

DS de PHYSIQUE n° 6

Samedi 8 février 2025

4 heures

- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il est invité à le signaler sur sa copie et à poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il aura été amené à prendre.
- Il ne faudra pas hésiter à formuler les commentaires (incluant des considérations numériques) qui vous sembleront pertinents, même lorsque l'énoncé ne le demande pas explicitement. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.

Problème 1 : Dimensionnement d'une installation de liquéfaction

(extrait Mines-Ponts PSI 2015)

Dans ce problème, on se propose de dimensionner une installation de production en continu de diazote N_2 liquide, fonctionnant en régime permanent (procédé LINDE). Le schéma de principe de l'installation est proposé sur la figure 1. Le problème débute par une description complète de l'installation ; les réponses aux questions exigent la prise en compte de *l'ensemble des données* décrivant l'installation ainsi que du diagramme enthalpique du diazote fourni en annexe.

Du diazote gazeux entre en continu dans la machine avec un débit massique \mathcal{D}_m , dans les conditions $p_E = 1 \text{ bar}$, $T_E = 300 \text{ K}$. Il atteint un mélangeur où on le mélange avec du diazote gazeux de débit \mathcal{D}' dans les mêmes conditions p_E, T_E . En sortie du mélangeur (M), le débit massique de diazote gazeux est donc $\mathcal{D} = \mathcal{D}_m + \mathcal{D}'$, toujours dans les conditions (p_E, T_E) .

Après passage par le mélangeur, le diazote traverse une série d'étages de compression ; chacun de ces étages est constitué d'un *compresseur adiabatique* (C) suivi d'un *réfrigérant isobare* (R) à circulation d'eau froide ; en sortie du réfrigérant, le diazote gazeux est ramené à une température de sortie égale à T_E .

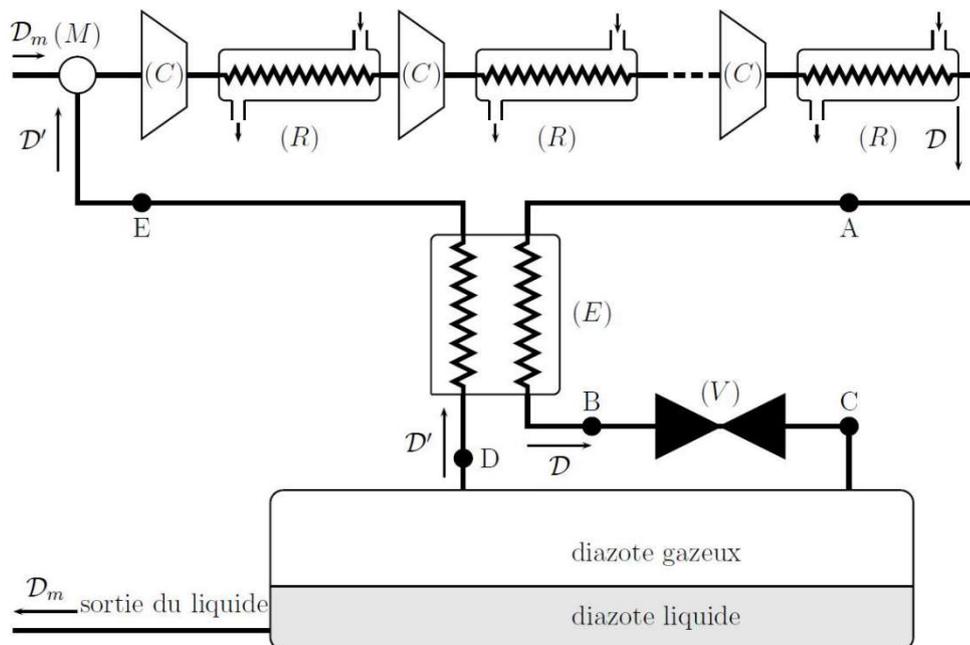


FIGURE 1 – Schéma de principe d'une installation de liquéfaction de diazote

Les N étages compresseur–réfrigérant sont identiques ; ainsi le rapport de compression $r = \frac{p_{\text{sortie}}}{p_{\text{entrée}}}$ est le même pour chacun des N compresseurs. Après la traversée du dispositif, le diazote atteint donc le point A à la pression $p_A = r^N p_E = 100$ bar, à la température $T_A = T_E = 300$ K.

L'eau liquide utilisée dans chacun des réfrigérants circule à la pression constante de 1 bar ; la température de l'eau à l'entrée du dispositif de refroidissement est $T_e = 280$ K. On note $c_e = 4,19 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ la capacité thermique massique de l'eau liquide, considérée comme une constante.

Le diazote gazeux aborde entre A et B un échangeur thermique à contre-courant le long duquel il subit un refroidissement isobare ; à sa sortie, le fluide est dans l'état $p_B = p_A = 100$ bar, T_B . Ce refroidissement est suivi d'une détente isenthalpique dans une vanne de détente (V).

À la sortie du robinet, le diazote est au point C : c'est un mélange liquide–vapeur dont la fraction massique de liquide est notée x , à la pression atmosphérique $p_C = p_E = 1$ bar, et à la température $T_C = T_{\text{éb}}(p_C) = 77$ K. À cette température, la densité du diazote liquide est $d = 0,81$.

La fraction massique x de diazote liquéfié est faible, on extrait seulement du réservoir un débit massique modeste \mathcal{D}_m de diazote liquide dans les conditions (p_C, T_C) ; le diazote gazeux recyclé est renvoyé, avec un débit massique \mathcal{D}' , vers l'échangeur (E). Ce courant du diazote gazeux entre dans (E) aux conditions $p_D = 1$ bar, $T_D = 77$ K.

Dans l'échangeur (E), le diazote se réchauffe à pression constante et arrive au point E dans les conditions $p_E = 1$ bar, $T_E = 300$ K, avant d'être renvoyé vers le mélangeur.

Pour des raisons techniques, on impose deux limites de fonctionnement :

- la température du diazote ne doit, en aucun point du dispositif, dépasser $T_{\text{max}} = 400$ K ;
- la température de l'eau de refroidissement ne doit pas dépasser $T'_{\text{max}} = 350$ K en sortie des réfrigérants (R).

Le diazote gazeux est diatomique, sa masse molaire vaut $\mathcal{M} = 28,0 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$. On notera h_K son enthalpie massique en un point K du schéma de la figure 1.

La constante molaire des gaz parfaits est $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

I.A. — Dimensionnement des étages de compression

Dans cette seule partie I.A le diazote est assimilé à un gaz parfait.

□ 1 — Que vaut le rapport $\gamma = C_p/C_v$ des capacités thermiques du diazote ? On admet que les compresseurs fonctionnent de manière réversible. Déterminer et calculer la valeur minimale de N compatible avec les exigences décrites ci-dessus. On adoptera cette valeur dans la suite.

□ 2 — Si on prenait en compte le caractère irréversible du fonctionnement des compresseurs sans changer la valeur de r , faudrait-il augmenter ou diminuer N ? On justifiera la réponse.

□ 3 — On note \mathcal{D}_{eau} le débit massique du courant d'eau liquide circulant dans chaque réfrigérant (R). Déterminer l'expression et calculer la valeur minimale du rapport $\frac{\mathcal{D}_{\text{eau}}}{\mathcal{D}}$ compatible avec les exigences ci-dessus.

I.B. — Diagramme enthalpique du diazote

Dans cette partie I.B et la suivante I.C, le diazote n'est plus assimilé à un gaz parfait. La figure 5 fournie en annexe, représente le diagramme enthalpique du diazote sous la forme d'un réseau de courbes.

Contrairement à ce que laisse entendre le texte, le document annexe sera rendu avec la copie : on y fera figurer tous les points et traits de construction utilisés pour répondre aux questions.

