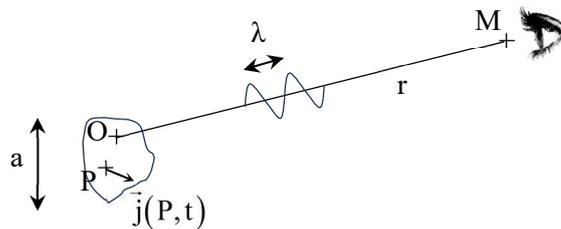


# Champ rayonné par un dipôle oscillant

## I- Source de rayonnement et modèle du dipôle oscillant

### A- Source de rayonnement. Echelles caractéristiques.

Tout système contenant des charges mobiles est source d'un champ électromagnétique. En régime variable, ce champ est de nature propagative et on dit que la source rayonne le champ. Pour des courants en régime permanent sinusoïdal (RPS). L'onde rayonnée est monochromatique.



$a$  est la taille du domaine des sources

$r$  est la distance d'observation par rapport aux sources

$\lambda$  est la longueur d'onde de l'onde électromagnétique rayonnée (en RPS)

Hypothèse de travail dans ce cours :  $a \ll \lambda$  et  $a \ll r$

Exemples :

- Atome excité :  $\left\{ \begin{array}{l} \lambda \sim 400 \text{ à } 800 \text{ nm} \\ a \leq 1 \text{ nm} \\ r > \text{qq cm} \end{array} \right.$  . On a  $a \ll \lambda \ll r$
- En revanche pour une antenne :  $\left\{ \begin{array}{l} \lambda \sim 1 \text{ m} \\ a \sim \text{fraction de } \lambda \\ r \sim 10^2 \text{ à } 10^3 \text{ m} \end{array} \right.$  . On a  $a \ll r$ , mais en revanche  $a \sim \lambda$

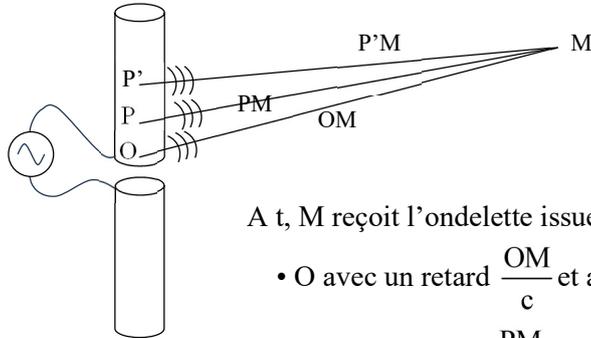
En pratique, on aura aussi  $r \gg \lambda$  ; cela s'appelle observer dans la **zone de rayonnement**.

On est à l'opposé de la situation d'ARQS qui correspond à  $r \ll \lambda$  et  $a \ll \lambda$

## B- Rôles des hypothèses sur les échelles caractéristiques

Le principe du calcul des champs rayonnés est hors programme. Toutefois, vous devez comprendre le rôle des hypothèses  $a \ll \lambda$  et  $a \ll r$ . Il faut savoir ceci :

- Les champs  $\vec{E}(M, t)$  et  $\vec{B}(M, t)$  rayonnés par la source D, en un point M et à un instant quelconque, résultent de la superposition en M à t d'ondelettes électromagnétiques émises par chacun des points P de D ; ces ondelettes se propageant de P vers M à la vitesse c



A t, M reçoit l'ondelette issue de

- O avec un retard  $\frac{OM}{c}$  et avec une atténuation en  $\frac{1}{OM^n}$  ( $n = 1, 2$  ou  $3$ )
- P avec un retard  $\frac{PM}{c}$  et avec une atténuation en  $\frac{1}{PM^n}$
- O avec un retard  $\frac{P'M}{c}$  et avec une atténuation en  $\frac{1}{P'M^n}$

Conséquence : les expressions de  $\vec{E}(M, t)$  et  $\vec{B}(M, t)$  sont des intégrales sur des termes de la

forme :  $\frac{1}{PM^n} \vec{j}\left(P, t - \frac{PM}{c}\right); \forall P \in D$

- Les hypothèses  $a \ll \lambda$  et  $a \ll r$  permettent des simplifications dans l'expression analytique des champs rayonnés par la source

- L'hypothèse  $a \ll r$  permet des DL en  $\frac{a}{r}$  des facteurs d'atténuation qui, à l'ordre zéro,

donnent simplement  $\frac{1}{PM^n} \approx \frac{1}{r^n}$  ( $n = 1, 2, 3$ )

Explication :  $\forall P \in D, PM = r + \text{terme valant au maximum } a$

donc  $PM = r(1 + \varepsilon)$  avec  $\varepsilon \leq \frac{a}{r} \ll 1$  et à l'ordre 0 :  $PM = r$  et  $\frac{1}{PM^n} = \frac{1}{r^n}$

- L'hypothèse  $a \ll \lambda$  permet, quant à elle, d'assimiler les divers retards  $\frac{PM}{c}$  à un

unique retard « moyen » :  $\frac{r}{c}$  et d'écrire  $\forall P \in D, \forall t, \vec{j}\left(P, t - \frac{PM}{c}\right) \approx \vec{j}\left(P, t - \frac{r}{c}\right)$

Explication :  $\forall P \in D, \frac{PM}{c} - \frac{r}{c} \leq \frac{a}{c}$ , et si  $a \ll \lambda$  :  $\frac{PM}{c} - \frac{r}{c} \ll \frac{\lambda}{c} = T$  où T est la

période des fluctuations temporelles de j. Ainsi les retards  $\frac{PM}{c}$  et  $\frac{r}{c}$  peuvent être

confondus à l'échelle temporelle des variations de j :

$$\vec{j}\left(P, t - \frac{PM}{c}\right) = \vec{j}\left(P, t - \frac{r}{c} - \underbrace{\delta t}_{\leq \frac{a}{r} \ll T}\right) \approx \vec{j}\left(P, t - \frac{r}{c}\right)$$

## C- Modèle du dipôle électrique oscillant

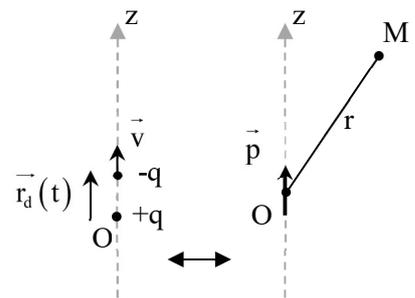
- Même avec les hypothèses  $a \ll \lambda$  et  $a \ll r$ , un problème de rayonnement reste ardu. On se limite à la source de rayonnement la plus simple.
- **Définition : un dipôle électrique oscillant est un ensemble de deux charges opposées dont l'une est fixe et l'autre oscille sinusoïdalement.**  
Par exemple : charge  $q > 0$  immobile ; charge  $-q < 0$  qui oscille sinusoïdalement (période  $T$ , pulsation  $\omega$ ) autour de  $q$  (amplitude  $a$ ).

