

DM 8 CORRECTION

Transfert thermique

1- Les battements de cœur servent à pomper le sang qui contient le dioxygène consommé par l'animal (au tout au moins une partie de ce dioxygène qui est passé des poumons dans le sang). Faisons l'hypothèse que, pour tous les mammifères, le taux de O₂ dissout dans le sang est le même. Dans ce cas, le débit sanguin D_{sang} (volume de sang qui doit être pompé par le cœur en une heure) est proportionnel à la consommation horaire de O₂ soit $D_{\text{sang}} = \alpha Q_{O_2}$

Or ce débit sanguin est égal au volume δV_1 de sang pompé par le cœur à chaque battement multiplié par le nombre de battement par unité de temps (cad la fréquence cardiaque f_c). Lorsque l'énoncé dit que la capacité de pompage du cœur est proportionnelle à la masse du cœur, cela peut être interprété comme une proportionnalité entre δV_1 et la masse du cœur, elle-même proportionnelle à la masse M de l'animal. On a donc : $D_{\text{sang}} = \delta V_1 \cdot f_c = \beta \cdot M \cdot f_c$

d'où au final

$$f_c = \frac{D_{\text{sang}}}{\beta \cdot M} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{Q_{O_2}}{M} = \underbrace{\frac{\alpha}{\beta}}_{\text{constante notée } \gamma} \cdot q \cdot \frac{M^{3/4}}{M} \quad \text{avec } q = 0,68 \text{ L.h}^{-1} \text{ kg}^{-3/4} \quad (\text{texte})$$

La loi régissant la fréquence cardiaque des mammifères serait donc : $f_c = \gamma M^{-1/4}$

$$D'où f_{\text{cmusaraigne}} = f_{\text{chomme}} \left(\frac{M_{\text{musaraigne}}}{M_{\text{homme}}} \right)^{-1/4} \approx 821 \text{ à } 1094 \text{ min}^{-1} \approx 14 \text{ à } 18 \text{ s}^{-1}$$

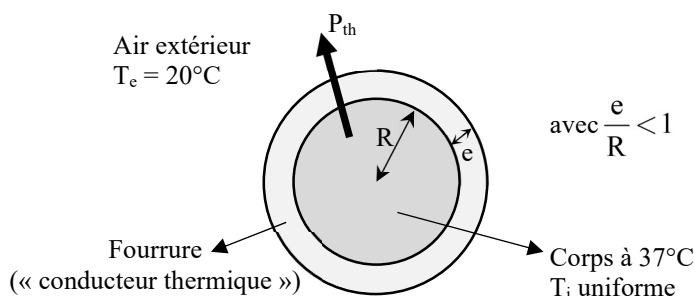
Cohérent avec les données de la musaraigne (15 à 20 s⁻¹)

$\approx \frac{2 \cdot 10^{-3}}{70}$

2- La photo, l'information « l'animal est trapu » et la nécessité d'un modèle géométrique simple conduisent à adopter un modèle sphérique :

Dans la fourrure : $T(r)$

et $\vec{j}_Q = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{u}_r$ (Loi de Fourier)



La situation étudiée est un régime stationnaire où l'énergie dégagée par le métabolisme de l'animal est intégralement évacuée vers l'extérieur à travers la fourrure, ce qui permet de conserver une température interne T_i constante (= 37°C)

Puissance thermique dégagée par l'animal

Par unité de temps l'animal consomme un volume de O₂ de $q \cdot M^{3/4}$ (avec

$$q = 0,68 \text{ L.h}^{-1} \text{ kg}^{-3/4} = \frac{0,68}{3600} \cdot 10^{-3} = 1,9 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} \text{ kg}^{-3/4})$$

La puissance correspondante sera

$$P_{\text{th}} = \eta q \cdot M^{3/4} \quad \eta = 20 \text{ kJ / L} = 2,0 \cdot 10^7 \text{ J.m}^{-3} \quad \text{et } \eta q = 3,8 \text{ W.kg}^{-3/4}$$

avec $M = \mu \frac{4}{3} \pi R^3$ où μ est la masse volumique du corps de l'animal de l'ordre de 10^3 kg.m^{-3}

(comme l'eau liquide)

Donc la puissance produite variera avec la taille de l'animal suivant la loi

$$P_{th} = \eta q \left(\mu \frac{4}{3} \pi \right)^{3/4} R^{9/4} = k \cdot R^{9/4} \quad \text{avec } k = \eta q \left(\mu \frac{4}{3} \pi \right)^{3/4} = 2,0 \cdot 10^3 \text{ W.m}^{-9/4}$$

Relation entre T_e , T_i et e en régime stationnaire

En régime stationnaire, il est souvent intéressant (car plus rapide) de faire un bilan énergétique sur un système non infiniment petit ; ici nous travaillerons sur le système de fourrure compris à l'intérieur de la sphère de rayon $r \in [R; R + e]$

$$dU = \delta Q + \delta E_{libérée}$$

Avec, en régime stationnaire $dU = 0$

$$\delta Q = -4\pi r^2 j_Q dt = \lambda 4\pi r^2 \frac{dT}{dr} dt$$

$$\delta E_{libérée} = P_{th} dt = k \cdot R^{9/4} dt$$

$$\text{Soit } \frac{dT}{dr} = - \frac{k \cdot R^{9/4}}{\lambda 4\pi r^2}$$

On peut ensuite procéder de différentes façons.