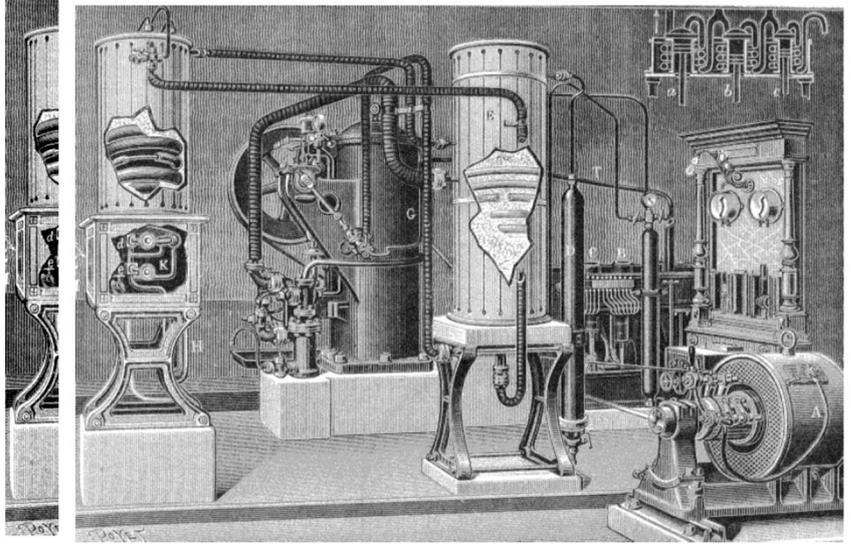
- 4 — Identifier la grandeur conservée le long de la courbe \mathcal{C}_1 . En justifiant votre réponse, déterminer l'asymptote de cette courbe à basse pression.
- 5 — Identifier la grandeur conservée le long de la courbe \mathcal{C}_2 . Justifier le sens de variation de cette courbe.
- 6 — Identifier et nommer les états possibles du diazote sur la courbe \mathcal{C}_3 .
- 7 — Identifier la grandeur conservée le long de la courbe \mathcal{C}_4 . On considère la transformation amenant le diazote de l'état représenté par le point M_1 à celui représenté par le point M_2 suivant le segment $[M_1M_2]$. Décrire l'état du diazote en M .

I.C. — Dimensionnement de l'échangeur (E)

- 8 — Exprimer h_C en fonction de x et des enthalpies massiques du diazote liquide et gazeux, notées h_{liq} et h_{vap} , dans le réservoir.
- 9 — Le réservoir utilisé en sortie de l'appareil fonctionne aussi en régime permanent ; relier x , \mathcal{D} et \mathcal{D}_m puis x , \mathcal{D}' et \mathcal{D} .
- 10 — Par un bilan que l'on précisera pour le fonctionnement de (E), déterminer x en fonction de h_A , h_E et h_{liq} .
- 11 — En exploitant le diagramme enthalpique du diazote fourni en annexe, déterminer les valeurs de h_A , h_E , h_{liq} et h_{vap} . Évaluer x avec 2 chiffres significatifs. Quelle valeur aurait-on obtenue en considérant que le diazote gazeux vérifie la loi des gaz parfaits?
- 12 — Reproduire sommairement le diagramme enthalpique du diazote en y faisant figurer la courbe \mathcal{C}_3 et l'isobare à la pression du point B du dispositif. En déduire la valeur de la température et l'état du diazote en ce point.

Ne pas reproduire le diagramme sur la copie mais utiliser directement le diagramme fourni en annexe, qui sera rendu avec la copie.

□ 13 — La production de diazote liquide s'effectue avec un débit $\mathcal{D}_m = 3,0 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$. Dans le cadre du modèle du gaz parfait, évaluer la puissance mécanique qui est nécessaire au fonctionnement de l'ensemble des N compresseurs (C). Comparer votre résultat à la citation suivante, publiée lors de l'exposition universelle de 1900 : *Nous avons immédiatement décrit le principe de l'appareil de M. le Dr. Carl Linde ; quelques mois plus tard, M. le Dr. d'Arsonval faisait installer dans son laboratoire du Collège de France une petite machine de 3 chevaux destinée à fournir un litre d'air liquide par heure.* L'illustration ci-dessus accompagnait l'article cité.



On notera que $3,0 \text{ hp} \simeq 2,2 \text{ kW}$; hp est le symbole de l'unité « cheval-vapeur ».

Problème 2 : Force de poussée d'un turbo-réacteur de dragster

(Extrait de Mines-Ponts MP 2013)

Il existe des courses automobiles pour lesquelles le but est de parcourir le plus rapidement quelques centaines de mètres. Pour cela, des engins surpuissants appelés dragsters sont fabriqués par des passionnés, de façon « artisanale » au sens où il ne s'agit pas de modèles de série. Ce problème aborde certaines problématiques que l'on peut rencontrer lors de la fabrication de tels engins. Pour les applications numériques on utilisera 3 chiffres significatifs, le module de l'accélération de la pesanteur sera $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Les vecteurs sont surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires \hat{e}_x ou d'une flèche dans le cas général \vec{v} .

II.A. — Premier principe pour un système ouvert

On considère le volume \mathcal{V}_{pc} d'une partie commune, toutes les grandeurs physiques utiles de cette partie, grisée sur la figure 4, seront notées avec un indice pc , par exemple, l'énergie interne de la partie commune est ainsi notée U_{pc} . Un fluide s'écoule de gauche à droite sur le schéma de la figure 4. On considère le système fermé Σ constitué par le fluide compris entre les frontières A et B à l'instant t puis A' et B' à l'instant $t + dt$. La masse de fluide contenue dans la partie commune est notée $m_{pc}(t)$ à la date t et $m_{pc}(t + dt)$ à la date $t + dt$. Pendant l'intervalle de temps dt , une masse dm_e entre dans la partie commune par une ouverture de section S_e et une quantité de matière de masse dm_s en sort par une ouverture de section S_s .

On suppose que le régime est permanent. Les grandeurs intensives (pression, température...) ont des valeurs uniformes avant la partie commune et seront notées P_e, T_e, \dots . De même, elles sont toujours uniformes après la partie commune où elles seront notées P_s, T_s, \dots . Toutes les parois sont calorifugées.

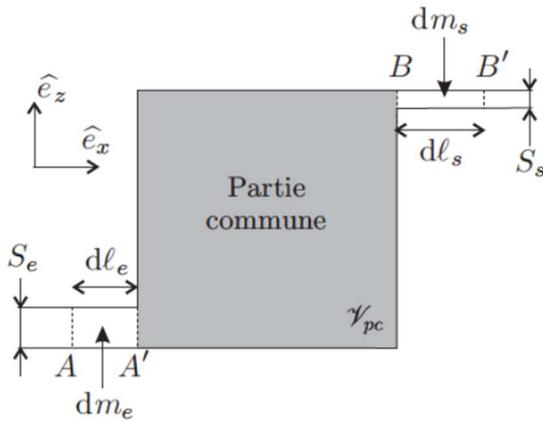


FIGURE 4 – Schéma d'un système ouvert

□ 11 — Démontrer que le débit massique D_m est constant entre l'entrée et la sortie du système.

□ 12 — On indice avec un e les grandeurs en entrée et avec un s les grandeurs en sortie, on note W_i le travail autre que celui des forces de pression. Appliquer le premier principe au système fermé Σ entre les instants t et $t + dt$ en régime permanent et trouver une relation entre les énergies internes (U_e, U_s), potentielles ($E_{p,e}, E_{p,s}$), cinétiques ($E_{c,e}, E_{c,s}$), les pressions (P_e, P_s), les sections (S_e, S_s), les longueurs (dl_e, dl_s) et le travail δW_i .

□ 13 — La vitesse macroscopique du fluide entrant est notée $\vec{c}_e = c_e \hat{e}_x$ et celle du fluide sortant $\vec{c}_s = c_s \hat{e}_x$, on note z_e et z_s les altitudes correspondantes (l'axe z est orienté vers le haut) et $\omega_i = \frac{\delta W_i}{dm}$ le travail indiqué massique en posant $dm = dm_e = dm_s$. Le volume massique à l'entrée de la partie commune est v_e et v_s à la sortie, les enthalpies massiques sont notées h . Réécrire le premier principe pour obtenir une expression massique de ce dernier reliant $h_e, h_s, c_e, c_s, g, z_e, z_s$ et ω_i .

