

Diffusion thermique

Utiliser dès que possible la notion de conductance ou de résistance thermique.

Exercice 1 : Table de billard.

On étudie les transferts thermiques au sein d'une table de billard de dimensions horizontales 2,4 m par 1,2 m, et d'épaisseur verticale égale à 10 cm. Le long de l'axe vertical, la table est constituée d'un empilement de 3 « couches » :

- La première couche est une plaque chauffante d'épaisseur $e_1 = 4\text{ cm}$ et de conductivité thermique $\Lambda_1 = 60\text{ W/Km}$, constituée d'une répartition uniforme de résistances fournissant une puissance volumique p , et isolée thermiquement sur sa face inférieure ;
- La seconde couche, qui surmonte la plaque chauffante, est une plaque de marbre d'épaisseur $e_2 = 2\text{ cm}$ et de conductivité thermique $\Lambda_2 = 3,3\text{ W/Km}$;
- Enfin, la couche supérieure est un tapis d'épaisseur $e_3 = 4\text{ cm}$ et de conductivité thermique $\Lambda_3 = 0,4\text{ W/Km}$ dont la température de surface, en contact avec l'air, est $T_s = 40^\circ\text{C}$.

La température atmosphérique est $T_a = 20^\circ\text{C}$ et il y a entre le tapis et l'air un coefficient de transfert $h = 10\text{ W/Km}^2$.

- 1- Schématiser l'ensemble de la table et calculer, en régime permanent, le flux thermique évacué par la table ; en déduire la température à la jonction entre la plaque chauffante et la plaque de marbre.
- 2- Déterminer le champ de température dans la partie chauffante ainsi que la puissance volumique fournie par les résistances chauffantes.

Exercice 2 : Etude d'une coquille sphérique. (exo d'oral Centrale)

Soit une coquille sphérique de conductivité thermique λ_1 , de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2 . On place à l'intérieur de la coquille un mélange eau + glace à 0°C , l'extérieur étant l'air ambiant à 20°C . Il existe au niveau des interfaces intérieure et extérieure des transferts conducto-convectifs caractérisés par des coefficients respectivement notés h_1 et h_2 . On donne :

$h_1 = 1,0 \cdot 10^2\text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$; $h_2 = 1,0 \cdot 10^1\text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$;
 $\lambda_1 = 2,0\text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$; $R_1 = 1\text{ cm}$; $R_2 = 5\text{ cm}$; Chaleur latente de fusion de l'eau : 333 kJ.kg^{-1} .

- 1- Déterminer le temps au bout duquel 1g de glace aura fondu, en régime permanent.
- 2- Afin d'améliorer l'isolation, on ajoute une seconde coquille sphérique autour de la première, de rayon intérieur R_2 , d'épaisseur e et de conductivité thermique λ_2 . On suppose que la valeur du coefficient de transfert conducto-convectif est le même à l'interface entre l'air et la nouvelle coquille.

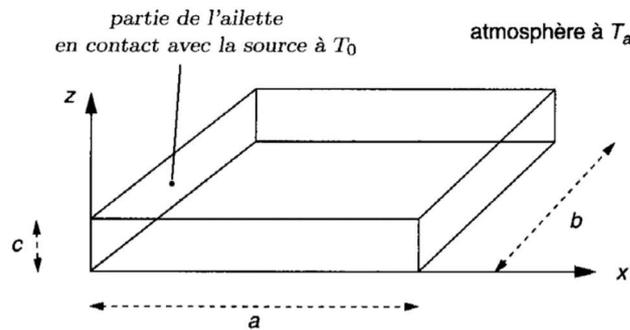
Discuter l'isolation en fonction du matériau choisi pour la seconde coquille, à partir des données numériques suivantes : Acier : $\lambda_2 = 46\text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$; Verre : $\lambda_2 = 0,97\text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$; Bois :

$\lambda_2 = 0,13\text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$

L'un de ces matériaux permet-il d'augmenter le temps de fonte de la glace quel que soit e ?

