Ondes électromagnétiques dans les milieux

I. PROPAGATION DANS UN METAL OU DANS UN PLASMA.

Exercice I-1 : Propagation d'ondes longitudinales dans un plasma

Dans cet exercice on utilise la même modélisation du plasma que celle vue en cours, mais on s'intéresse à la propagation d'une onde dont le champ électrique s'écrit : $\vec{E}(\vec{r},t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\overrightarrow{u_x}$

1- Caractériser cette onde avec le maximum de précision.
2- Déterminer le champ magnétique associé à l'onde.
3- A partir d'une étude dynamique des électrons, déterminer une relation entre le champ $\vec{E}$ et le vecteur densité de courant $\vec{j}$.
4- A l'aide des équations de Maxwell, trouver une autre relation entre $\vec{j}$ et $\vec{E}$ et en déduire l'équation de propagation vérifiée par $\vec{E}$.
5- Quelle est la relation de dispersion caractéristique de cette onde ? Quelle est sa particularité ?
6- Que vaut la vitesse de groupe pour ce type d'onde ? Calculer le vecteur de Poynting et commenter.
7- Evaluer l'énergie électromagnétique volumique. Est-elle constante ? Pourquoi ? Proposer un bilan énergétique de la propagation.
8- Que dire de la densité volumique de charges dans le plasma ?
9- Comment une telle onde est-elle générée ?

Exercice I-2 : Réflexion et transmission à l'interface vide-plasma.

Un plasma de pulsation de coupure ω_p occupe le demi-espace $z \geq 0$, le demi-espace $z \leq 0$ étant vide. Une OPPM polarisée rectilignement arrive en incidence normale sur ce plasma ; elle s'écrit, en notation complexe : $\underline{\vec{E}}_i(z,t) = E_0 \exp\big(j(\omega t - k_0 z)\big)\,\vec{u}_x$

L'expérience montre que cette onde incidente sur l'interface vide-plasma donne naissance à une onde réfléchie et à une onde transmise, elles-mêmes planes, progressives ou pseudo progressives, monochromatiques de pulsation ω et polarisées rectilignement selon (Ox).

Afin de déterminer les expressions des champs électriques de ces ondes, qui seront notés $\underline{\vec{E}}_r(z,t)$ et $\underline{\vec{E}}_t(z,t)$, on introduit deux coefficients $\underline{r}$ et $\underline{t}$, respectivement appelés coefficient de réflexion et de transmission du champ électrique, définis par :

$$\underline{r} = \frac{\underline{E}_{r\,x}(z = z_{interface}, t)}{\underline{E}_{i\,x}(z = z_{interface}, t)} \quad \text{et} \quad \underline{t} = \frac{\underline{E}_{t\,x}(z = z_{interface}, t)}{\underline{E}_{i\,x}(z = z_{interface}, t)} \quad \text{avec ici : } z_{\text{interface}} = 0$$

1- Questions préliminaires :

- Exprimer k_0 en fonction de ω puis rappeler l'expression du module du vecteur d'onde k dans le plasma en fonction de ω et ω_p.
- Expliquer qualitativement pourquoi les champs réfléchis et transmis ont même pulsation et même polarisation que le champ de l'onde incidente.
- Quelle représentent les modules des coefficients $\underline{r}$ et $\underline{t}$? que représentent leurs phases ?

2- Donner une expression $\underline{\vec{E}}_r(z,t)$ et $\underline{\vec{E}}_t(z,t)$ en fonction de E_0 , $\underline{r}$, $\underline{t}$, ω , k_0 et k.
En déduire une expression du champ magnétique de chaque onde, puis de l'intensité de chaque onde ; ces intensités seront notées I_i , I_r et I_t .
3- On définit les coefficients énergétiques de réflexion $R = I_r/I_i$ et de transmission $T = I_t/I_i$ de l'interface vide-plasma. Quelle relation existe-t-il nécessairement entre R et T ? Exprimer R et T en fonction de $\underline{r}$, $\underline{t}$ et du rapport k/k_0 que l'on notera $\underline{n}$. Expliquer cette notation.
4- Justifier l'absence de charges surfaciques et de courants surfaciques à l'interface vide-plasma puis, en utilisant les relations de passage des champs, déterminer $\underline{r}$ et $\underline{t}$, puis R et T, en fonction $\underline{n}$.
5- Calculer explicitement $\underline{n}$ puis R et T dans le cas où $\omega > \omega_p$ et commenter. La relation entre R et T énoncée à la question 3 est-elle vérifiée ?
6- Mêmes questions dans le cas où $\omega < \omega_p$.
7- Qu'obtient-on dans le cas particulier où $\omega_p \to 0$? Commenter.

Exercice I-3 : Propagation d'ondes dans un métal ; étude sur une large gamme de fréquence.