Schématiquement, un turboréacteur absorbe de l'air par « une manche d'entrée d'air ». La première partie est une partie active qui comprime l'air et le chauffe. La seconde partie (grisée sur la figure 5 et appelée tuyère) est chargée d'éjecter l'air à l'extérieur. Pour fournir une poussée, la vitesse d'éjection doit être supérieure à celle de l'admission. Le rôle de la tuyère est de maximiser la vitesse d'éjection.

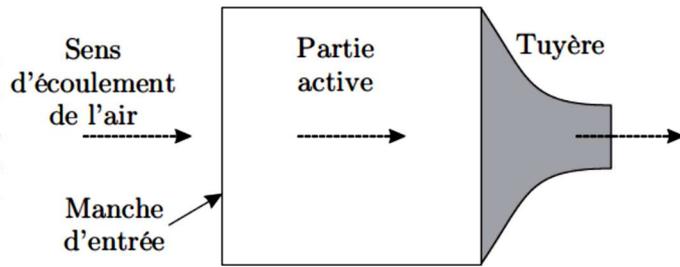


FIGURE 5 – Schéma du réacteur

L'écoulement du gaz dans la tuyère est supposé unidimensionnel, horizontal ($z_e \simeq z_s$), permanent, adiabatique et réversible. Le gaz, supposé parfait, y subit une détente. La vitesse d'entrée des gaz dans la tuyère est négligeable. En effet, la partie active reçoit de l'air à vitesse non négligeable, mais ceux-ci ressortent avec une vitesse insignifiante dans le référentiel lié au réacteur. Il n'y a pas de travail indiqué dans la tuyère ($\omega_i = 0$). À l'entrée de la tuyère, on mesure une pression $P_e = 3,00$ bar et une température $\theta_e = 850^\circ\text{C}$, et en sortie de la tuyère une pression $P_s = 1,00$ bar. Dans les conditions d'utilisation, le rapport des capacités calorifiques à pression constante et à volume constant de l'air vaut $\Gamma = \frac{7}{5}$ et sa capacité thermique massique à pression constante $c_p = 1,17$ kJ·kg⁻¹·K⁻¹.

- 14 — Déterminer l'expression de la température θ_s du gaz à la sortie de la tuyère et sa valeur numérique.
- 15 — Exprimer la vitesse \vec{c}_s du gaz à la sortie de la tuyère en fonction de c_p et des températures θ_e et θ_s . Calculer la valeur numérique de sa norme.
- 16 — La variation de la quantité de mouvement du gaz qui entre et qui sort du réacteur au cours du temps, lorsque l'on est en régime permanent, génère une force appelée force de poussée du réacteur. On se place dans le référentiel lié au réacteur supposé galiléen. Calculer cette force $\vec{\Pi}$ en fonction du débit massique de gaz D_m (entrant dans le réacteur) et des vitesses d'entrée \vec{c}_e et de sortie \vec{c}_s exprimées dans le référentiel lié au réacteur. Déterminer la valeur numérique de la norme de la force de poussée subie par le dragster lors d'un départ arrêté, pour un débit massique constant $D_m = 80,0$ kg·s⁻¹ et en l'absence de vent.
- 17 — Déterminer la valeur de la norme a de l'accélération subie au démarrage par un dragster de $1,06 \cdot 10^3$ kg équipé du réacteur décrit dans la question précédente. On exprimera cette accélération en g (accélération de la pesanteur).

Problème 3 : Etude d'un capteur interférométrique de déplacement ou de déformation

(Extrait de Centrale PC 2005)

Les capteurs interférométriques sont utilisés dans des domaines très variés, tels que la détection de flux de radiation, le suivi d'objets en déplacement et leur positionnement, le contrôle de la qualité de surfaces d'objets, etc.... Ce problème étudie un capteur interférométrique de déplacement ou de déformation, basé sur la modulation d'un réseau d'interférences créé par une lame d'air comprise entre deux lames de verre.

Partie I - Présentation du dispositif

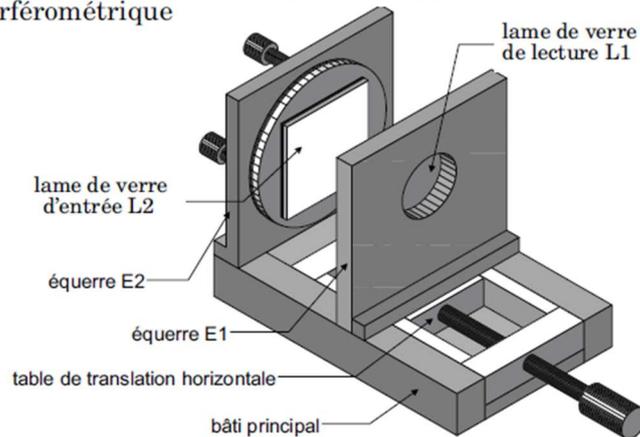
Le capteur est schématisé sur la figure 1 :

Il est constitué de deux lames de verre rectangulaires (10cm x 12cm), de 2mm d'épaisseur, qui peuvent former un coin d'air ou être disposées parallèlement. Sa structure comporte les éléments principaux suivants :

- le bâti principal qui sert de base rigide à l'ensemble des composants,
- la table de translation horizontale. Elle assure le contrôle de l'épaisseur de la cavité qui peut être ajustée entre 0mm (les deux lames sont en contact) et 66mm ,
- une équerre (*E1*) verticale, solidaire de la table de translation. Elle est évidée en son centre pour laisser passer le faisceau laser de lecture. Elle supporte la lame de verre dite de « lecture » qui pourra donc être translatée.
- une équerre (*E2*) verticale, fixe, dont le plan est perpendiculaire à l'axe de translation horizontal de l'équerre (*E1*). Elle est évidée en son centre (l'intérieur de ce trou apparaîtra dans la partie II.B). Elle supporte la lame de verre dite « d'entrée » qui peut être orientée grâce à un dispositif précis et sans jeu.

En éclairant le capteur par un faisceau lumineux cohérent continu (laser He-Ne), parallèle ou divergent, on observe des franges d'interférence rectilignes ou circulaires dont les propriétés sont définies par l'épaisseur optique de la cavité formée par les deux lames. Toute déformation ou déplacement de l'une ou l'autre des deux lames introduit un changement dans l'épaisseur de la cavité d'air qui se traduit par la modification spatiale du réseau de franges d'interférences. Celui-ci est enregistré périodiquement par une caméra CCD numérique associée à un système d'acquisition et de traitement d'images. Le suivi du mouvement de ces franges permet l'analyse temporelle de la réponse du capteur.

Figure 1 : principaux éléments du capteur interférométrique



Les différents éléments qui constituent ce dispositif expérimental sont :

- le capteur interférométrique qui est disposé sur une table anti-vibration,
- le laser continu He-Ne (laser de lecture, de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 632 \text{ nm}$ et de puissance $P = 6 \text{ mW}$) qui illumine l'interféromètre et crée le réseau de franges,
- l'optique d'adaptation, constituée de lentilles, pour éclairer le plus uniformément possible, la cavité sur une surface d'environ 7 cm^2 ,
- une lame semi-réfléchissante qui permet d'observer les interférences,
- l'ensemble de détection constitué d'une caméra CCD et de son système d'acquisition associé.

