pas localisées donc D quelconque $> d$.



II-A2-c- Différence de marche en M: $\delta_{2/1} = S_2M - S_1M = \left((D_T + a/2)^2 + \rho^2 \right)^{1/2} - \left((D_T - a/2)^2 + \rho^2 \right)^{1/2}$.

$$\delta_{2/1} = (D_T + a/2) \left(1 + \frac{\rho^2}{(D_T + a/2)^2} \right)^{1/2} - (D_T - a/2) \left(1 + \frac{\rho^2}{(D_T - a/2)^2} \right)^{1/2}$$

$$= a + \frac{\rho^2}{2(D_T + a/2)} - \frac{\rho^2}{2(D_T - a/2)} + o(\rho^2)$$

$$\delta_{2/1} = a + \frac{2a\rho^2}{4D_T^2 + a^2} \quad \text{et} \quad \varphi_{2/1} = 2\pi \frac{\delta_{2/1}}{\lambda}$$

II-A2-d- interférences à 2 ondes : $I = 2I_0 [1 + \cos \varphi_{2/1}]$, ici $I(\rho) = 2I_0 \left[1 + \cos \left[\frac{2\pi a}{\lambda} \left(1 + \frac{2\rho^2}{4D_T^2 + a^2} \right) \right] \right]$

II-A2-e- Pour $\rho = 0$, l'ordre d'interférence vaut: $p_0 = \frac{\delta_{2/1}(0)}{\lambda} = \frac{a}{\lambda} =$ entier si intensité maximale.

Les ordres d'interférence diminuent lorsqu'on s'écarte du centre, donc $p_K = p_0 - K$.

avec $p_K = \frac{a}{\lambda} \left[1 - \frac{1}{2} \rho_K^2 (D_T^2 - a^2/4)^{-1} \right] \Rightarrow \rho_K = \sqrt{2K(D_T^2 - a^2/4)/p_0}$. On en déduit $\frac{\rho_{K+1}}{\rho_K} = \sqrt{\frac{K+1}{K}}$

II-A2-f- A-N : $\rho_2 = 1,414, \rho_1 = 9,3 \text{ mm}$ et $\rho_3 = 1,732, \rho_1 = 11,4 \text{ mm}$.

Connaissant $\rho_1 = 6,6 \text{ mm}$ on en déduit : $a = \frac{(D+d)^2}{\rho_1^2 / 2\lambda - (D+d)} = 29,9 \text{ mm}$; $e = 15,0 \text{ mm}$.

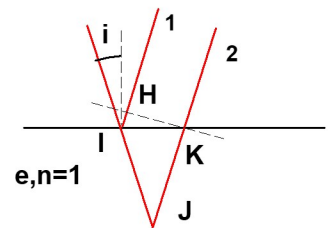
Les anneaux sont relativement larges, la précision est peu importante.

II-A2-g/ Chaque point de la source large fournit une figure d'interférence. Les figures d'interférence sont identiques sauf que les centres ne coïncident pas. En augmentant la taille, un brouillage se produira.

II-A3-a- On a obtenu en IIA-1- $\delta_{2/1} = 2e \cos i$.

II-A3-b- Seule l'inclinaison des rayons intervient, on peut prévoir que la figure d'interférence sera faite d'anneaux. Tous les points d'une source étendue donneront la même figure d'interférence, en employant une source large la luminosité des franges est renforcée.

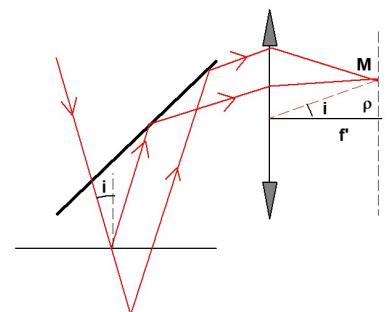
II-A3-c- Interférence à deux ondes : $I(i) = 2I_0 [1 + \cos(2e \cdot \cos i)]$



II-A4-a- La lentille forme dans son plan focal la figure d'interférence à l'infini. Or les rayons qui arrivent en M ont l'inclinaison

$$i = \tan i = \frac{\rho}{f'}$$

Donc $\delta_{2/1} = 2e \cos i = 2e \left[1 - \frac{\rho^2}{2f'^2} \right]$.



II-A4-b- Au centre F de la figure on a $\rho = 0$ donc $p_0 = \frac{2e}{\lambda}$.

Si p_0 entier, l'anneau brillant n° K correspond à $p_K = p_0 - K$.

Donc
$$\rho_K = \sqrt{\frac{2f'^2 K}{p_0}} = f' \sqrt{\frac{K\lambda}{e}}$$
.

II-A4-c- Le diamètre de l'anneau est $d_K = N_K \ell = 2f' \sqrt{\frac{2K}{p_0}} = 2f' \sqrt{\frac{K\lambda}{e}}$

On en déduit que l'épaisseur est:
$$e = K\lambda \left(\frac{2f'}{N_K \ell} \right)^2$$
.

II-A4-d- A-N : $e = 15,2 \text{ mm}$.