- Paramétrage
  - L'origine  $O$  est confondu avec  $q$
  - $-q$  est repéré par  $\vec{r}_d(t) = -a \cos(\omega t) \vec{u}_z$
  - L'ensemble possède donc un moment dipolaire

« oscillant » : 
$$\vec{p}(t) = -q \vec{r}_d(t) = \underbrace{p_0 \cos(\omega t)}_{\text{noté } p(t)} \vec{u}_z$$

remarque : la vitesse de  $-q$  est  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}_d}{dt}$  et on a

$$\boxed{-q \vec{v} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{p}(t) \vec{u}_z}$$



- **Hypothèses**
  - On observe le rayonnement en  $M$  tel que  $r \gg a$  (même hypothèse que pour le dipôle électrostatique d'où le nom d'**hypothèse dipolaire**)
  - $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \gg a$ . Cette hypothèse est automatiquement vérifiée si  $v(t) \ll c$  pour tout  $t$  est de ce fait appelé **hypothèse non relativiste**.

Preuve :  $\vec{r}_d(t) = -a \cos(\omega t) \vec{u}_z \Rightarrow \vec{v}(t) = a\omega \sin(\omega t) \vec{u}_z$ . D'où  $\vec{v}(t) \sim a\omega$

Ainsi :  $v(t) \ll c \Rightarrow a\omega \ll c$  soit  $a \ll \frac{c}{\omega} < \frac{2\pi c}{\omega} = \lambda$

- **Intérêt du dipôle électrique oscillant**
  - Les propriétés des champs  $\vec{E}(M, t)$  et  $\vec{B}(M, t)$  rayonnés par cette source sont pour la plupart généralisable à de nombreuses sources de rayonnement
  - Il peut servir directement de modèle pour décrire le rayonnement d'un atome excité, selon l'approche classique ou semi-classique « de l'électron élastiquement lié.
  - Il peut servir de modèle pour une sous partie d'une antenne (mais par pour une antenne entière car une antenne est de taille  $a \sim \lambda$

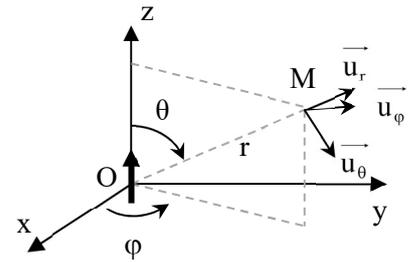
## II- Champs rayonnés : analyse des expressions

### A- Champs rayonnés. Ordre de grandeur des différents termes en fonction de la distance d'observation

- Si  $\vec{p}(t) = p(t)\vec{u}_z$ , alors les champs rayonnés s'écrivent (les expressions sont admises et seront TOUJOURS redonnées au concours)

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sin\theta \left[ \frac{\dot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r^2} + \frac{\ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{rc} \right] \vec{u}_\phi$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \begin{cases} E_r = \frac{2 \cos\theta}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{p\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r^3} + \frac{\dot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r^2 c} \right] \\ E_\theta = \frac{\sin\theta}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{p\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r^3} + \frac{\dot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r^2 c} + \frac{\ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{rc^2} \right] \\ E_\phi = 0 \end{cases}$$



- Analyse en ordres de grandeur lorsque  $p(t) = p_0 \cos(\omega t)$

Terme	$\frac{p}{r^3}$	$\frac{\dot{p}}{r^2 c}$	$\frac{\ddot{p}}{rc^2}$
Ordre de grandeur	$\frac{p_0}{r^3}$	$\frac{p_0 \omega}{r^2 c}$	$\frac{p_0 \omega^2}{r c^2}$

$$\begin{cases} p\left(t - \frac{r}{c}\right) = p_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \\ \dot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) = -\omega p_0 \sin\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \\ \ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) = -\omega^2 p_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \end{cases}$$

Terme dominant si  $\frac{1}{r^3} \gg \frac{\omega^2}{rc^2}$  soit  $r^2 \ll \frac{\lambda^2}{4\pi^2}$

Alors

$$\vec{B}(\vec{r}, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \sin\theta \frac{\dot{p}(t)}{r^2} \vec{u}_\phi$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \approx \begin{cases} E_r = \frac{2 \cos\theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{p(t)}{r^3} \\ E_\theta = \frac{\sin\theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{p(t)}{r^3} \\ E_\phi = 0 \end{cases}$$

$$\text{Alors } \frac{B^2 / 2\mu_0}{\epsilon_0 E^2 / 2} \approx \frac{\omega^2 r^2}{c^2} \ll 1$$

Terme dominant si  $\frac{1}{r^3} \ll \frac{\omega^2}{rc^2}$  soit  $r \gg \frac{\lambda}{2\pi}$

Alors

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sin\theta \frac{\ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{rc} \vec{u}_\phi$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \approx \frac{\sin\theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{\ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{rc^2} \vec{u}_\theta$$

## B- Structure du champ dans la zone de rayonnement ; approximation d'onde localement plane

- Commençons par vérifier que les expressions proposées sont conformes au principe de Curie

➤ Le plan en  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  est plan de symétrie du dipôle

et donc  $\begin{cases} \vec{E}(M, t) \text{ est contenu dans ce plan et donc } E_\varphi = 0 \\ \vec{B}(M, t) \text{ est orthogonal à ce plan et donc colinéaire à } \vec{u}_\varphi \end{cases}$

➤ Le dipôle est invariant par rotation autour de (Oz)

Donc  $\vec{E}(M, t)$  et  $\vec{B}(M, t)$  sont indépendants de la coordonnées  $\varphi$  de M

➤ Conclusion  $\boxed{\begin{cases} \vec{E}(M, t) = E_r(r, \theta, t)\vec{u}_r + E_\theta(r, \theta, t)\vec{u}_\theta \\ \vec{B}(M, t) = B_\varphi(r, \theta, t)\vec{u}_\varphi \end{cases}}$

- Analysons les expressions plus en détails

➤ Dépendance temporelle des champs ; caractère progressif

○  $\vec{E}(M, t)$  et  $\vec{B}(M, t)$  en M, à t, dépendent exclusivement de la valeur de  $\vec{p}$  en

$t - \frac{r}{c}$ . Les effets de  $\vec{p}$  se font sentir en M avec un retard  $\frac{r}{c}$  ; ce qui est

caractéristique de la propagation à la vitesse c sur une distance r

La résolution de ce problème de rayonnement conduit bien à une solution de type **onde progressive**.

○ Ceci est également cohérent avec la propriété énoncée au I-B- et l'hypothèse

$\lambda \gg a$  : le retard lié à la propagation est  $\frac{r}{c}$  quelle que soit la position de la charge oscillante.