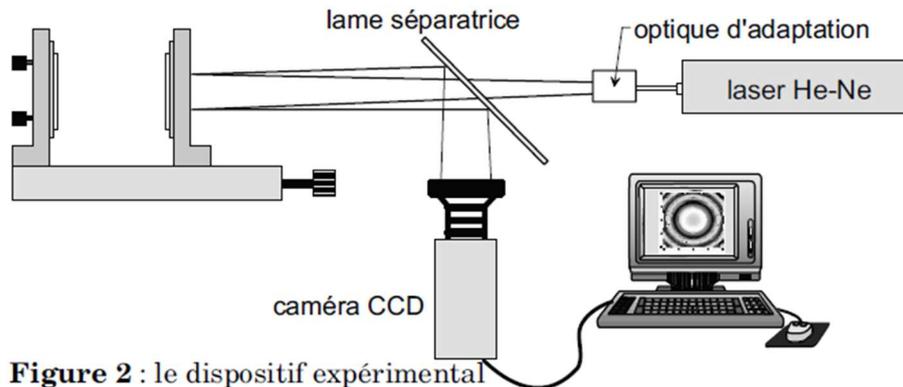


Figure 2 : le dispositif expérimental

La partie I.A ne fait pas partie du DS ; mais on admettra les expressions de la question I.A.3.

I.A - Coefficients de réflexion et de transmission

On considère deux milieux diélectriques, linéaires, homogènes, isotropes et transparents (les indices optiques n_1 et n_2 sont donc réels) séparés par une surface que l'on peut confondre localement avec son plan tangent d'équation $z = 0$.

Une onde électromagnétique (\vec{E}_i, \vec{B}_i) plane, progressive, monochromatique et polarisée rectilignement se propage dans le milieu (1) dans une direction \vec{e}_z .

Cette onde arrive à l'interface séparant le milieu (1) du milieu (2) et donne naissance :

- à une onde plane réfléchie de même pulsation (\vec{E}_r, \vec{B}_r) ,
- et à une onde plane transmise de même pulsation $(\vec{E}_{tr}, \vec{B}_{tr})$.

Pour tout champ de vecteur \vec{X} variant sinusoïdalement, on posera $\vec{X} = \vec{X}_0 e^{j\omega t}$

I.A.1) Rappeler, en tenant compte de l'absence de charges et de courants libres, la relation de passage sur le dioptre $z = 0$ vérifiée par les champs \vec{E} . En déduire une relation entre \vec{E}_{0i} , \vec{E}_{0r} et \vec{E}_{0tr} .

I.A.2) En procédant de même, donner une relation entre \vec{B}_{0i} , \vec{B}_{0r} et \vec{B}_{0tr} . Rappeler les expressions de \vec{B}_i , \vec{B}_r et \vec{B}_{tr} en fonction de \vec{E}_i , \vec{E}_r , \vec{E}_{tr} , \vec{e}_z , n_1 , n_2 et c vitesse de propagation de la lumière dans le vide et en déduire une relation entre \vec{E}_{0i} , \vec{E}_{0r} , \vec{E}_{0tr} , n_1 et n_2 .

I.A.3) Montrer que les coefficients de transmission et de réflexion en amplitude valent :

$$\underline{r}_{1 \rightarrow 2} = \frac{E_{0r}}{E_{0i}} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad \text{et} \quad \underline{t}_{1 \rightarrow 2} = \frac{E_{0tr}}{E_{0i}} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

On admettra ces résultats pour la question suivante I.B.

I.B - On suppose que les lames de l'interféromètre sont taillées dans du verre d'indice $n = 1,5$ et que l'indice de l'air est $n_0 = 1,0$. Déterminer les coefficients de réflexion $r_1 = r_{air \rightarrow verre}$ et $r_2 = r_{verre \rightarrow air}$ ainsi que les coefficients de transmission $t_1 = t_{air \rightarrow verre}$ et $t_2 = t_{verre \rightarrow air}$. Quelle est la conséquence du signe de r_1 ?

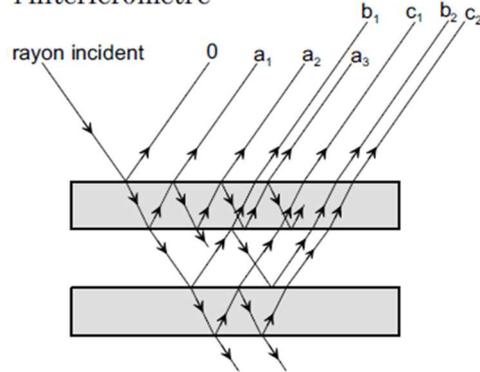
Dans la suite du problème on utilisera ces coefficients de réflexion et de transmission pour le signal lumineux noté s .

I.C - Rapport des amplitudes

Les différents rayons réfléchis sont repérés de la façon suivante (figure 3) :

- 0 pour le premier rayon réfléchi ;
- $a_1, a_2, a_3, \dots, a_N, \dots$ pour les autres rayons ne franchissant pas la première lame de verre (N entier strictement positif) ;
- $b_1, b_2, b_3, \dots, b_N, \dots$ pour les rayons se pénétrant pas dans la deuxième lame de verre (N entier strictement positif) ;
- $c_1, c_2, c_3, \dots, c_N, \dots$ pour les rayons se réfléchissant sur la face inférieure de la deuxième lame de verre (N entier strictement positif) ;

Figure 3 : rayons réfléchis sur l'interféromètre



Remarques :

- il existe d'autres types de rayons dont on ne tiendra pas compte dans ce problème ;
- on admet que les coefficients calculés à la question I.A.3 restent valables pour des rayons faiblement inclinés.

I.C.1) Déterminer le rapport des amplitudes $s_0/s_{incident}$ en fonction de r_1 .

I.C.2) Déterminer l'expression de $s_{a_N}/s_{incident}$, en fonction de t_1, t_2, r_2 et $(2N-1)$.

I.C.3) Déterminer l'expression de $s_{b_N}/s_{incident}$, en fonction de t_1, t_2, r_1 et $(2N-1)$.

I.C.4) Déterminer l'expression de $s_{c_N}/s_{incident}$, en fonction de t_1, t_2, r_2 et $(2N-1)$.

I.C.5) Quels rayons doit-on alors considérer dans l'étude des interférences par réflexion et pourquoi (on justifiera en s'aidant des applications numériques) ? Comment peut-on modifier les lames de verre pour ne pouvoir considérer que les rayons a_1 et b_1 ?

Dans la suite du problème :

- on admet que seuls les rayons a_1 (noté 1) et b_1 (noté 2) interfèrent et qu'ils ont la même amplitude,
- on ne tient pas compte des changements de phase par réflexion.

Partie II - Utilisation en lame à faces parallèles

II.A - Interférences produites par une lame d'air

II.A.1) Modélisation de l'interféromètre.

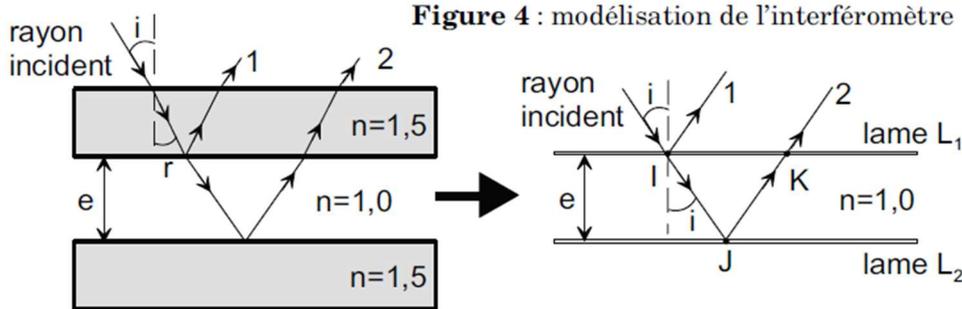


Figure 4 : modélisation de l'interféromètre

Dans la suite du problème on modélise l'interféromètre par une lame d'air située entre deux lames infiniment minces L_1 et L_2 semi-réfléchissantes, parallèles et distantes de e (figure 4).