On peut par exemple déterminer le champ de température dans la fourrure :

$$T(r) = \frac{k \cdot R^{9/4}}{\lambda 4\pi r} + \underbrace{\text{cst}}_{\substack{\text{déterminé par la} \\ \text{condition aux limites} \\ T(r=R+e) = T_e}} = T_e + \frac{k \cdot R^{9/4}}{\lambda 4\pi} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R+e} \right)$$

et en déduire la température interne $T_i = T_e + \frac{k \cdot R^{9/4}}{\lambda 4\pi} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+e} \right)$ soit

$$\Delta T = \frac{k \cdot R^{9/4}}{\lambda 4\pi} \frac{e}{R(R+e)} = \frac{k \cdot R^{5/4}}{\lambda 4\pi} \frac{1}{1 + \frac{R}{e}}$$

On trouve bien que pour maintenir ΔT constant (soit la température interne constante), si R diminue, le rapport R/e doit également diminuer et donc e/R doit augmenter.

On aurait aussi pu intégrer directement entre R et $R + e$ la relation $\frac{dT}{dr} = - \frac{k \cdot R^{9/4}}{\lambda 4\pi r^2}$:

$$T_e - T_i = - \int_R^{R+e} \frac{k \cdot R^{9/4}}{\lambda 4\pi r^2} dr = \frac{k \cdot R^{9/4}}{\lambda 4\pi} \left(\frac{1}{R+e} - \frac{1}{R} \right)$$

Remarques :

i- On aurait aussi pu travailler sur le système compris entre les sphères de rayon R et de rayon $r \in [R; R + e]$

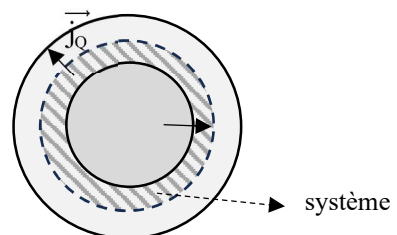
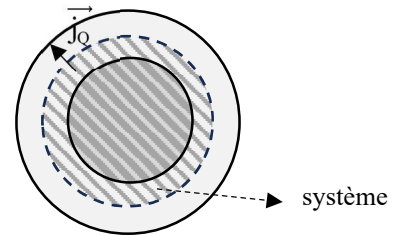
(constitué uniquement de fourrure)

$$dU = \delta Q + \delta E_{libérée}$$

Avec, en régime stationnaire $dU = 0$

$$\delta Q = \left(-4\pi r^2 j_Q(r) + \underbrace{4\pi R^2 j_Q(R)}_{P_{th}} \right) dt = \lambda 4\pi r^2 \frac{dT}{dr} dt + P_{th} dt$$

Et on retrouve la même équation



ii- Si on utilise « l'équation de la chaleur » telle qu'établie en cours sur le système compris entre les sphères de rayons r et $r+dr$ les calculs sont plus longs (il faut intégrer 2 fois au lieu d'une seule)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \text{ en régime permanent}$$

$$\text{On a donc } \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \text{ soit } r^2 \frac{\partial T}{\partial r} = A \text{ et } \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{A}{r^2} \text{ et } T = -\frac{A}{r} + B$$

Pour déterminer A et B, on peut utiliser la continuité de la température et du flux thermique en R :

$$T(R) = T_i = -\frac{A}{R} + B \quad \text{donc} \quad T = -A \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) + T_i$$

$$j_{Qr}(R) = \frac{P_{th}}{4\pi R^2} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}(R) = -\lambda \frac{A}{R^2} \quad \text{donc} \quad A = -\frac{P_{th}}{4\pi\lambda}$$

$$\text{Ainsi } T(r) = \frac{P_{th}}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) + T_i \quad \text{et} \quad T_e = \frac{P_{th}}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{R+e} - \frac{1}{R} \right) + T_i \text{ on retrouve la même expression}$$

$$3- \text{ Le texte indique } \frac{e}{R} \leq 1 \text{ donc } \Delta T = \frac{k.R^{5/4}}{\lambda 4\pi} \frac{1}{1 + \frac{e}{R}} \leq \frac{k.R^{5/4}}{\lambda 4\pi} \frac{1}{2}$$

$$\text{Soit } R \geq \left(8\pi \frac{\lambda}{k} \Delta T \right)^{4/5} \text{ soit } R \geq \left(8\pi \frac{10^{-2}}{2 \cdot 10^3} 20 \right)^{4/5} \approx 8(,3) \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\text{et une masse de } M = \mu \frac{4}{3} \pi R^3 \geq \mu \frac{4}{3} \pi \left(8\pi \frac{\lambda}{k} \Delta T \right)^{12/5} \approx 2g \text{ ce qui correspond à ce qu'annonce le texte.}$$