➤ Structure spatiale de l'onde anisotropie

○ **L'onde n'est pas plane**

C'est évident puisque l'onde se propage dans toutes les directions autour de O et non dans une direction unique. Mathématiquement, les expressions

couplent le temps et l'espace via  $t - \frac{\|\vec{r}\|}{c}$  et non  $t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c}$

○ Est-ce une onde sphérique ? **NON !**

Les surfaces d'onde sont des sphères mais l'amplitude de l'onde est

proportionnelle à  $\sin \theta$  : elle n'est donc pas constante sur une surface d'onde.

L'amplitude de l'onde étant différente selon la direction de propagation

autour de O, on dit que le rayonnement dipolaire électrique est **anisotrope**

(tout en conservant la symétrie de révolution autour de  $\vec{p}$ ) : **il est maximal**

**dans le « plan équatorial » et nul dans la direction de  $\vec{p}$ .**

○ **Structure locale d'onde plane**

« Localement » c'est-à-dire dans une zone de taille  $> \lambda$ , mais  $\ll r$ , on peut

considérer  $\frac{1}{r}$ ,  $\sin \theta$  et  $\vec{u}_r$  fixes d'un point à l'autre et on observe alors une **structure locale d'onde plane progressive** selon  $\vec{u}_r$  polarisée rectilignement selon  $\vec{u}_\theta$

En effet :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \approx \underbrace{E_0}_{\approx \text{cst}} \cos \left( \omega \left( t - \underbrace{\frac{\vec{u}_r \cdot \vec{r}}{c}}_{\approx \text{cst}} \right) \right) \underbrace{\vec{u}_\theta}_{\approx \text{cst} \perp \vec{u}_r} \quad \left( E_0 = \frac{-\mu_0 \omega^2 p_0 \sin \theta}{4\pi r} \right)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{u}_r \wedge \vec{E}}{c} \quad (\text{vérifiez - le})$$

○ **Décroissance de l'amplitude des champs avec r**

$\vec{E}(M, t)$  et  $\vec{B}(M, t)$  ont une amplitude qui **décroit en  $1/r$**  avec la distance à la source ; ce qui est très différents des champs statiques par exemple (décroissance en  $1/r^3$ )

Ceci conduit à un vecteur de Poynting en  $1/r^2$  et assure **la CONSERVATION DE L'ENERGIE ELECTROMAGNETIQUE**.

○ **Dépendance vis-à-vis de la charge mobile**

Le champ rayonné dépend de  $\ddot{p}$  et non de  $\dot{p}$  ou  $p$  : **le rayonne n'existe que si la particule est accélérée !**

Il s'agit d'une propriété fondamentale de l'électromagnétisme : ce sont exclusivement les **particules chargées accélérées** qui sont responsables du rayonnement et toute particule chargée accélérée rayonne un champ électromagnétique, quelle que soit l'origine de cette accélération.

Cette propriétés se manifeste dans 4 grandes situations

1. **Le rayonnement des antennes**, émis par les électrons de conduction associés à un courant électrique variable dans un circuit
2. **Le rayonnement thermique**, émis par tout corps macroscopique de température non nulle (les constituants microscopiques du corps - électrons, noyaux- sont accélérés du fait de l'agitation thermique)
3. **Le rayonnement synchrotron**, émis par les particules chargées en mouvement circulaire dans les synchrotrons (accélération de particules en forme d'anneaux, comme le LHC au CERN ou le synchrotron SOLEIL à Orsay.
4. **Le rayonnement de freinage**, émis par des particules chargées qui arrivent dans un milieu dense et sont brutalement freinées.

### III- Puissance rayonnée par un dipôle oscillant

#### A- Vecteur de Poynting et indicatrice de rayonnement

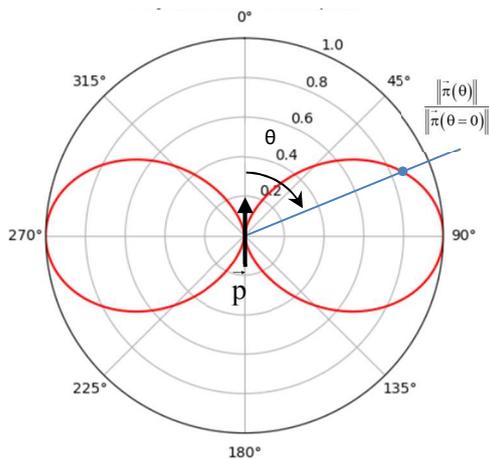
$$\begin{aligned} \vec{\pi} &= \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E} \wedge (\vec{u}_r \wedge \vec{E})}{\mu_0 c} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{u}_r \\ &= \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \left( \ddot{\vec{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right)^2 \vec{u}_r \end{aligned}$$

La dépendance en  $\sin^2 \theta$  traduit l'anisotropie du rayonnement. On visualise souvent cette anisotropie

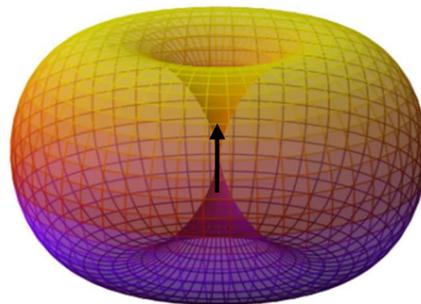
grâce à l'indicatrice de rayonnement : surface (ou courbe à 2D) de coordonnées :  $\left( \frac{\|\vec{\pi}(\theta, \varphi)\|}{\|\vec{\pi}\|_{\max}}, \theta, \varphi \right)$ . On

la trace de la façon suivante :

- On considère un point M d'une sphère de rayon r arbitraire
- A M on associe les points Q tels que  $\overline{OQ} = \overline{OM} \sin^2 \theta$



Indicatrice de rayonnement 2D



Indicatrice de rayonnement 3D

#### B- Puissance totale rayonnée par le dipôle

Soit  $\Sigma_r$  une sphère de rayon r quelconque. Calculons  $P(r,t)$ , la puissance rayonnée à travers cette sphère de rayon r

$$\begin{aligned} P(r,t) &= \iint_{\Sigma_r} \vec{\pi}(r, \theta, \varphi) \cdot \vec{dS} = \iint_{\Sigma_r} \pi_r(r, \theta, \varphi) r^2 \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi \\ &= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \left( \ddot{\vec{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right)^2 r^2 \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi \\ &= \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \left( \ddot{\vec{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right)^2 2\pi \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^3 \theta \cdot d\theta \end{aligned}$$

$$\text{Avec } \sin^3 \theta = \frac{3}{4} \sin \theta - \frac{1}{4} \sin 3\theta$$