Justifier brièvement cette modélisation. Déterminer en fonction de n , e et i , la différence de marche $\delta_{2/1}$ que présente, dans un plan perpendiculaire aux rayons 1 et 2, le rayon réfléchi 2 par rapport au rayon réfléchi 1.

Dans la suite du problème on ne fera plus apparaître l'indice n car $n = 1,0$.

II.A.2) Cas d'une source ponctuelle à distance finie.

L'interféromètre est éclairé par une source ponctuelle monochromatique de longueur d'onde λ , placée en S sur l'axe O_1x à une distance $O_1S = d$ de la lame. On observe les interférences, par réflexion, sur un écran E placé à une distance D de O_1 . On suppose qu'un écran opaque P supprime la lumière directe de S sur E .

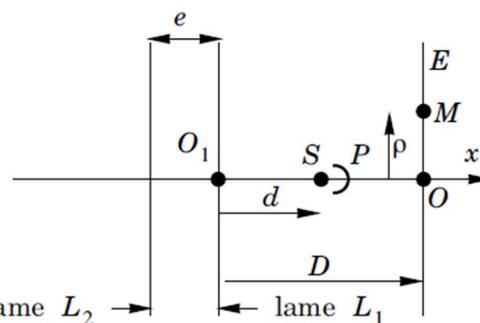


Figure 5 : lame d'air et source ponctuelle à distance finie

a) Montrer que le dispositif est alors équivalent à deux sources ponctuelles placées en S_1 et S_2 . Déterminer les longueurs S_1O_1 et S_2O_1 . On pose $a = S_2S_1$. Donner l'expression de a . Quelle distance D_T sépare l'écran du milieu de $[S_1S_2]$?

b) Qu'observe t-on sur l'écran ? Justifier sans calcul. Les interférences obtenues par ce dispositif sont-elles localisées ?

c) Soit M un point de l'écran situé à une distance ρ du point O . Déterminer, en fonction de a , λ , D_T et ρ , l'expression du déphasage $\varphi_{2/1}(\rho)$ en M de l'onde

issue de S_2 par rapport à celle issue de S_1 . On donnera le résultat sous la forme d'un développement limité d'ordre 2 en ρ (M reste au voisinage du point O).

d) Soit I_0 l'intensité lumineuse du faisceau issu de la source S_1 (et donc de S_2). Etablir l'expression de l'intensité $I(\rho)$ d'un point M de l'écran en fonction de I_0 , a , λ , D_T et ρ .

e) Donner l'expression de l'ordre d'interférence p_0 au centre de la figure. On suppose que le centre de la figure correspond à un maximum de luminosité. Que peut-on en conclure sur p_0 ? On numérote les franges lumineuses à partir de O par l'entier K (valeur nulle au centre). Exprimer le rayon ρ_K du $K^{\text{ième}}$ anneau lumineux en fonction de D_T , K et p_0 . En déduire l'expression de ρ_{K+1}/ρ_K en fonction de K .

f) *Application numérique* : on mesure sur l'écran $\rho_1 = 6,6\text{mm}$. En déduire ρ_2 et ρ_3 . Sachant que $\lambda = 632\text{nm}$, $D = 80\text{cm}$ et $d = 20\text{cm}$, calculer e .

Que pensez vous de la précision de la mesure de e ?

g) Qu'observe t-on sur l'écran si l'on augmente progressivement la taille de la source S ? Proposer une explication qualitative du phénomène.

II.A.3) *Cas d'une source étendue à distance finie.*

L'interféromètre est éclairé par une source étendue monochromatique de longueur d'onde λ .

a) Soit un point de la source émettant un rayon lumineux sous une incidence i . Rappeler l'expression, en fonction de i et e , de la différence de marche $\delta_{2/1}$ que présentent, dans un plan perpendiculaire aux rayons 1 et 2, le rayon réfléchi 2 par rapport au rayon réfléchi 1.

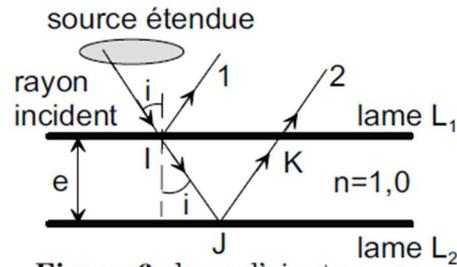


Figure 6 : lame d'air et source étendue à distance finie

b) La différence de marche précédente ne dépend que de l'incidence i et pas du point de la source. Que peut-on en conclure sur la localisation des franges d'interférences ? La largeur de la source intervient-elle sur le contraste ? Que détermine t-elle ?

c) Donner l'expression de l'intensité $I(i)$ obtenue à l'infini dans la direction i en fonction de e , i et I_0 l'intensité lumineuse que l'on aurait sur l'écran si seule la lame L_1 était présente.

II.A.4) *Observation avec une caméra CCD.*

L'interféromètre, modélisé par une lame d'air, est éclairé par le laser de lecture. Grâce à la lame semi-réfléchissante et à la caméra CCD on enregistre la figure d'interférence. La caméra est réglée, dans un premier temps, pour que le plan d'observation (capteur CCD) soit confondu avec le plan focal image de l'objectif de la caméra assimilé à une lentille convergente de focale $f' = 50\text{mm}$.

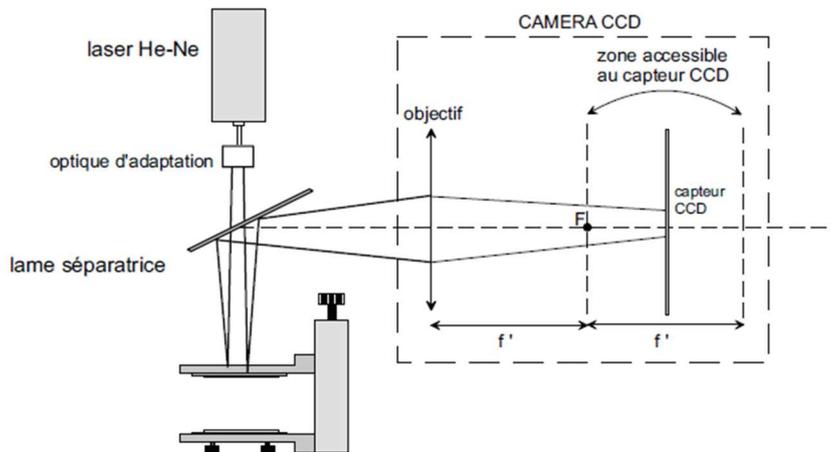


Figure 7 : enregistrement de la figure d'interférence

a) Soit M un point du capteur CCD. On pose $\rho = FM$. Déterminer, en fonction de ρ , e et f' l'expression de la différence de marche $\delta_{2/1}$ entre les rayons réfléchis de type 2 et 1 convergeant en M (on effectuera, en les justifiant, les approximations usuelles). Faire un schéma des lames (L_1 , L_2 et semi-transparente), de l'objectif et du capteur CCD en indiquant précisément les angles.

b) Donner l'expression de l'ordre d'interférence p_0 au centre de la figure. On suppose que le centre de la figure correspond à un maximum de luminosité. On numérote les franges lumineuses à partir de F par l'entier K (valeur nulle au centre). Exprimer le rayon ρ_K du $K^{\text{ième}}$ anneau lumineux en fonction de f' , K et p_0 .

c) On assimile le capteur CCD à un carré formé de pixels carrés jointifs. Soit l la longueur du côté d'un pixel. Les diamètres des anneaux sont déterminés en analysant le profil suivant un axe horizontal passant par le centre du système de franges. Soit N_K le nombre de pixels correspondant au diamètre d_K du $K^{\text{ième}}$ anneau. Déterminer l'expression de l'épaisseur e de la cavité en fonction de f' , λ , K , N_K , et l .

d) *Application numérique* : $f' = 50\text{mm}$ et $l = 23\mu\text{m}$. Pour $K = 1$, on mesure $N_1 = 28$ pixels. Calculer e .

e) La détermination précédente de e repose donc sur la mesure de N_1 . Estimer l'incertitude absolue sur N_1 et en déduire un encadrement de e . Conclure.