II-A4-e- Le pixel est le quantum de longueur, $\Delta N_1 = \pm 1$ et $\frac{\Delta e}{e} = 2 \frac{\Delta N_1}{N_1} \Rightarrow \Delta e = \pm 2 \text{ mm}$ précision

médiocre.

II-A4-f- Il faut augmenter N_1 donc à e donnée la distance focale f' doit augmenter.

II-A4-g- Je ne suis pas certain d'avoir compris parfaitement comment Avec une source ponctuelle les franges ne sont pas localisées et le rayon des anneaux est donné par la relation obtenue en II-A2f/ :

$$\rho_K = \sqrt{\frac{2K(D_T^2 - a^2/4)}{p_0}} \approx \sqrt{\frac{K\lambda(D_T^2 - e^2)}{e}} \text{ avec } D_T = D+d+e.$$

L'énoncé ne donne pas la distance d de la source primaire à la lame L₁ de la cavité.

Les anneaux étant 4 fois plus grands : $\rho_K = 4f' \sqrt{\frac{K\lambda}{e}}$ on prendra $D_T = \sqrt{16f'^2 + e^2} \approx 4f' = 200 \text{ mm}$

II-A4-h- La relation de grandissement de Newton donne : $\gamma = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'}$

Pour un grandissement $|\gamma|$ maximum il faut A_2 le plus éloigné du foyer, soit $\overline{F'A'} = f'$ et $\overline{SA_2} = 2f'$ et l'abscisse de l'objet est alors : $\overline{SA_1} = -2f'$ avec pour grandissement $|\gamma| = 1$.

II-A4-i- L'objectif fait l'image de la figure formée à la distance $4f'$

II-B1- On a obtenu en II-A4a- $p = \frac{2e}{\lambda} \cos i$ donc à p constant $0 = \frac{de}{e} - \frac{\sin i di}{\cos i}$

L'anneau voit son rayon diminuer lorsque e diminue. (rem : p_0 dépend de e , donc quelconque ici)

On peut approximer :
$$\frac{\Delta e}{e} = \frac{\sin i}{\cos i} \Delta i = \frac{\rho}{f'} \Delta i \approx \frac{\rho}{f'} \frac{\Delta \rho}{f'}$$
 (où f' doit être remplacé par f'_{eq}).

II-B2-a- La figure d'interférence est constituée d'anneaux concentriques, l'axe vertical est un axe de symétrie. Il y absence de symétrie parfaite à cause du centrage imparfait, des défauts de parallélisme, de qualité des capteurs, de non ponctualité de la source, etc...

Malgré l'absence de symétrie rigoureuse, le 1^{er} anneau est décelable par son amplitude maximale.

II-B2-b- Le verre s'échauffe, donc se dilate et la cavité a une épaisseur qui diminue.

II-B2-c- D'après l'étude précédente les anneaux rentrent vers le centre. Le profil A est la référence, puisque les maxima sont plus éloignés du centre.

II-B3- On peut estimer les diamètres en pixels : avant : $118 - 54 = 64$ et après : $108 - 62 = 46$.

Soit alors $r_{i \text{ avant}} = 736 \mu\text{m}$ et $r_{i \text{ après}} = 529 \mu\text{m}$.

II-B4/ D'après les questions II-A4c- $\rho_K = f' \sqrt{\frac{K\lambda}{e}}$ et II-B1/ $\frac{\Delta e}{e} = \frac{\rho}{f'} \frac{\Delta \rho}{f'}$

alors pour l'anneau $K = 1 \Rightarrow \frac{\Delta e}{e} = \sqrt{\frac{\lambda}{e}} \frac{r_{i \text{ avant}} - r_{i \text{ après}}}{f'}$ soit
$$\Delta e = \frac{r_{i \text{ avant}} - r_{i \text{ après}}}{r_{i \text{ avant}}} \lambda$$
 .A-N : $\Delta e = 178 \text{ nm}$.

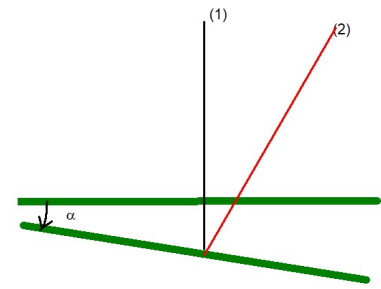
II-B5/ La durée de l'excitation est environ $T \approx 1000$ ms.

On trace les asymptotes à $t = 0$ et à $t = \infty$, leur intersection donne

$$\tau = 450 \text{ ms}$$

III-A1- En incidence normale, les rayons se coupent sur L_2 . Les franges sont localisées sur L_2 . Si l'incidence n'est pas exactement normale, alors l'intersection est au voisinage de L_2 .

Dans le cas d'une source étendue la différence de marche dépend de la position du point d'émission dans la source. Si la source n'est pas cohérente spatialement les franges disparaîtront. **L source doit être faiblement étendue.**



III-A2/ La différence de marche est $\delta_{2/1} = 2 \cdot e(x, y)$.