## Onde électromagnétique 2

$$P(r, t) = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \ddot{\mathbf{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right)^2 \underbrace{2\pi \left[ -\frac{3}{4} \cos \theta + \frac{1}{12} \cos 3\theta \right]}_{\frac{4}{3}} \Big|_0^\pi = \frac{\mu_0}{6\pi c} \ddot{\mathbf{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right)^2$$

$$= \frac{\mu_0}{6\pi c} \left( -\omega^2 p_0 \cos \left( \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right) \right)^2$$

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2}{12\pi c} \omega^4$$

On retiendra :  $\langle P \rangle \propto \omega^4$

Commentaires :

- $\langle P \rangle$  est indépendant de  $r$  : on pouvait le prévoir en faisant un bilan énergétique sur le système compris entre deux sphères de rayons  $r_1$  et  $r_2$ .

$$\underbrace{\frac{dU_{em}}{dt}}_{\substack{\neq 0 \\ \text{car oscille} \\ \text{avec le champ}}} = \underbrace{P}_{\substack{\text{entrant à} \\ \text{travers} \\ \Sigma_1 \text{ et } \Sigma_2}} + \underbrace{P}_{\substack{\text{matière} \rightarrow \text{champ} \\ 0}}$$

Mais en valeur moyenne  $\left\langle \frac{dU_{em}}{dt} \right\rangle = \langle P_{\Sigma_1} \rangle - \langle P_{\Sigma_2} \rangle$

- $\langle P \rangle$  est également la puissance rayonnée à travers toute surface fermée englobant le dipôle.
- $\langle P \rangle \propto \omega^4$  les antennes rayonnent d'autant mieux que la fréquence est élevée (c'est ce qui explique le bleu du ciel)
- $P(r, t) = \frac{\mu_0}{6\pi c} \left( \ddot{\mathbf{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right)^2$  et  $\left( \ddot{\mathbf{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right)^2 = e^2 \cdot a_{\text{électron}}^2 \left( t - \frac{r}{c} \right)$

On obtient la formule de Larmor :  $P(r, t) = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} a_{\text{charge mobile}}^2 \left( t - \frac{r}{c} \right)$

## IV- Diffusion d'une onde électromagnétique par une molécule. Modèle de la charge élastiquement liée. Application

### A- Le phénomène de diffusion d'une onde (descriptif pour la culture)

#### 1- Qu'est-ce que la diffusion ?

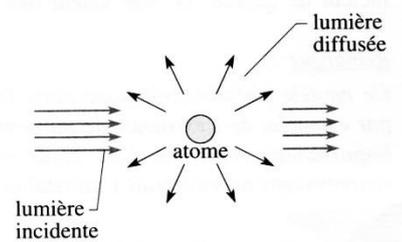
Une onde électromagnétique se propageant dans un milieu transparent (comme l'air par exemple) interagit avec les atomes et les molécules constituant ce milieu, ainsi qu'avec les « impuretés » du milieu, c'est-à-dire avec les diverses particules microscopiques ou mésoscopiques en suspension dans le milieu (poussières, pollens, gouttelettes d'eau...).

Si l'énergie du rayonnement est très intense, i.e. si le rayonnement est très haute fréquence (rayons X ou g), il peut ioniser les particules du milieu (arracher des électrons aux particules) ; nous n'envisageons pas cette situation et nous limitons ici à une interaction **non ionisante** pour le milieu de propagation. Nous n'envisageons pas non plus une éventuelle rupture de liaison chimique au sein d'une molécule sous l'effet du rayonnement. Que se passe-t-il alors ?

Sous l'effet du champ électrique de l'onde, les électrons de ces atomes, molécules et particules sont mis en mouvement et se comportent alors comme des dipôles oscillants ; ils prélèvent ainsi de l'énergie à l'onde incidente et émettent à leur tour une onde électromagnétique, dans des directions pouvant être différentes de la direction de propagation de l'onde primaire : on dit qu'il y a **diffusion** de l'onde primaire et les structures à l'origine du phénomène (atomes, molécules ou particules diffusantes) sont appelées des **diffuseurs**.

Du fait de la diffusion, l'onde primaire perd donc progressivement de l'énergie lors de sa propagation et le milieu n'est donc pas parfaitement transparent ; toutefois, ce qualificatif convient si la diffusion reste minimale, c'est-à-dire si l'onde primaire peut se propager sur de grandes distances sans trop d'atténuation. (Les diffuseurs, quant à eux, oscillent avec une énergie moyenne qui est stationnaire).

La manière exacte dont un milieu diffuse une onde dépend essentiellement de trois facteurs : la **fréquence** typique de l'onde, la **taille des diffuseurs** relativement à la longueur d'onde typique du champ excitateur, qui détermine les directions préférentielles de diffusion ainsi que la dépendance de l'intensité diffusée vis-à-vis de la longueur d'onde du champ excitateur, et enfin la **répartition spatiale des diffuseurs** au sein du milieu, qui conditionne fortement l'intensité diffusée.



*Attention au « faux-ami » :*  
dans un contexte autre qu'ondulatoire, la diffusion désigne l'évolution spatio-temporelle d'une grandeur physique  $a(x,t)$  qui suit une équation locale du type :

$$\partial a / \partial t = Cste \times \partial^2 a / \partial x^2$$

*Exemples :* diffusion thermique à travers un mur, diffusion des particules colorées d'une tache d'encre sur un buvard, diffusion du champ magnétique dans un métal (effet de peau)...

En anglais les deux phénomènes ont deux noms différents : *scattering* pour la diffusion d'une onde par un diffuseur et *diffusion* pour la diffusion thermique ou autre.

## 2- Diffusion de Mie par des poussières ou des gouttelettes d'eau.

Lorsque les diffuseurs ont une taille supérieure ou de l'ordre de la longueur d'onde de l'onde excitatrice, on parle de « **diffusion de Mie** ».

C'est le cas, par exemple, de la diffusion de la lumière visible se propageant dans l'air ou dans l'eau, par des impuretés de taille au moins micrométrique : poussières, gouttelettes d'eau... Ainsi, lorsqu'un rai de lumière ou un faisceau laser pénètre dans une pièce sombre assez poussiéreuse, les poussières en suspension dans l'air diffusent la lumière du rai ou du faisceau, dont le trajet devient alors visible. De même, les gouttelettes d'eau en suspension dans l'air au sein d'un nuage diffusent la lumière solaire et confère au nuage son aspect visuel blanc et cotonneux.



Ce type de diffusion, décrit par Gustav Mie au début du XX<sup>ème</sup> siècle, est caractérisé par le fait que chaque diffuseur émet préférentiellement dans la direction de l'onde excitatrice, et surtout par une **absence de dépendance de l'intensité diffusée vis-à-vis de la longueur d'onde excitatrice**. Ainsi, si la lumière incidente est blanche, c'est-à-dire possède un spectre plat dans le domaine visible, et si les diffuseurs sont non absorbants (ce qui est le cas des gouttes d'eau), le rayonnement diffusé est également blanc : d'où l'aspect blanc des nuages ! Attention : si les diffuseurs absorbent, les longueurs d'onde absorbées ne sont pas diffusées et la couleur de la lumière diffusée est donc complémentaire de celle absorbée.