On s'intéresse à la propagation d'une onde dans un métal en adoptant le modèle de Drude : selon ce modèle, chaque atome du métal libère un électron libre de charge $-e$ et de masse m qui peut être mis en mouvement à la vitesse $\vec{v}$ par rapport au réseau cristallin sous l'effet d'un champ électrique et subit alors une force de « frottement » s'écrivant $-h\,\vec{v}$. Cette hypothèse revient à introduire un temps de relaxation $\tau = m/h$ et une longueur d'onde caractéristique $\lambda_0 = c\,\tau$ dont la valeur (mesurée grâce aux phénomènes décrits ci-dessous) vaut 7,5 µm pour le cuivre. Toutes les applications numériques seront relatives au cuivre de masse volumique μ = 8,9 g/cm^3 et de masse atomique A = 63,5. On donne en outre $m = 9{,}1.10^{-31}$ kg et $e = 1{,}6.10^{-19}$ C et on note n la densité particulaire d'électrons dans le métal, supposée uniforme.

L'onde considérée est une OPPM polarisée rectilignement qui s'écrit, en notation complexe :
$\underline{\vec{E}}(z,t) = \vec{E}_0 \exp\left(j\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)\right)$

1- Déterminer la relation donnant la densité de courant complexe $\underline{\vec{J}}$ en fonction de $\underline{\vec{E}}$ et montrer que le métal suit convenablement la loi d'Ohm tant que la fréquence reste inférieure à une fréquence de coupure ν_c que l'on exprimera en fonction des données et que l'on calculera. Commenter sachant que la valeur habituellement admise pour la conductivité du cuivre est $\sigma = 5{,}6.10^7$ S/m.

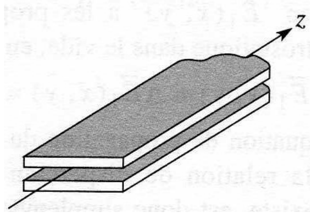
Dans la suite on ne se limite pas au domaine fréquentiel de validité de la loi d'Ohm mais on étudie le métal sur une large gamme de fréquence allant des fréquences industrielles à l'ultraviolet.
2- Le modèle adopté classiquement pour décrire un plasma constitué de cations lourds et d'électrons est identique au modèle de Drude, à ceci près que l'on y néglige la force de frottement introduite ci-dessus. Justifier par un argument énergétique que, dans certaines conditions, le métal va se comporter comme un plasma puis calculer la « pulsation plasma » ω_p du cuivre, ainsi que la longueur d'onde λ_p associée, sachant que : $\omega_p^2 = ne^2/m\varepsilon_0$
3- Montrer que quelle que soit la fréquence de l'onde se propageant dans le métal, l'onde est a priori transverse et suit la relation de dispersion : $k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \dfrac{\omega_p^2/\omega^2}{1 + j/\omega\tau}\right)$
4- Proposer une forme approchée de cette relation dans les domaines suivants : (1) fréquences industrielles et ondes hertziennes, (2) visible et (3) ultraviolet. En déduire les propriétés du métal vis-à-vis de la propagation dans ces trois domaines et commenter.

Exercice I-4 : Question ouverte : Communication avec une capsule spatiale

Pendant la rentrée dans l'atmosphère d'une capsule spatiale, il devient très difficile de communiquer avec cette dernière. Pouvez-vous en imaginer la raison ? Exploiter le fait que la communication est impossible avec une onde radia de fréquence $f = 300\,\text{MHz}$

II. REFLEXION SUR UN CONDUCTEUR PARFAIT – MODES D'UNE CAVITE – PROPAGATION EN PRESENCE DE CONDUCTEURS.

Exercice II-1 : Onde transverse électrique entre deux plans conducteurs parfaits



On envisage la propagation d'une onde électromagnétique dans le vide entre deux plans infinis parfaitement conducteurs, d'équations x = ± D/2 ; on cherche une solution particulière dont le champ électrique peut s'écrire :

$\vec{E} = E_0(x,y)\cos(\omega t - kz)\vec{u}_y$

1- A partir de l'expression fournie, énumérer toutes les caractéristiques de cette onde. Justifier qu'on puisse appeler ce système un « guide d'onde ».

2- Quelle équation le champ électrique de l'onde doit-il vérifier entre les deux plans ?

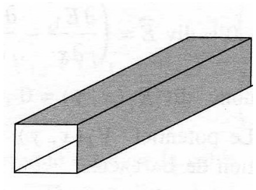
3- Expliquer pourquoi la fonction E_0 ne peut pas être constante. Montrer néanmoins qu'elle est nécessairement indépendante de la coordonnée y.

4- Proposer, sans déterminer pour le moment la fonction $E_0(x)$, une expression du champ magnétique associé à cette onde. Justifier le nom d'onde transverse électrique.