On souhaite diminuer l'incertitude relative sur la mesure de e .

1^{ère} méthode :

f) On suppose, uniquement dans cette question, que l'objectif de la caméra est interchangeable (ou possède un réglage permettant de choisir différentes focales). Que proposez-vous pour augmenter la précision de la mesure de e ?

2^{ème} méthode :

g) En supposant que le laser et son optique d'adaptation peuvent-être assimilés à une source ponctuelle, que peut-on dire sur la localisation des franges ? À quelle distance D de la lame doit-on placer un écran pour observer des anneaux 4 fois plus grands que dans le plan focal de l'objectif de la caméra ?

h) On suppose que la distance objectif-capteur CCD peut varier entre f' et $2f'$. On souhaite former une image réelle d'un objet réel. On suppose que la distance objet-objectif peut prendre toutes les valeurs possibles. Quelle distance objectif-capteur CCD doit-on choisir pour obtenir la plus grande image possible ? Quelle doit-être alors la distance objet-objectif ? Quel est alors le grandissement de l'objectif ?

i) En déduire la distance (lame de l'interféromètre) - (objectif de la caméra) pour obtenir sur le capteur CCD des anneaux 4 fois plus grands que ceux observés à la question II.A.4-a dans le plan focal image de l'objectif.

Dans la suite du problème, le système est réglé de façon à obtenir ce grandissement de 4. On pourra, pour simplifier les raisonnements et les schémas, supposer que l'observation est réalisée à l'infini avec un objectif de distance focale $f'_{eq} = 4f'$.

Question peu claire (à sauter éventuellement)

II.B - Méthode de suivi de franges circulaires.

D'après la section II.A, l'observation des franges d'interférences renseigne sur l'épaisseur optique de la cavité formée par les deux lames. La figure d'interférence est enregistrée périodiquement par une caméra CCD numérique associée à un système d'acquisition et de traitement d'images.

La déformation de la cavité optique est obtenue par l'action d'un deuxième faisceau laser (longueur d'onde $\approx 800\text{nm}$) sur la lame de verre d'entrée revêtue d'une couche de gélatine, d'une épaisseur de $6\mu\text{m}$ environ, qui absorbe l'énergie lumineuse d'excitation déposée. L'échauffement local qui en résulte provoque une déformation mécanique et donc une variation de l'épaisseur de la cavité.

La méthode proposée est basée sur le calcul de la variation de l'épaisseur de la lame d'air en fonction de la variation du rayon d'une frange circulaire.

II.B.1) On considère une frange brillante donnée. Comment varie le rayon de cet anneau lorsque l'épaisseur de la lame d'air diminue ? Déterminer l'expression approchée de $\Delta e/e$ (variation relative de l'épaisseur de la lame) en fonction de ρ , $\Delta\rho$ et f'_{eq} . On donnera le résultat sous la forme d'un développement limité à l'ordre 1 en ρ .

Mise en œuvre expérimentale :

- on enregistre l'interférogramme à un instant t_1 . Grâce à cette image, dite de référence, on trace un profil des niveaux de gris le long d'une droite horizontale passant par le centre de la figure.
- On détermine alors le rayon d'une frange brillante donnée à l'instant t_1 .
- on procède de même à un instant t_2 et on détermine le nouveau rayon de la même frange brillante.
- grâce à la relation entre $\Delta e/e$ et $\Delta\rho/\rho$, on peut en déduire la variation relative de l'épaisseur de la lame.

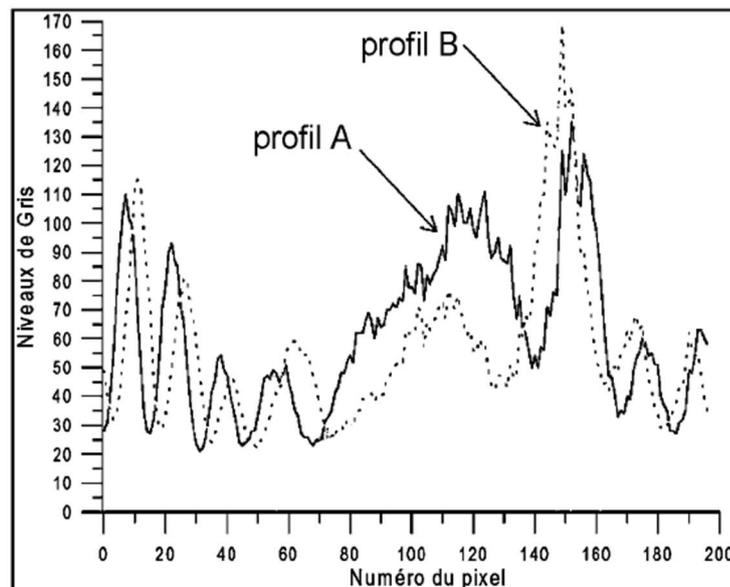


Figure 8 : enregistrement du déplacement des franges circulaires

II.B.2) La figure 8 résume les résultats obtenus à l'aide de cette méthode. Les profils diamétraux correspondent, respectivement, à l'image de référence et à la première image après le début de l'excitation.

On cherche à identifier le profil de l'image de référence.

a) Chaque profil devrait admettre un axe de symétrie vertical. Pourquoi ? Citer une des causes possibles de cette absence de symétrie. Malgré l'absence de symétrie, comment peut-on repérer les pics correspondants au premier anneau ?

b) On rappelle que la cavité optique est excitée par l'action d'un deuxième faisceau laser sur la lame de verre d'entrée. Quelle est, selon vous, la conséquence de l'action du laser sur cette lame ? Comment varie alors l'épaisseur de la cavité optique ?

c) En déduire le profil de l'image de référence (A ou B). Justifier.

II.B.3) Donner une estimation du rayon du premier anneau, avant et après excitation : $r_{1,avant}$ et

$r_{1,après}$.

Application numérique : largeur d'un pixel : $l = 23\mu\text{m}$.

II.B.4) En utilisant les questions II.A.4-c et II.B.1, déterminer une expression de la variation d'épaisseur Δe de la lame en fonction de $r_{1,avant}$, $r_{1,après}$ et λ .

Application numérique : $\lambda = 632\text{nm}$; largeur d'un pixel : $l = 23\mu\text{m}$.

II.B.5) En répétant cette opération pour tous les instants d'échantillonnage, on peut tracer la courbe de variation de l'épaisseur de la cavité optique en fonction du temps (figure 9). Déterminer la durée T de l'excitation. Grâce à un logiciel informatique, la réponse a été modélisée par un système linéaire d'ordre 1 (courbe en traits pointillés). Déterminer le temps caractéristique τ associé à la réponse de la lame (on précisera la méthode utilisée).

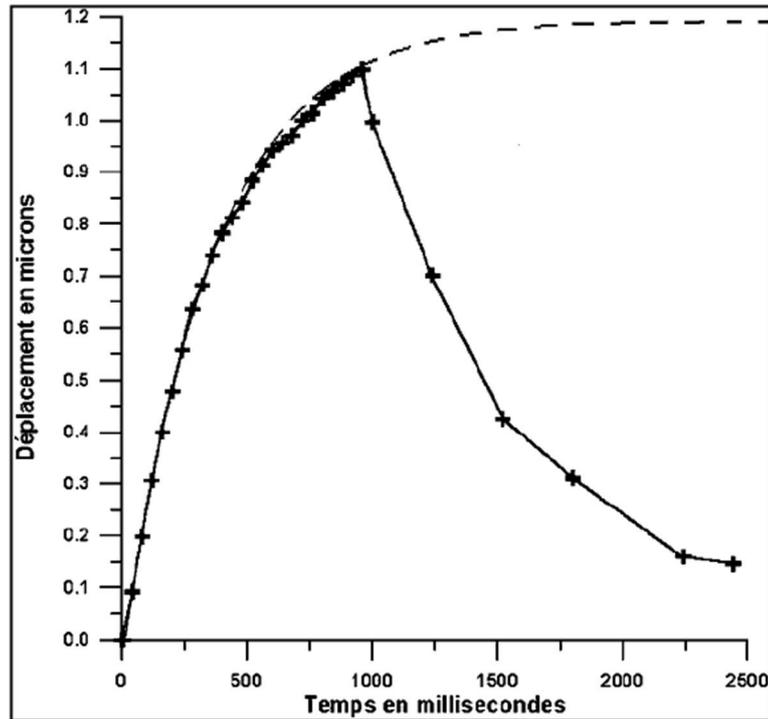


Figure 9 : variation de l'épaisseur de la cavité optique en fonction du temps

Partie III - Utilisation en coin d'air

On rappelle qu'on ne tient pas compte des changements de phase par réflexion. On se propose d'améliorer la méthode précédente. Pour cela on règle l'interféromètre en coin d'air.

