

Equation de diffusion

II- Analyse des symétries et invariances d'un problème de diffusion thermique.

Nous disposons maintenant d'équations locales (loi de Fourier et équation de diffusion) valables sans hypothèse particulière sur les invariances du champ de température ; elles ont donc l'avantage d'être très générales mais, en contrepartie, elles font intervenir des opérateurs vectoriels non explicites. Ainsi, comme nous l'avons déjà vu en électromagnétisme, l'utilisation de telles équations locales nécessite une analyse préalable des symétries et invariances du problème étudié, afin de faire un choix judicieux de système de coordonnées et d'explicitier les opérateurs vectoriels.

PRINCIPE DE L'ANALYSE DES SYMETRIES D'UN PROBLEME THERMIQUE :

Le champ $T(\vec{r}, t)$ solution du problème doit être compatible avec les CONDITIONS INITIALES (CI) et les CONDITIONS AUX LIMITES (CL). Si ces conditions présentent certaines invariances, nous devons chercher un champ $T(\vec{r}, t)$ possédant les mêmes invariances.

De ces invariances se déduisent le système de coordonnées adapté à la situation ainsi que la structure de $\vec{j}_Q(\vec{r}, t)$. A l'aide d'un formulaire, il est alors possible d'explicitier l'opérateur laplacien et d'exploiter ainsi l'équation de diffusion.

Dans le cas d'une équation de diffusion avec un terme source non uniforme, sa dépendance spatiale doit être prise en compte dans l'analyse.

Rappel : soit un système de volume V délimité par une surface Σ ;

- * on appelle **conditions initiales** la donnée de : $T(M, t = 0) \quad \forall M \in V$
- * on appelle **condition aux limites** la donnée de : $T(P, t) \quad \forall P \in \Sigma \quad \forall t$ (ou $\vec{j}_Q(P, t) \quad \forall P \in \Sigma \quad \forall t$)

Les grandes familles de symétrie rencontrées sont les suivantes :

A- La symétrie plane

DEFINITION : C'est le cas où les (CI) et (CL), ainsi qu'un éventuel terme source, sont invariants par translation dans deux directions cartésiennes.

Nous pouvons prendre comme exemple un barreau parallélépipédique ou cylindrique isolé latéralement et dont la température est maintenue uniforme aux deux extrémités (figure page suivante).

Nous devons alors chercher le champ de température sous la forme $T(x, t)$ en introduisant des coordonnées cartésiennes ; en effet, les invariances par translation nous permettent d'envisager une température indépendante de 2 coordonnées cartésiennes.

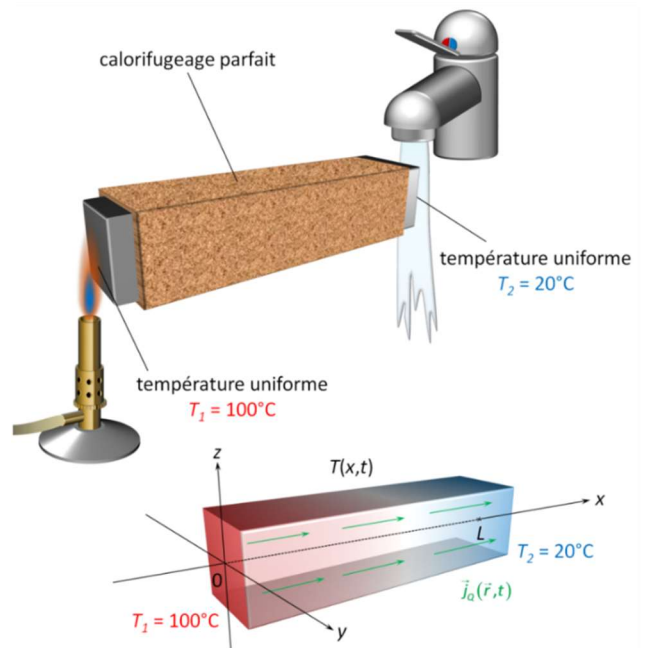
Dans ce cas, la loi de Fourier et l'équation de diffusion

s'écrivent :

$$\begin{cases} \vec{j}_Q(x,t) = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T(x,t)) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(x,t) \vec{u}_x \\ \frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) \left[+ \frac{p(x,t)}{\rho c} \right] \end{cases}$$

L'expression de $\vec{j}_Q$ montre que la conduction thermique est **purement axiale le long de (Ox)**.