Exercice 3 : Ailette de refroidissement. (classique de l'oral)

Pour évacuer de la chaleur d'une source vers l'atmosphère, on a souvent recours au dispositif représenté sur la figure ci-dessous et constitué d'une plaque de côtés a selon \vec{u}_x , b selon \vec{u}_y et $c \ll b$ selon \vec{u}_z collée en $x = 0$ à la source de chaleur qui impose $T(x = 0) = T_0$. Cette plaque, de conductivité thermique λ , est plongée dans l'atmosphère, qui est assimilée à une source de température T_a constante. On étudie un régime stationnaire. On prend en compte l'existence de transferts thermiques conducto-convectifs entre l'ailette et l'air, avec un coefficient caractéristique noté h . On admet toutefois que si ces transferts ne sont pas trop intenses, les transferts thermiques diffusifs au sein de l'ailette se font essentiellement le long de l'axe (Ox) et que l'on peut supposer que la température à l'intérieur de l'ailette ne dépend quasiment que de x .

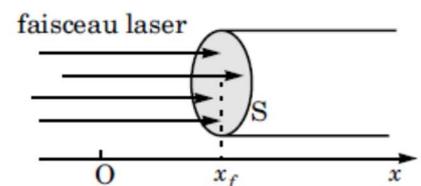


- 1- En faisant un bilan pour la tranche de plaque comprise entre x et $x+dx$, montrer que $T(x)$ est solution d'une équation de la forme : $-\delta^2 \frac{d^2 T}{dx^2} + T = T_a$ et exprimer δ en fonction de h, λ, b et c ; simplifier dans la limite $c \ll b$
- 2- On suppose que $a \ll \delta$ de telle sorte qu'on peut raisonner sur une plaque de longueur a infinie. A l'extrémité de la plaque, l'atmosphère impose $T(x \rightarrow \infty) = T_a$. Etablir l'expression de $T(x)$ en fonction de T_0, T_a, x et δ ; tracer l'allure de son graphe et interpréter concrètement δ . Comment un industriel choisira-t-il la longueur effective a de la plaque par rapport à δ ?
- 3- Calculer le flux thermique total Φ évacué par l'ailette en fonction de h, b, δ, T_0 et T_a .
- 4- En l'absence d'ailette, la surface d'échange entre le source et l'atmosphère serait bc et le flux évacué vers l'atmosphère vaudrait $\Phi_0 = h.bc(T_0 - T_a)$. Exprimer le rendement de l'ailette $\eta = \frac{\Phi}{\Phi_0}$ en fonction de h, λ et c . Quel est l'intérêt de prendre $c \ll b$?
- 5- Connaissez-vous des systèmes concrets qui utilisent une ailette de refroidissement ?

Exercice 4 : Perçage laser (thème récurrent - ici inspiré de Centrale MP 2000 et Mines MP 2014)

Le perçage laser consiste à faire fondre localement un matériau grâce à l'énergie apportée par un faisceau laser. On étudie ici la fusion d'un matériau solide (aluminium) sous l'effet du rayonnement laser.

On considère un barreau cylindrique homogène et isotrope, de masse volumique ρ , de capacité thermique massique c et de conductivité thermique λ supposées indépendantes de la température. On note ℓ_0 la longueur initiale du barreau, T_f et T_v ses températures de fusion et de vaporisation et L_f et L_v ses chaleurs latentes massiques de fusion et de vaporisation.



Diffusion thermique TD

Ce barreau est éclairé uniformément, sur toute sa section d'aire S , par un faisceau laser de puissance P_0 (figure ci-contre). On appelle I_0 la puissance surfacique du faisceau et on suppose que la face éclairée du barreau absorbe toute la puissance lumineuse incidente. On ne s'intéresse pas à la phase de montée en température du barreau, mais uniquement à la phase qui succède le début de la fusion de l'extrémité éclairée par le laser.

Le liquide provenant de la fusion du barreau sort immédiatement de la zone éclairée par le laser. Soit $x_f(t)$ l'abscisse du front de fusion, nulle à $t = 0$, et $v_f(t)$ la vitesse de progression de ce front. On suppose que la température dans la partie solide du barreau ne dépend que de x et du temps : $T(x,t)$. En $x = x_f$, $T = T_f$ du fait de la fusion et on suppose que l'extrémité opposée du barreau est maintenue à la température T_0 .