III.A - Interférences produites par un coin d'air

III.A.1) On éclaire un coin d'air sous incidence quasi normale. Reproduire et compléter la figure 10 en traçant les rayons lumineux interférant. En déduire la surface de localisation des interférences dans le cas d'une source ponctuelle, puis étendue.

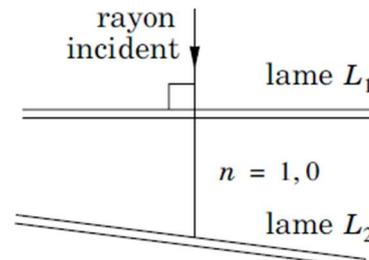


Figure 10 : interféromètre réglé en coin d'air

On utilise de nouveau le montage de la partie II.A.4 (figure 7). L'interféromètre forme un coin d'air et le laser de lecture fournit un éclairage sous incidence quasi normale. On suppose que les franges sont visibles (entre autres) sur la lame d'entrée. La caméra est réglée pour former l'image d'une partie de cette lame d'entrée sur le capteur CCD. Le grandissement est égal à 1 en valeur absolue. On adopte donc les mêmes coordonnées sur la lame d'entrée et sur le capteur CCD.

III.A.2) Soient (x, y) les coordonnées d'un point M du capteur (et donc de la lame d'entrée). Donner l'expression de la différence de marche $\delta_{2/1}$ en fonction de $e(x, y)$. En déduire l'expression de l'intensité $I(x, y)$ au point M en fonction de $e(x, y)$, λ et I_0 intensité maximale.

III.A.3) Déterminer, en fonction de λ , $I(x, y)$, I_0 et d'un entier m , l'expression des épaisseurs $e(x, y)$ possibles pour un point $M(x, y)$ où l'intensité est $I(x, y)$.

III.B - Méthode de suivi des niveaux de gris

Pour chaque point $M(x, y)$ de la lame d'entrée, la détermination expérimentale des variations de $e(x, y)$ comporte deux étapes :

- *l'extraction du signal interférométrique* : on exploite les images enregistrées périodiquement pour suivre l'évolution du niveau de gris d'un pixel de la figure d'interférence. On obtient ainsi une courbe discrétisée qui représente la variation de l'intensité du pixel sélectionné en fonction du temps. (figure 11)
- *le traitement du signal interférométrique* : on convertit l'intensité enregistrée en déplacement.

III.B.1) Décrire qualitativement le mouvement de la lame avant, pendant et après l'excitation.

Déduire de la figure 11 le mouvement des franges au point M considéré (on précisera en particulier le nombre de franges défilant dans chaque phase).

En déduire les instants $t_{\text{début}}$ et t_{fin} de début et fin d'excitation de la lame.

III.B.2) Pour simplifier, on suppose que le point étudié correspond à une intensité nulle lorsque la lame est au repos.

a) Montrer que, pour $t \in [t_{\text{début}}, 400\text{ms}]$, le déplacement de la lame est donné par :

$$\Delta e = \frac{\lambda}{4} \cdot \left[\frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{2I(x, y)}{I_0} - 1\right) - 1 \right].$$

b) Déterminer l'expression de Δe pour $t \in [400\text{ms}, 500\text{ms}]$.

III.B.3) Déterminer l'expression de Δe pour $t \in [t_{\text{début}}, t_{\text{fin}}]$; on pourra introduire un entier N_1 correspondant au nombre de franges ayant déjà défilé depuis le début de l'excitation et distinguer deux cas : I est localement une fonction croissante, ou décroissante, du temps.

III.B.4) Reprendre la question précédente pour $t > t_{\text{fin}}$; on pourra introduire deux entiers : $N_{1\text{max}}$, valeur maximum de N_1 , et N_2 correspondant au nombre de franges ayant déjà défilé depuis la fin de l'excitation. On distinguera deux cas : I est localement une fonction croissante, ou décroissante, du temps.

III.B.5) Grâce aux expressions précédentes, on peut tracer la variation de l'épaisseur de la cavité en fonction du temps. Le tracé ci-contre (figure 12) donne le déplacement de la lame en fonction du temps.

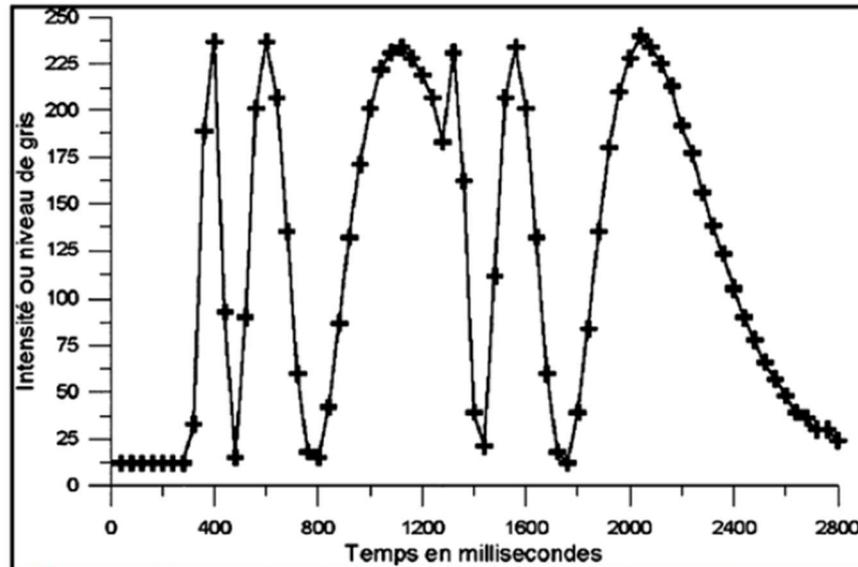


Figure : 11 variation de l'intensité du pixel sélectionné en fonction du temps

Déterminer graphiquement le déplacement maximal d_{\max} de la lame au point M considéré. Quelle relation peut-on écrire entre d_{\max} et Δe_{\max} . Valider les expressions précédentes de Δe en déterminant graphiquement grâce à la figure 11 une deuxième valeur de d_{\max} .

Cette méthode donne les variations d'épaisseur pour les différents points de la lame à différents instants. Il est alors possible de créer une animation de la déformation.