Notez que la forme de la section du barreau peut être tout à fait quelconque : un carré, un rectangle, un disque...



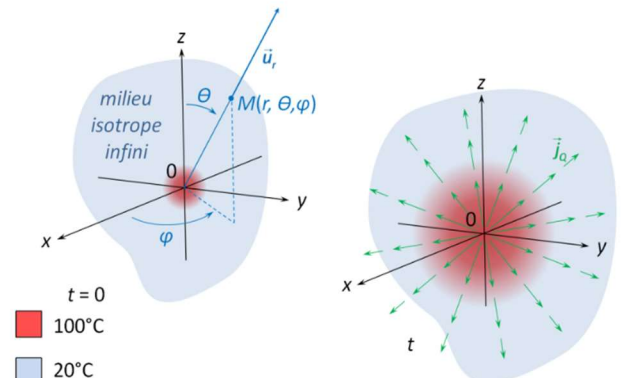
B- La symétrie sphérique

DEFINITION : C'est le cas où les (CI) et (CL), ainsi qu'un éventuel terme source, sont invariants par rotation autour d'un point O .

Nous pouvons prendre comme exemple un point chaud ou une source de chaleur ponctuelle dans un milieu isotrope qui peut être considéré comme infini (figure ci-contre).

Nous devons alors chercher le champ de température sous la forme $T(r,t)$ en introduisant des coordonnées sphériques de centre O ; en effet, l'invariance par toute rotation autour de O nous permet d'envisager une température indépendante des deux angles θ et φ des coordonnées sphériques.

Dans ce cas, la loi de Fourier et l'équation de diffusion s'écrivent :



$$\begin{cases} \vec{j}_Q(r,t) = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T(r,t)) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}(r,t) \vec{u}_r \\ \frac{\partial T}{\partial t}(r,t) = D \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r}(r,t) \right) \left[+ \frac{p(r,t)}{\rho c} \right] \end{cases}$$

L'expression de $\vec{j}_Q$ montre que la conduction thermique est **purement radiale depuis O**.

Rq : pour écrire l'équation de diffusion, il nous faut ici un formulaire avec l'expression du laplacien en coordonnées sphériques

C- La symétrie de révolution

DEFINITION : C'est le cas où les (CI) et (CL), ainsi qu'un éventuel terme source, sont invariants par rotation autour d'un axe (Oz).

Nous pouvons prendre comme exemple un cylindre de longueur L et de rayon R comparables, initialement à 100°C et laissé au contact d'un air extérieur à 20°C (figure ci-contre).

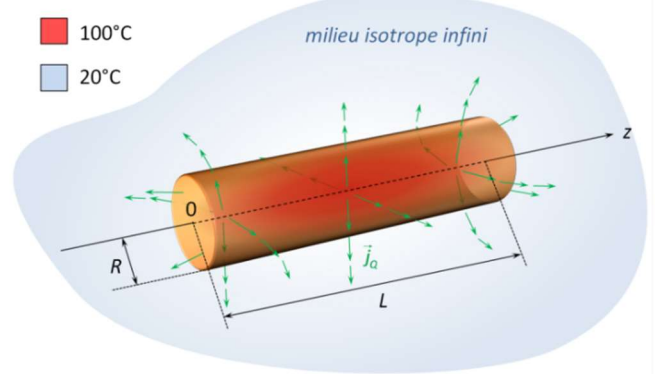
Nous devons alors chercher le champ de température sous la forme $T(r,z,t)$ en introduisant des coordonnées cylindriques d'axe (Oz) ; en effet, l'invariance par rotation nous permet d'envisager une température indépendante de l'angle θ des coordonnées cylindriques.

Dans ce cas, la loi de Fourier et l'équation de diffusion s'écrivent (nécessité du formulaire) :

$$\begin{cases} \vec{j}_Q(r,z,t) = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T(r,z,t)) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}(r,z,t) \vec{u}_r - \lambda \frac{\partial T}{\partial z}(r,z,t) \vec{u}_z \\ \frac{\partial T}{\partial t}(r,z,t) = D \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r}(r,z,t) \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(r,z,t) \right\} + \left[\frac{p(r,z,t)}{\rho c} \right] \end{cases}$$

L'expression de $\vec{j}_Q$ montre que la conduction thermique est **à la fois axiale le long de (Oz) et radiale depuis l'axe (Oz)**.