## 3- Diffusion Rayleigh et bleu du ciel.

Lorsque les diffuseurs ont une taille bien inférieure à la longueur d'onde de l'onde excitatrice, on parle de « diffusion de Rayleigh » ou de « **diffusion Rayleigh** », dont des caractéristiques est que chaque diffuseur émet aussi bien vers l'avant (dans la direction de l'onde excitatrice) que vers l'arrière.

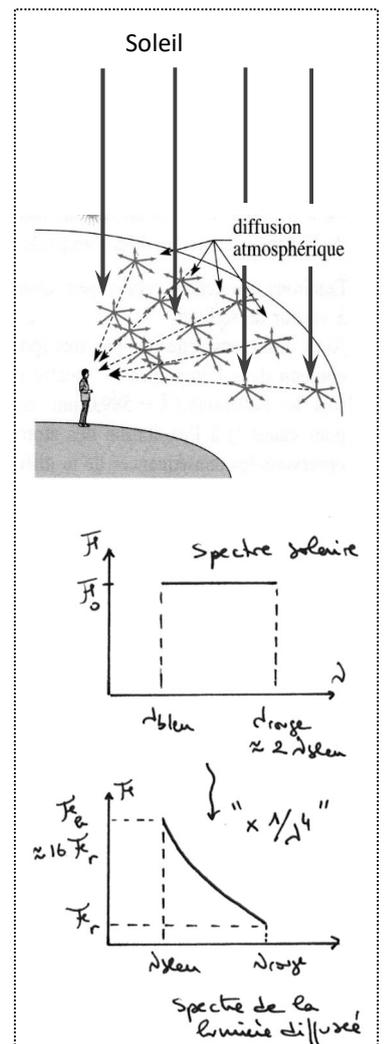


l'une

C'est le cas, par exemple, de la diffusion de la lumière visible se propageant dans l'air ou dans l'eau, par les molécules du milieu de propagation lui-même ( $O_2$  et  $N_2$  pour l'air), celles-ci étant de taille nanométrique donc très inférieure aux longueurs d'onde visibles. C'est également le cas de la diffusion par des poussières très fines.

Dans le cas où l'onde excitatrice est la lumière provenant du soleil et le milieu traversé est l'atmosphère, la lumière diffusée est tout simplement la lumière bleue que nous observons dans le ciel ! La nuit, l'atmosphère n'est traversée que par des rayonnements de faible intensité (ceux provenant de la lune et des étoiles) et l'on ne perçoit pas la lumière diffusée ; le ciel semble donc tout simplement transparent et on voit les étoiles à travers l'atmosphère. A contrario, dans la journée la diffusion est provoquée par le rayonnement solaire, très intense, et la lumière diffusée (« le bleu du ciel ») domine le rayonnement en provenance des autres étoiles et nous les cache.

Mais pourquoi le ciel est-il bleu ? Parce que contrairement à la diffusion de Mie, la diffusion Rayleigh atmosphérique se caractérise par une **intensité diffusée plus forte lorsque la longueur d'onde  $\lambda$  du champ exciteur est plus courte** (nous verrons qu'elle est proportionnelle à  $1/\lambda^4$  comme celle rayonnée par un dipôle



oscillant). Ainsi, bien que le rayonnement solaire possède un spectre quasiment plat dans le domaine visible et apparaisse blanc, le spectre du rayonnement diffusé est décroissant avec  $l$  et paraît donc bleu ( $I_{\text{rouge}}/I_{\text{bleu}} \approx 2 \rightarrow I_{\text{rouge}}^4/I_{\text{bleu}}^4 \approx 16$  ; étude détaillée plus loin).

C'est ce type de diffusion que nous allons étudier au paragraphe 2 via le modèle de la charge élastiquement liée, comme le fit Rayleigh dès 1899.

#### 4- Influence de la répartition des diffuseurs.

Outre leur taille, la répartition spatiale des diffuseurs au sein du milieu joue un rôle important et conditionne l'intensité du phénomène de diffusion. En effet, **les ondes diffusées par les différents diffuseurs interfèrent les unes avec les autres !** Comme les déphasages entre ces ondes diffusées dépendent de la position des diffuseurs, les interférences ne donnent pas du tout le même résultat selon la nature du milieu qui diffuse (solide cristallin ou fluide) et la pureté de ce milieu (solide présentant des défauts cristallins ou non).

- \* Nous admettons que dans un gaz, où la répartition des molécules diffusantes fluctue aléatoirement, la diffusion est une superposition incohérente des contributions individuelles (tout se passe comme si les différentes ondes diffusées étaient incohérentes entre elles et n'interféraient donc pas) ; ainsi, en notant  $P$  la puissance :

$$\heartsuit \quad P_{\text{totale diffusée par N diffuseurs identiques d'un gaz}} = N \times P_{\text{diffusée par un diffuseur}}$$

- \* *Pour la culture*, vous pouvez savoir qu'au contraire dans un solide cristallin transparent comme du quartz ou du sel de gemme, où la répartition des diffuseurs est très ordonnée, les ondes lumineuses diffusées sont cohérentes et interfèrent quasi destructivement dans toutes les directions, sauf celle de l'onde incidente<sup>1</sup>.

L'intensité diffusée est donc très faible et le cristal apparaît « très transparent ». Plus précisément, la théorie montre qu'un solide parfaitement cristallisé à 0 K ne diffuse absolument pas et que ce sont en fait les défauts cristallographiques du solide, les impuretés qu'il contient, ainsi que les fluctuations thermiques qui sont responsables de la diffusion. En d'autres termes, plus un cristal est pur, plus il est transparent !



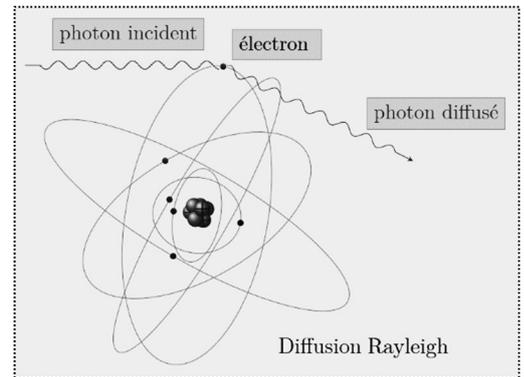
---

<sup>1</sup> Les directions d'interférences constructives dépendent du rapport entre la longueur d'onde de la lumière et le paramètre de maille du réseau cristallin ; dans le domaine optique, la longueur d'onde est très grande devant le paramètre de maille et la seule direction d'interférences constructives est la direction incidente ; en revanche, pour des longueur d'ondes s'approchant du paramètre de maille, comme c'est le cas des rayons X, il apparaît plusieurs directions d'interférences constructives (données par une condition dite « de Bragg ») et on dit que le réseau cristallin diffracte l'onde. Cette situation est analogue à celle des réseaux en optique : les interférences des  $N$  ondes diffractées par le réseau sont destructives partout sauf dans quelques directions particulières (donnée par la « formule des réseaux »).