5- Déterminer l'équation différentielle nécessairement vérifiée par $E_0(x)$ et montrer que l'on obtient : $E_0(x) = E_0 \sin\left(\frac{n\pi}{D}\left(x - \frac{D}{2}\right)\right)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

6- Montrer qu'il ne peut se propager que certains modes dans le guide et que, pour chaque mode, il existe une fréquence de coupure dont on donnera l'expression.
Quelle gamme de fréquence est-elle compatible avec l'existence des deux premiers modes mais pas du troisième ?
Comment l'onde est-elle générée dans le guide ? Que se passe-t-il si on tente de générer une onde de fréquence inférieure à la fréquence de coupure du mode fondamental ?

7- Déterminer la vitesse de phase et la vitesse de groupe du mode n. Que représentent ces deux vitesses ? Le guide est-il dispersif ?

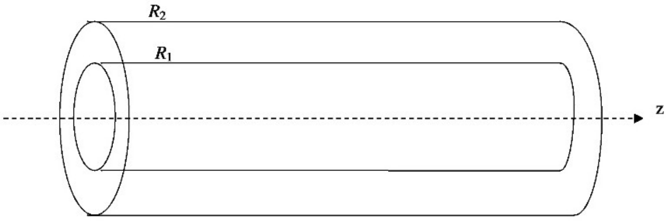


8- Calculer les charges et courants surfaciques qui apparaissent sur les plans conducteurs au passage de l'onde.

9- Les résultats précédents sont-ils modifiés si on « ferme le guide » en ajoutant deux plans conducteurs, d'équations y = ± D'/2 ? Si oui, comment le sont-ils ?

10- Montrer que la solution obtenue ici est la superposition de deux OPPM dont on donnera les caractéristiques. Était-ce prévisible ?

Exercice II-2 : Propagation dans un câble coaxial



Un câble coaxial est formé de deux très bons conducteurs de même longueur ℓ, l'un entourant l'autre. L'un est un conducteur massif de rayon R_1, appelé l'âme du conducteur. L'autre est un conducteur cylindrique creux de rayon intérieur R_2 et de rayon extérieur R_3, appelé la gaine du conducteur. Vu que $\ell \gg R_2$, on négligera les effets de bord. L'espace entre les conducteurs sera assimilé au vide sauf explicitation contraire.

On a : $R_1 = 0{,}25$ mm , $R_2 = 1{,}25$ mm , $\ell = 100$ m. On note $\left(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z}\right)$ la base en coordonnées cylindriques.

Pour résoudre cet exercice, on pourra utiliser un formulaire d'analyse vectorielle (sans laplacien vectoriel).

Une onde électromagnétique se propage à l'intérieur du câble dans la région $R_1 < r < R_2$, assimilable à du vide. On suppose que son champ électrique est de la forme :

$\vec{E}(r,z,t) = f(r)\cos(\omega t - kz)\vec{u}_r$ où f est une fonction à déterminer, et on lui associe le champ électrique complexe tel que $\vec{E}(r,z,t) = \mathrm{Re}\left(\underline{\vec{E}}(r,z,t)\right)$.

De même, il existe un champ magnétique $\vec{B}(r,z,t)$ auquel on associe le champ complexe $\underline{\vec{B}}(r,z,t)$

On notera E_0 l'amplitude maximale du champ électrique dans le câble coaxial et toutes les grandeurs demandées seront exprimées en fonction en fonction de E_0, μ_0, c, R_1 et R_2.

1- Commenter l'expression proposée pour le champ électrique.

2- Rappeler les quatre équations de Maxwell dans le vide et préciser en quelques mots le contenu physique de chacune d'elles. A partir de ces équations, déterminer la fonction f(r) qui convient, puis déterminer la relation de dispersion dans ce câble. Le milieu est-il dispersif ?

3- Déterminer l'expression du champ magnétique complexe $\underline{\vec{B}}(r,z,t)$ associé à cette onde.

4- Déterminer l'expression de la puissance moyenne transportée par le câble.
Application numérique : en déduire l'amplitude E_0 du champ électrique sachant que la puissance moyenne transportée est de 10W.

5- Déterminer la différence de potentiel $\underline{u}(z,t) = \underline{V_1}(z,t) - \underline{V_2}(z,t)$ entre l'âme et la gaine, **calculée comme en électrostatique**, ainsi que le courant $\underline{i}$(z,t) véhiculé par l'âme du câble coaxial.

6- Déterminer l'impédance caractéristique du câble, définie par : $Z_c = \dfrac{\underline{u}(z,t)}{\underline{i}(z,t)}$.

En pratique, l'espace inter-conducteur n'est pas du vide, mais comporte un isolant de permittivité relative $\varepsilon_r = 3{,}1$. On a alors : $Z_c = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r}}\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)$. Déterminer la valeur numérique de Z_c.

Constantes physiques : $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$ H.m^{-1} - $c = 3{,}00\ 10^8$ ms^{-1}