Attention à la similitude de notation $[r]$ et de vocabulaire $[radial]$ avec la symétrie sphérique !



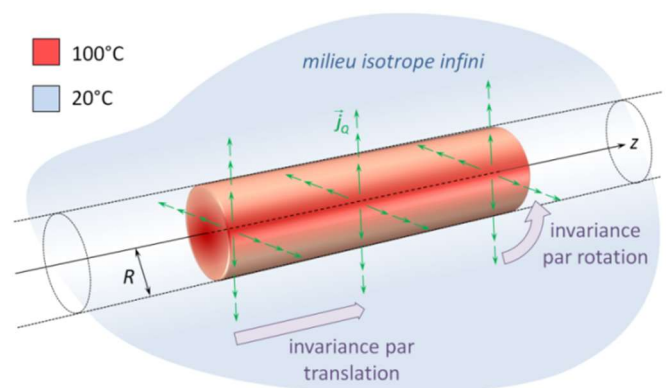
D- La symétrie cylindrique

DEFINITION : C'est le cas où les (CI) et (CL), ainsi qu'un éventuel terme source, sont invariants par rotation autour d'un axe (Oz) et par translation le long de cet axe.

Nous pouvons prendre comme exemple le cylindre précédent, en supposant sa longueur L très grande devant son rayon R ; les transferts thermiques se font alors essentiellement radialement vers la face latérale, sauf à proximité immédiate des deux extrémités.

Nous devons alors chercher le champ de température sous la forme $T(r,t)$ en introduisant des coordonnées cylindriques d'axe (Oz) ; en effet, les invariances par translation et rotation nous permettent d'envisager une température indépendante de θ et z en coordonnées cylindriques.

Dans ce cas, la loi de Fourier et l'équation de diffusion s'écrivent :



$$\begin{cases} \vec{j}_Q(r,t) = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T(r,t)) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}(r,t) \vec{u}_r \\ \frac{\partial T}{\partial t}(r,t) = D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r}(r,t) \right) + \frac{p(r,t)}{\rho c} \end{cases}$$

L'expression de $\vec{j}_Q$ montre que la conduction thermique est **purement radiale depuis l'axe (Oz)**.

Attention toujours à la similitude de notation $[r]$ et de vocabulaire $[radial]$ avec la symétrie sphérique !

E- La SYMETRIE PLANE, le retour...

L'exemple du barreau cylindrique évoqué ci-dessus est très instructif : il y a, *a priori*, une symétrie de révolution mais si le barreau est « long » (concrètement, si $L \gg R$) nous pouvons envisager une symétrie cylindrique, beaucoup plus simple. Qu'en est-il si, au contraire, le cylindre est très peu épais (si $R \gg L$) ?

Dans ce cas, les transferts thermiques se font essentiellement axialement vers les deux disques, sauf à proximité immédiate de la face latérale et nous sommes ramenés à une symétrie plane où la coordonnée cartésienne utile est la cote z le long de l'axe. Nous avons alors approximativement :

$$\vec{j}_Q(z,t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}(z,t) \vec{u}_z \quad \& \quad \frac{\partial T}{\partial t}(z,t) = D \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z,t)$$

- Rq :
- Il n'y a pas de terme source dans cet exemple.
 - La même simplification s'applique, quelles que soient les dimensions, si la face latérale du cylindre est calorifugée (revoyez l'exemple de symétrie plane évoqué plus haut).

Finalement, une forme de barreau cylindrique ne conduit pas systématiquement à une symétrie cylindrique mais peut correspondre à 3 cas (figure ci-contre) : symétrie de révolution, cylindrique ou plane !

Nous devons donc être très vigilants en analysant les symétries et veiller à ne pas conclure trop vite. Il faut également être attentif en lisant les énoncés, en particulier à l'oral où il sera peut-être simplement signalé que le barreau est « long » ou que « l'on néglige les effets de bords ».