### 5- Approfondissements et vocabulaire usuel associé à la diffusion.

- Diffusion d'un photon :

La lumière peut être décrite comme un flux de photons (dualité onde – corpuscule) et dire qu'un milieu matériel diffuse une onde revient à dire que ce milieu « diffuse une partie des photons » associés à l'onde. Dans cette vision corpusculaire, la diffusion d'un photon incident correspond à un choc entre ce photon et un électron du nuage électronique d'un atome ou d'une molécule du milieu ; ce choc dévie le photon de sa trajectoire, d'où l'émission de lumière en dehors de la direction de l'onde incidente ; le photon dévié est appelé photon diffusé.



- Diffusion de particules matérielles (particules alpha, électrons, neutrons...) :

A la base, la diffusion concerne la lumière, donc les photons, mais par analogie on peut parler de la diffusion d'un faisceau de particules matérielles par un objet ; ainsi, dans l'expérience de Rutherford où des particules alpha bombardent une mince feuille d'or et où on observe les déviations de ces particules au passage à travers la feuille, on parle très souvent de « diffusion des particules alpha par la feuille d'or » et l'expérience en elle-même est souvent appelée la « diffusion Rutherford ».

- Rétrodiffusion :

Se dit d'une diffusion qui se fait « vers l'arrière », c'est-à-dire à contre sens de l'onde incidente. Dans la diffusion Rayleigh, chaque diffuseur émet aussi bien vers l'avant que vers l'arrière et on peut donc dire que certains photons sont rétrodiffusés ; a contrario il y a très peu de rétrodiffusion dans la diffusion de Mie. Autre exemple : dans l'expérience de Rutherford, c'est l'existence de particules alpha rétrodiffusées qui a démontré l'existence du noyau atomique.

- Diffusion simple, diffusion multiple :

On parle de diffusion simple lorsque l'onde diffusée reste d'intensité très faible devant l'onde primaire et que l'on peut considérer que chaque diffuseur n'est excité que par l'onde incidente. Mais quand il y a beaucoup de diffuseurs et que la diffusion devient très intense, il faut considérer que chaque diffuseur est excité par une onde qui résulte de la superposition de l'onde incidente et des ondes diffusées par ses voisins ; on parle alors de diffusion multiple. En termes de photons, la diffusion simple correspond à des diffuseurs qui ne diffusent que les photons de l'onde primaire, alors que la diffusion multiple correspond au cas où les diffuseurs peuvent également diffuser des photons ayant déjà subi un processus de diffusion.

- Diffusion élastique, diffusion inélastique :

Les diffusions de Mie et Rayleigh sont en réalité des cas particuliers de diffusion où l'énergie des photons incidents est très inférieure à l'énergie de liaison des électrons ; ainsi, l'électron n'est pas perturbé par le choc et l'énergie du photon ne varie pas au cours du choc ; de ce fait, l'onde diffusée possède la même fréquence que l'onde incidente. De façon générale, on parle de diffusion élastique d'une onde dans un milieu lorsque l'onde diffusée est de même fréquence que celle de l'onde primaire.

En revanche, pour des photons dont l'énergie n'est pas négligeable devant l'énergie de liaison des électrons, l'électron et le photon peuvent échanger de l'énergie lors du choc ; l'onde diffusée a alors

une fréquence différente de celle de l'onde incidente. De façon générale, on parle de diffusion inélastique dans le cas où l'onde diffusée n'est pas de même fréquence que celle de l'onde primaire.

- Noms de scientifiques associés à la diffusion (*ne pas retenir !*) :

Diffusion de Mie, diffusion Rayleigh, diffusion Thomson (diffusion élastique de photons par des électrons libres ; analogue à la diffusion Rayleigh mais les diffuseurs sont des électrons libres et non des électrons d'une molécule), diffusion Compton (diffusion inélastique de photon très énergétiques, rayons X ou g, sur un cristal ; l'étude de cette diffusion, également appelée effet Compton, a prouvé que les photons sont de véritables particules – voir cours de physique quantique), diffusion Raman (diffusion inélastique d'une onde sur un milieu avec modification de l'état vibratoire ou magnétique des molécules du milieu), diffusion Brillouin (diffusion inélastique d'une onde dans un milieu par interaction avec une onde acoustique se propageant dans le milieu).

## B- Etude de la diffusion Rayleigh par le modèle de la charge élastiquement liée.

Nous allons maintenant construire un modèle phénoménologique décrivant, dans le cadre de la mécanique classique (et non quantique), l'interaction entre un atome ou une molécule et le champ électromagnétique d'une onde monochromatique polarisée rectilignement. Ce modèle nous permettra de comprendre les propriétés de la diffusion Rayleigh.

### 1- Modèle de la charge élastiquement liée (ou de l'électron élastiquement lié)

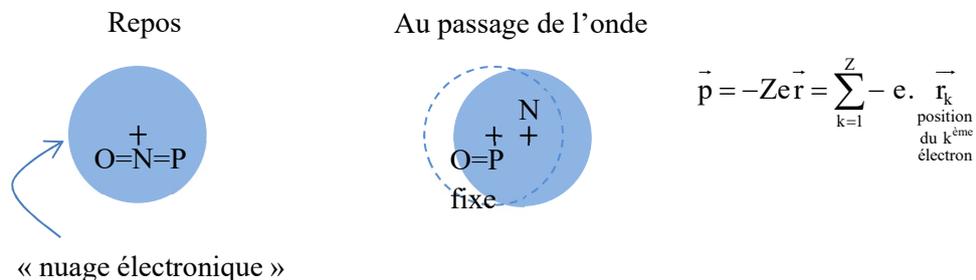
On considère une OPPM polarisée rectilignement dans un milieu neutre peu dense et on s'intéresse à l'effet de cette onde sur une molécule du milieu (cela se généralise à toute onde monochromatique polarisé rectilignement).