Données : $\lambda = 210 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$; $c = 900 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$; $\rho = 2700 \text{ kg.m}^{-3}$; $T_f = 660^\circ\text{C}$; $L_f = 395 \text{ kJ. kg}^{-1}$;

$$T_v = 2300^\circ\text{C} ; L_v = 1,1 \cdot 10^4 \text{ kJ. kg}^{-1} ; \ell_0 = 1 \text{ cm} ; T_0 = 20^\circ\text{C} ; I_0 = 10^5 \text{ W.mm}^{-2} ; S = 0,8 \text{ mm}^2.$$

1- Résultats de base.

- a- Quelle équation locale est-elle vérifiée par $T(x,t)$ dans la partie solide du barreau ? Quelles sont les conditions limites imposées au champ de température ?
- b- On s'intéresse à la vitesse $v_f(t)$ de progression du front de fusion. En effectuant un bilan d'énergie sur la masse dm d'aluminium qui fond entre t et $t + dt$, montrer que :

$$\rho L_f v_f(t) = I_0 + \lambda \frac{\partial T}{\partial x}(x_f, t) \quad [\text{équation 1}]$$

- c- Pour poursuivre l'étude, il faut résoudre l'équation de la question 1. Pourquoi ne peut-on pas se placer en régime permanent pour effectuer cette résolution ? Quelle est la durée typique τ des transferts thermiques à l'échelle du barreau ?

2- Résolution dans l'ARQS.

- a- On effectue, dans une première approche, une hypothèse d'ARQS. Rappeler la signification de cette hypothèse et proposer une condition sur v_f pour que cette hypothèse soit valide.
- b- Que devient l'équation locale de la question 1-a- dans cette hypothèse ? Quelle forme prend alors le champ de température $T(x,t)$? Montrer que, dans ces conditions, le dernier terme de l'équation [1] est négligeable.
- c- En déduire les lois $v_f(t)$, $x_f(t)$ et $T(x,t)$. Représenter qualitativement $T(x,t)$ en fonction de x à différents instants t .
- d- Evaluer numériquement v_f ainsi que la durée typique nécessaire pour forer un trou de $50 \mu\text{m}$, puis discuter l'hypothèse d'ARQS.

3- Résolution hors ARQS.

On cherche maintenant des solutions de la forme $T(x,t) = F(x - v_f t)$ en supposant que la vitesse v_f de progression du front de fusion est indépendante du temps et que la longueur ℓ_0 peut être considérée infinie. F est une fonction d'une seule variable, à déterminer.

- a- Interpréter cette forme de solution et commenter brièvement les hypothèses ci-dessus.
- b- Établir l'équation différentielle en F et la résoudre avec les conditions aux limites imposées. Représenter qualitativement $T(x,t)$ en fonction de x à différents instants t . Sur quelle distance caractéristique d se fait sentir l'échauffement dans le barreau ?
- c- Déduire des questions précédentes l'expression de v_f en fonction des données. L'évaluer numériquement, ainsi que la distance d et la durée typique nécessaire pour forer un trou de $50 \mu\text{m}$.
- d- En fait, l'aluminium est vaporisé lors du perçage. Reprendre la question précédente.

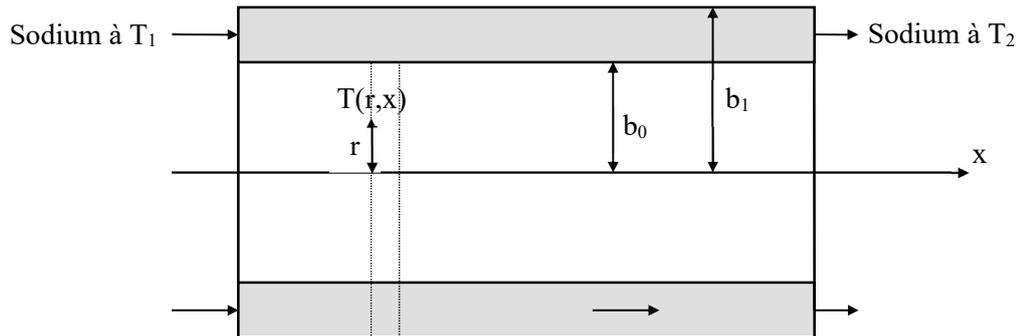
Exercice 5 : Température dans un réacteur nucléaire. (d'après un problème d'écrit)

S'il reste du temps...