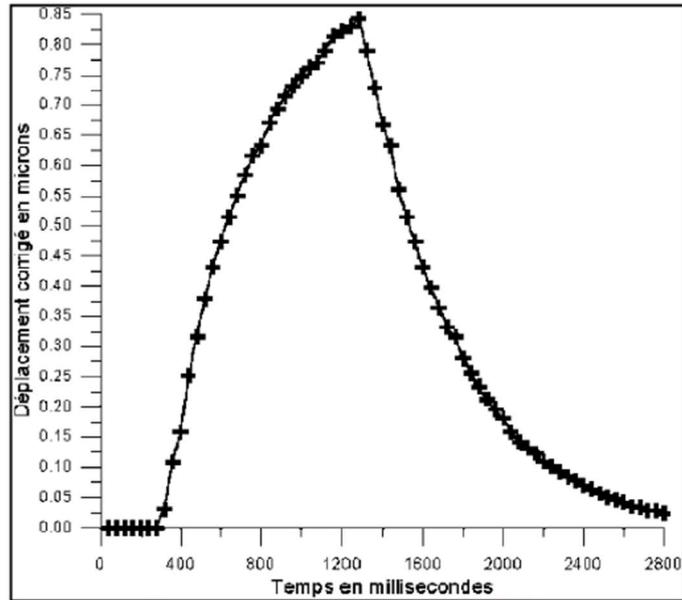
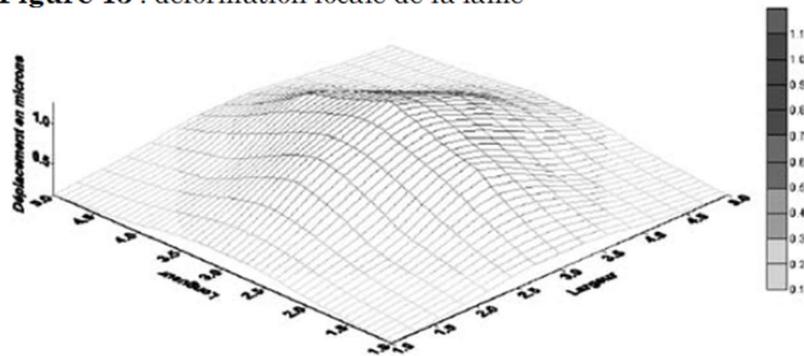


Figure 12 : déplacement de la lame en fonction du temps

La figure 13 représente, à un instant donné, l'aspect de la déformation locale de la lame suite à une excitation ponctuelle et centrée.

Figure 13 : déformation locale de la lame



DS n° 6 – Annexe à rendre avec la copie.

NOM :

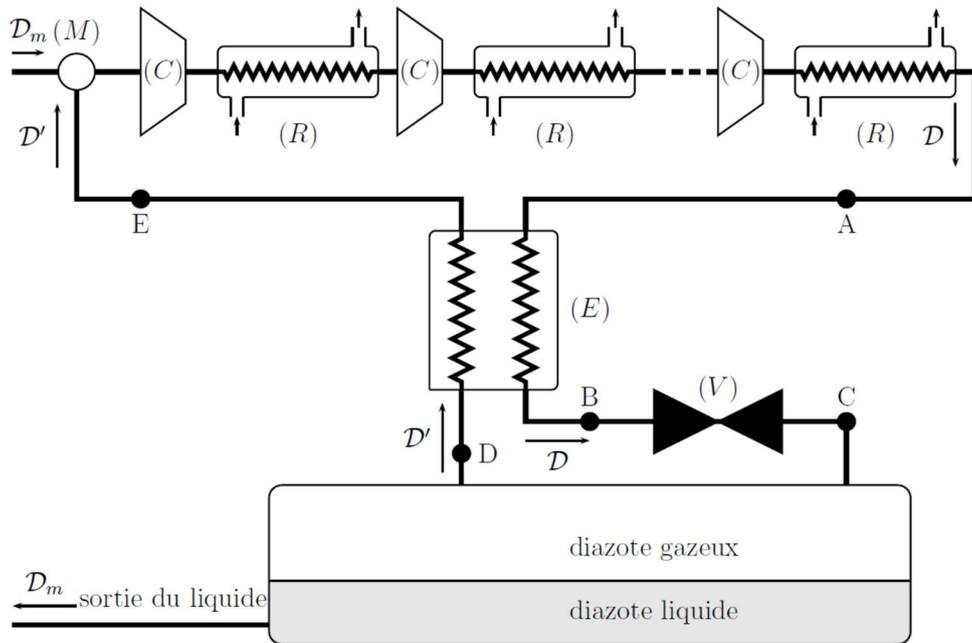


FIGURE 1 – Schéma de principe d'une installation de liquéfaction de diazote

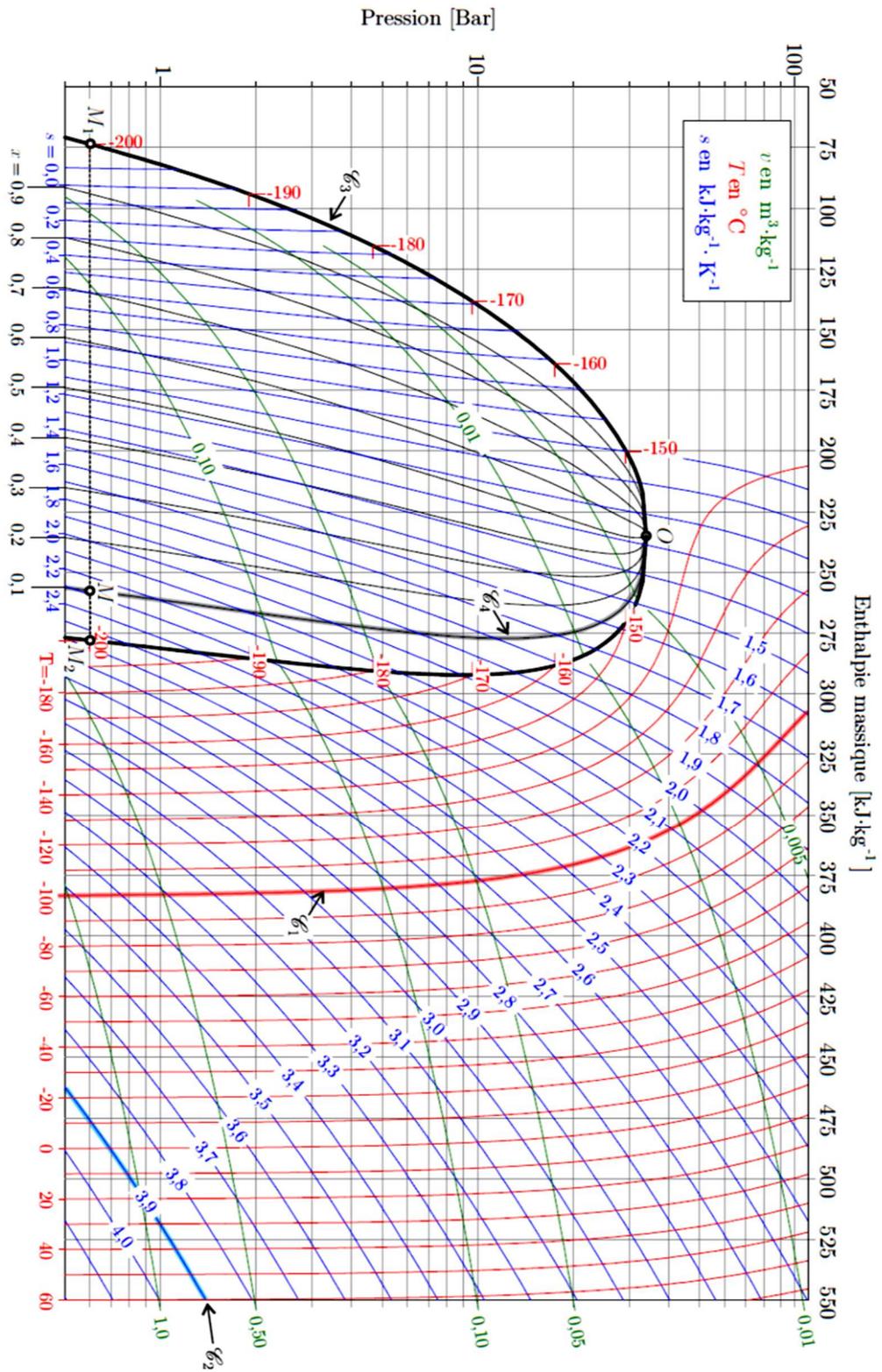


FIGURE 5 – Diagramme enthalpique du diazote