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x$$

$$\vec{B}(z, t) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y \quad k = \frac{\omega}{v_\phi} \approx \frac{\omega}{c}$$

Hypothèses :

- Milieu peu dense : on néglige les interactions intermoléculaires
- Les molécules sont apolaires au repos. Sous l'effet d'un champ  $\{\vec{E}, \vec{B}\}$  les électrons et noyaux sont mis en mouvement mais les noyaux étant beaucoup plus massifs que les électrons on les suppose fixes



- Hypothèse non relativiste :  $\|q\vec{v} \wedge \vec{B}\| \ll \|q\vec{E}\|$
- Hypothèse de Rayleigh : la taille des molécules est très faible devant la longueur d'onde de l'onde primaire.  
Conséquence : le champ ressenti par les électrons sera considéré uniforme.

$$\overline{\vec{F}_{\text{subie par un } e^- \text{ de la part de } \{\vec{E}, \vec{B}\}}} = -e \cdot \vec{E}(\vec{r}_e(t), t) \approx -e \cdot \vec{E}(\vec{r}_0, t)$$

**2- Bilan des forces subies par l'électron**

- $\vec{F} = -e \cdot \vec{E}(\vec{r}_0, t)$
- Force de rappel élastique vers la position d'équilibre stable :  $\vec{F}_{\text{el}} = -k \cdot \vec{r}_e = -m\omega_0^2 \cdot \vec{r}_e$
- Force de frottement fluide :  $\vec{F}_{\text{rot}} = -h \cdot \vec{v}_e = -\frac{m}{\tau} \cdot \vec{v}_e$

Cette force sert à modéliser la perte d'énergie de l'électron lié à son rayonnement.

**3- Dipôle oscillant induit par l'onde**

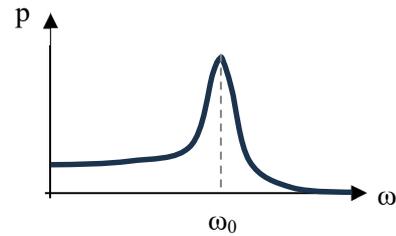
PFD appliqué à l'électron :  $m \frac{d^2 \vec{r}_e}{dt^2} = -e \cdot \vec{E}(\vec{r}_0, t) - m\omega_0^2 \cdot \vec{r}_e - \frac{m}{\tau} \cdot \vec{v}_e$

$$\frac{d^2 \vec{r}_e}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \cdot \frac{d\vec{r}_e}{dt} + \omega_0^2 \cdot \vec{r}_e = -\frac{e}{m} \cdot \vec{E}(\vec{r}_0, t) \quad \text{on peut également définir } \frac{1}{\tau} = \frac{\omega_0}{Q}$$

En notation complexe :  $\underline{\vec{p}}_e = -e \cdot \underline{\vec{r}}_e = \frac{e^2}{m\omega_0^2} \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{Q\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \underline{\vec{E}}_0$

$$\|\underline{\vec{p}}_e\| = \frac{e^2}{m\omega_0^2} \frac{E_0}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}$$

Pour une molécule « complète » :  $\underline{\vec{p}}_{\text{molécule}} = Z \cdot \underline{\vec{p}}_e$



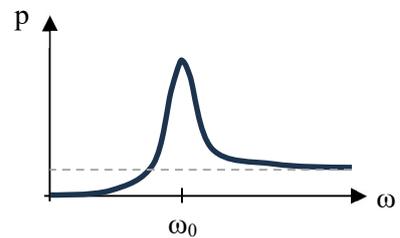
**4- Champ diffusé**

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = Z \frac{\sin \theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{\ddot{\vec{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{rc^2} \underline{\vec{u}}_\theta = Z \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi r} \left( -\omega^2 \underline{\vec{p}}_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) + \varphi\right) \right) \underline{\vec{u}}_\theta$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\underline{\vec{u}}_r \wedge \vec{E}}{c}$$

Puissance moyenne diffusée :

$$\langle P \rangle_{\text{diffusée par une molécule}} = Z^2 \frac{\mu_0 e^4}{12\pi c m_e^2} E_0 \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4}{\underbrace{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}_{f(\omega)}}$$



**5- Diffusion résonante. Interprétation, ajustement des paramètres du modèle**

Résonance à  $\omega_0$

Interprétation moderne : elle est liée au processus d'absorption puis d'émission d'un photon d'énergie  $E_\nu = h\nu_0 = \hbar\omega_0$

Dans l'étude semi classique, il faudra prendre pour  $\omega_0$  une pulsation correspondant à une transition électronique.

### 6- Domaine de Rayleigh

Le domaine de validité de Rayleigh correspond à  $\omega \ll \omega_0$  ;

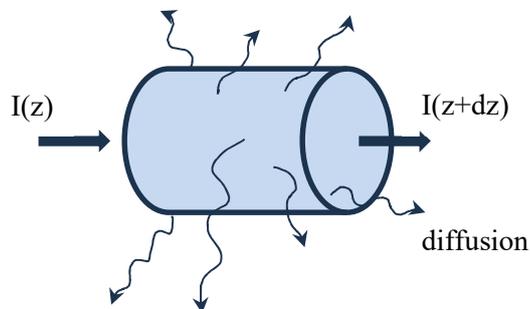
$$\langle P \rangle_{\text{diffusée par une molécule}} = Z^2 \frac{\mu_0 e^4}{12\pi c m_e^2} E_0^2 \underbrace{\frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 - \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}_{f(\omega)}$$

### 7- Atténuation d'une OPPM traversant un milieu diffusant peu dense

On considère que l'OPPM sera faiblement atténuée et de la forme :  $\vec{E} = E_0(z) \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x$

On admet qu'alors  $\vec{B} = \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}}{c}$  et  $I(z) = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2(z)$

Pour trouver l'évolution de  $I(z)$  nous allons effectuer un bilan d'énergie électromagnétique à une tranche  $[z; z + dz]$



$n^*$  diffuseurs par unité de volume : dans le système étudié  $dN = n^* S dz$  diffuseurs

On considère qu'il y a une diffusion Rayleigh

Chaque électron émet :  $\langle P \rangle_1 = \underbrace{\frac{\mu_0 e^4}{12\pi c m_e^2}}_{\text{noté } \alpha} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 E_0^2$

On admet que, pour un milieu gazeux, les ondes diffusées par les différents électrons sont incohérentes :  $\langle \delta P \rangle_{\text{diffusé par } dN \text{ diffuseurs}} = dN \langle P \rangle_1$

Bilan :

$$\underbrace{\left\langle \frac{d}{dt} (\delta U_{em}) \right\rangle}_0 = \langle \delta P_{em}^{entrant} \rangle + \underbrace{\langle \delta P_{matière \rightarrow champ} \rangle}_{=0}$$

les diffuseurs prélèvent de l'énergie au champ primaire et la restituent au champ via l'onde diffusée

$$0 = I(z)S - I(z + dz)S - dN \langle P \rangle_1$$

$$\frac{dI}{dz} = \frac{dN}{dzS} \langle P \rangle_1 = n^* \underbrace{\alpha}_{\frac{1}{L(\omega)}} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 \frac{2}{\epsilon_0 c} I(z)$$

$$I(z) = I(z=0) \exp\left(-\frac{z}{L(\omega)}\right) \quad \text{avec} \quad L(\omega) = \frac{\epsilon_0 c}{2n^* \alpha \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4}$$