Dans un réacteur nucléaire, un fluide caloporteur (du sodium en fusion) évacue l'énergie produite par les réactions nucléaires. Sur un exemple simplifié nous allons évaluer la température maximale atteinte par le combustible en régime stationnaire.

Le combustible est sous forme de barres cylindriques de rayon b_0 et de longueur L . Chaque barre est refroidie par une circulation de sodium liquide dans un espace annulaire entourant la barre (figure ci-dessous). La gaine extérieure a un rayon b_1 . La température d'entrée du sodium est T_1 , sa température de sortie T_2 , sa vitesse d'écoulement v , sa masse volumique ρ , sa capacité thermique massique c . On donne :

$$T_1 = 120 \text{ }^\circ\text{C} ; T_2 = 302 \text{ }^\circ\text{C} ; L = 3,0 \text{ m} ; b_1 = 2,6 \text{ cm} ; b_0 = 2,0 \text{ cm} ; \rho = 850 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3} ; c = 1250 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$$



Hypothèses et notations :

On note respectivement $T(r,x)$ et $T_s(x)$ les températures dans la barre combustible et dans le sodium, cette dernière étant supposée indépendante de r . On note en outre $T_p(x)$ la température de surface de la barre combustible au contact avec le sodium.

En tout point M de coordonnées (r,x) de la barre, la puissance thermique volumique produite par la réaction nucléaire est proportionnelle au flux axial de neutrons libérés par la réaction ; on admet que cette puissance est indépendante de r et proportionnelle à $\sin(\pi x/L)$.

Dans la barre combustible, on admet que la chaleur produite est évacuée essentiellement **radialement** par conduction thermique. La conductivité thermique λ du matériau combustible est $\lambda = 32,8 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, supposée indépendante de la température.

Le flux thermique $d\phi$ échangé entre le sodium liquide et une tranche de combustible d'épaisseur dx est caractérisé par un coefficient d'échange h tel que : $|d\phi| = h \cdot |T_p - T_s| \cdot dS$ où dS est la surface latérale de la tranche d'épaisseur dx . On donne : $h = 50\,000 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$. On néglige toute diffusion thermique dans le sodium.

1- Vitesse d'écoulement et température du sodium.

1-1- Sachant que la puissance thermique totale ϕ_e évacuée par le sodium est égale à $0,252 \cdot 10^6 \text{ W}$, exprimer puis calculer le débit massique du sodium $D_m = \dot{m}$. En déduire la vitesse v d'écoulement du sodium.

1-2- A partir d'un bilan sur une tranche de barre d'épaisseur dx , montrer que : $T_s(x) = A + B \cos(\pi x/L)$. Déterminer A et B , d'abord en fonction de T_1 , L , ϕ_e , D_m et c , puis en fonction de T_1 et T_2 uniquement.

2- Température de surface du combustible.

2-1- Exprimer la température de surface $T_p(x)$ de la barre du combustible en contact avec le sodium.

2-1- T_p est maximale pour une position x_m . Calculer x_m et la valeur maximale T_m de T_p .

3. Température dans le combustible.

3-1- On considère une tranche cylindrique de combustible de rayon r , d'épaisseur dx , ayant pour axe celui de la barre de combustible.

Diffusion thermique TD

- 3-1-a-** Exprimer, à partir de la loi de Fourier, le flux de puissance thermique traversant la surface latérale du cylindre élémentaire.
- 3-1-b-** Exprimer l'énergie $d\phi(r)$ produite par unité de temps dans cette tranche en fonction de r , x et b_0 .
- 3-1-c-** En déduire l'équation différentielle vérifiée par $T(r,x)$.
- 3-2-** Déterminer $T(r, x)$.
- 3-3-** Montrer que sur l'axe du cylindre, la température $T(r = 0, x)$ atteint une valeur maximale T'_M en x'_M .
Calculer numériquement x'_M et T'_M .