Donc l'intensité en $M(x, y)$ vaut $I(x, y) = \frac{I_0}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{4\pi e(x, y)}{\lambda} \right) \right]$ si $I_0 =$ intensité maximale

III-A3- On peut écrire : $e(x, y) = \frac{\lambda}{4\pi} \text{Arccos} \left(\frac{2I(x, y)}{I_0} - 1 \right) + m \frac{\lambda}{4}$

III-B1- Avant : la lame est immobile; pendant : la lame se dilate et l'épaisseur $e(x, y)$ diminue; après la lame se rétracte et l'épaisseur augmente.

D'après le graphe figure 11, le début de l'excitation est situé à la date $t_{\text{debut}} = 300$ ms tandis que la fin (reconnaissable au point de rebroussement) à la date $t_{\text{fin}} = 1300$ ms.

Au repos le point étudié est sombre. Pendant l'excitation on peut compter le passage de 3 franges brillantes aux dates 400, 500 et 1100 ms. Dans la phase de relaxation on compte le passage par 3 franges brillantes aux dates 1400, 1600 et 2000 ms, avant de reprendre l'intensité nulle du départ.

III-B2-a- On part d'une intensité nulle, $e_0 = \frac{\lambda}{4\pi} \text{Arccos}(-1) + m \frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{4} + m \frac{\lambda}{4}$. Puis $e(x, y)$ diminue.

$$\text{Pour } t \in [t_{\text{debut}} ; 400 \text{ ms}] \text{ on a } \Delta e = e - e_0 = \frac{\lambda}{4\pi} \text{Arccos} \left(\frac{2I(x, y, t)}{I_0} - 1 \right) - \frac{\lambda}{4}$$

III-B2-b- On arrive pour $t = 400$ ms à $\Delta e = -\frac{\lambda}{4}$, ce qui revient à faire $m \rightarrow m-1$ dans la formule $e(x, y)$.

$$\text{Alors } t \in [400 \text{ ms} ; 500 \text{ ms}], \text{ on aura ainsi : } \Delta e = e - e_0 = -\frac{\lambda}{4\pi} \text{Arccos} \left(\frac{2I(x, y, t)}{I_0} - 1 \right) - \frac{\lambda}{2}$$

le signe "-" tient compte que $I(x, y)$ décroît et que Δe décroît aussi ($t = 500$ ms, $\Delta e = -3\lambda/4$)

III-B3/- Pour $t \in [t_{\text{debut}} ; t_{\text{fin}}]$ on peut choisir $\Delta e = \pm \frac{\lambda}{4\pi} \text{Arccos} \left(\frac{2I(x, y, t)}{I_0} - 1 \right) - (N_1 + 1) \frac{\lambda}{4}$

avec N_1 le nombre de franges brillantes ayant défilé en M et "+" si $I(x, y)$ croissante dans le temps.

III-B4- Soit e_f l'épaisseur au temps t_{fin} : $e_f = e_0 - \frac{\lambda}{4\pi} \text{Arccos} \xi(t_f) - (N_{1\text{max}} + 1) \frac{\lambda}{4}$

Pour $t > t_f$, l'épaisseur augmente à partir de la valeur e_f . En reprenant le raisonnement précédent (on pose

$$\xi(t) = \frac{2I(x, y, t)}{I_0} - 1):$$

$$\text{pour } t \in [1300 \text{ ms} ; 1400 \text{ ms}], \quad e - e_f = -\frac{\lambda}{4\pi} \text{Arccos} \xi(t) + \frac{\lambda}{4\pi} \text{Arccos} \xi(t_f)$$

$$\text{pour } t \in [1400 \text{ ms} ; 1500 \text{ ms}], \quad e - e_f = \frac{\lambda}{4\pi} \text{Arccos} \xi(t) + \frac{\lambda}{4\pi} \text{Arccos} \xi(t_f) + \frac{\lambda}{4}$$

$$\text{etc... } e - e_f = \mp \frac{\lambda}{4\pi} \text{Arccos} \xi(t) + \frac{\lambda}{4\pi} \text{Arccos} \xi(t_f) + N_2 \frac{\lambda}{4}$$

N_2 nombre de franges qui ont défilé depuis la fin de l'excitation et "-" si $I(x,y)$ croissante avec t .

Ceci conduit à :
$$e - e_0 = \mp \frac{\lambda}{4\pi} \text{Arcos } \xi(t) - (N_{1\text{max}} + 1 - N_2) \frac{\lambda}{4} .$$

III-B5/ Le graphique figure 12 indique $d_{\text{max}} = 850 \text{ nm}$. On a $d_{\text{max}} = -\rho e_{\text{max}}$

La figure 11 indique une variation de $\frac{\lambda}{4}$ pour chaque pseudo segment de la courbe. Soit $\frac{5\lambda}{4}$ plus une

fraction de courbe que l'on peut estimer à $\frac{1}{2}$ segment. Donc en tout
$$|\Delta e_{\text{max}}| = \frac{11\lambda}{8} = 870 \text{ nm} .$$