## C- Application : couleur du ciel, couleur du soleil couchant

### Bleu du ciel

La lumière solaire présente un spectre large (proche du rayonnement du corps noir) dont le maximum d'émissivité est dans le visible et le spectre dans le visible peut être considéré constant

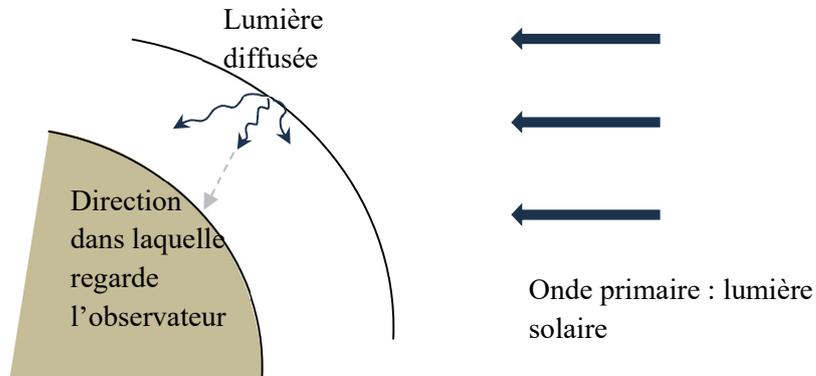
$$\vec{E}_{\text{soleil}} = \sum_{\omega} E_0(\omega) \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x$$

Un observateur qui regarde le ciel (sans regarder directement le soleil) perçoit la lumière diffusée :

$$\vec{E}_{\text{diff}} = \sum_{\omega} E_{0,\text{diff}}(\omega) \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x$$

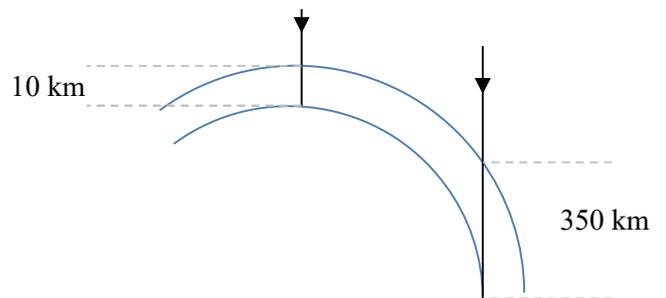
En puissances :  $\langle P \rangle_{\text{onde primaire}} \propto \sum_{\omega} E_0^2(\omega)$  (Parseval) et dans le visible  $E_0^2(\omega) \approx E_0^2$

$$\langle P \rangle_{\text{onde diffusée}} \propto \sum_{\omega} E_{0,\text{diffusé}}^2(\omega) \quad \text{avec} \quad E_{0,\text{diffusé}}^2(\omega) \propto E_0^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 \quad \text{élevé dans le bleu}$$



### Couleur du soleil couchant

La lumière solaire au soleil couchant traverse une épaisse couche d'atmosphère, s'appauvrit beaucoup en bleu (très diffusé) et apparaît rouge.





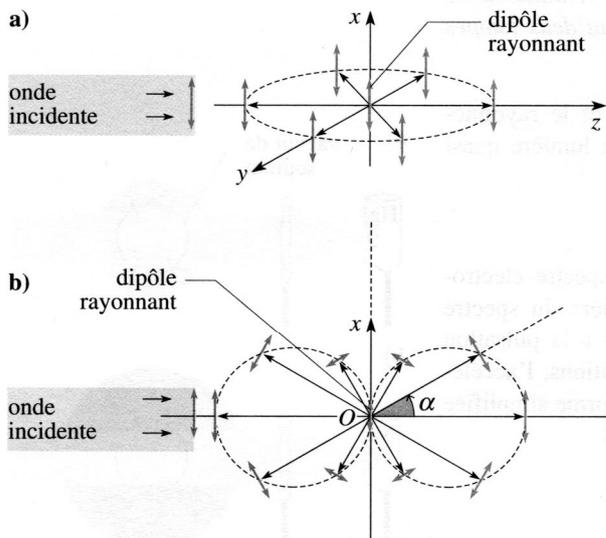
### 3.2.4. Polarisation du rayonnement par diffusion

#### 3.2.4.1. Diffusion d'une onde polarisée rectilignement

Considérons un rayonnement incident, dirigé selon  $(Oz)$ , dont le champ électrique  $\vec{E}$  est polarisé rectilignement dans la direction  $(Ox)$ . Le moment dipolaire oscillant induit est parallèle à la direction de polarisation. Le rayonnement de diffusion est polarisé rectilignement.

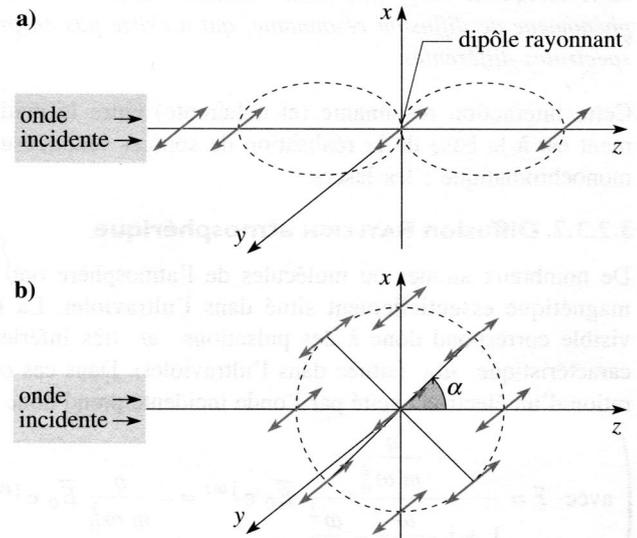
Son intensité est importante dans les directions voisines du plan  $(yOz)$  (cf. § 2.2.1). Dans ce plan, le dipôle émet de manière isotrope des ondes polarisées rectilignement selon la direction  $(Ox)$  (doc. 18a). Son intensité est négligeable dans les directions voisines de  $(Ox)$  (doc. 18b).

Le document 19 résume de la même façon les caractéristiques du rayonnement diffusé lorsque le champ électrique du rayonnement incident est polarisé rectilignement dans la direction  $(Oy)$ .



**Doc. 18.** Diffusion d'une O.P.P.M. polarisée rectilignement :  $\vec{E} // (Ox)$ .

- a. Dans le plan  $(yOz)$  :  $\alpha = 0$ .
- b. Dans un plan parallèle à  $(xOz)$  :  $\alpha$  quelconque.



**Doc. 19.** Diffusion d'une O.P.P.M. polarisée rectilignement :  $\vec{E} // (Oy)$ .

- a. Dans le plan  $(yOz)$  :  $\alpha = 0$ .
- b. Dans un plan parallèle à  $(xOz)$  :  $\alpha$  quelconque.