

Physique statistique

On donne : $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$ $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$ $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ $\epsilon_0 = 8,8 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$
 $m_H = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$

Loi de Boltzmann appliquée à des états discrets

Exercice 1 : Système à 3 niveaux d'énergie. *

On considère un système de N particules identiques et indépendantes en contact avec un thermostat à la température T , pouvant exister dans 3 états quantiques d'énergies égales à 0, ϵ et 2ϵ . En justifiant, déterminer :

- 1- L'énergie moyenne du système pour $T \ll \epsilon/k_B$, $T \gg \epsilon/k_B$ et $T = \epsilon/k_B$.
- 2- La capacité thermique du système pour $T \ll \epsilon/k_B$ et $T \gg \epsilon/k_B$.

Exercice 2 : Système à 2 niveaux d'énergie dégénérés. *

On considère un système de N particules identiques et indépendantes en contact avec un thermostat à la température T , pouvant exister dans 4 états quantiques différents : 1 état dans lequel l'énergie est nulle et 3 états dans lesquels l'énergie est égale à ϵ .

1. Exprimer pour une particule donnée :
 - la probabilité qu'elle soit dans l'état quantique d'énergie nulle,
 - la probabilité qu'elle soit dans un état quantique donné d'énergie ϵ ,
 - la probabilité qu'elle soit au niveau d'énergie nulle,
 - la probabilité qu'elle soit au niveau d'énergie ϵ .
2. Quelle est la condition pour que le système contienne, en moyenne, plus de particules d'énergie ϵ que de particules d'énergie nulle ?
3. Vers quelle limite tend l'énergie du système lorsque la température tend vers l'infini ?

Exercice 3 : Calcul des fluctuations d'énergie d'un système. Relation fluctuation-dissipation.

On considère un système de N particules identiques et indépendantes en contact avec un thermostat à la température T , chaque particule pouvant se trouver dans des états d'énergie discrets E_i ($i = 1 \dots$).

On note : $z = \sum_{i \geq 1} \exp(-\beta E_i)$ et $\beta = 1/k_B T$.

1. Que représente z ? Exprimer l'énergie moyenne d'une particule $\bar{\epsilon}$ puis l'écart type $\Delta \epsilon$ des fluctuations de cette énergie en fonction des dérivées successives de $\ln(z)$ par rapport à β .
2. Comment déduit-on de $\bar{\epsilon}$ et $\Delta \epsilon$ les valeurs $\bar{E}$ et ΔE relatives à l'énergie du système des N particules ?
3. Dédire des questions précédentes que la capacité thermique C_v du système vérifie la relation dite « fluctuation-dissipation » : $C_v = (\Delta E)^2 / k_B T^2$. Qu'y-a-t-il d'étonnant dans cette relation ?
4. Appliquer les résultats précédents pour trouver les grandeurs $\bar{E}$, ΔE et C_v lorsqu'on se limite à un système à 2 niveaux non dégénérés tels que $E_1 = -E$ et $E_2 = +E$.
5. On admet que la relation fluctuation dissipation s'applique à un gaz parfait monoatomique à température ambiante. Proposer une évaluation des fluctuations relatives $\Delta \epsilon / \bar{\epsilon}$ et $\Delta E / \bar{E}$ pour ce gaz puis commenter les résultats obtenus.

Exercice 4 : Approximation classique et densité d'états.*Formulaire :*

$$\int_0^{\infty} \frac{\exp(-x)}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\pi}, \quad \int_0^{\infty} \sqrt{x} \exp(-x) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{et} \quad \int_0^{\infty} x \sqrt{x} \exp(-x) dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}.$$

On considère un ensemble de N particules microscopiques indépendantes de masse m , à l'équilibre thermique à la température T , enfermées dans une boîte macroscopique de taille L . Pour les applications numériques on prendra : $T = 300$ K ; $L = 10,0$ cm ; $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg ; $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$ J.s ; $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J.K⁻¹.

- 1- Rappeler sans démonstration les valeurs possibles de l'énergie de la particule. On se contentera d'une approche unidimensionnelle. Ces niveaux d'énergie sont-ils dégénérés ?
- 2- On imagine qu'une particule possède une énergie égale à $k_B T$ à 1% près. Dans combien de niveaux la particule peut-elle se trouver ? En déduire qu'il est possible de considérer l'énergie d'une particule comme une variable continue à température ambiante, puis établir une condition portant sur L pour que cette approximation soit valable à une température T donnée. Commenter cette condition en introduisant une « longueur d'onde de de Broglie thermique ».
- 3- On se place dans cette approximation. Montrer que la densité $w(E)$ d'états de la particule, définie telle que $w(E) dE$ représente le nombre d'états dont l'énergie est comprise entre E et

$$E + dE, \text{ s'écrit : } w(E) = \frac{L}{h} \sqrt{\frac{2m}{E}}$$

- 4- En utilisant cette expression, déterminer la probabilité qu'une particule ait une énergie comprise entre E et $E + dE$. En déduire l'énergie moyenne et l'amplitude des fluctuations d'énergie d'une particule, puis la capacité thermique du système. Commenter.

Loi de Boltzmann appliquée à la répartition spatiale des particules

Exercice 1 : Suspension ou sédiment ?

Un milieu fluide, de température uniforme T et de masse volumique μ_f , contient des particules solides en suspension (que nous appellerons également colloïdes), en régime dilué. Cette solution est soumise au champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{u}_z$. Les colloïdes sont sphériques, de rayon a , de volume v et de masse m . Nous notons $n = n(z) = \frac{\delta N}{\delta V}$ leur nombre, par unité de volume, à l'altitude z (la grandeur n sera appelée concentration).

Pour les ordres de grandeur on considère des colloïdes en or de masse volumique $\mu_{or} = 19,30 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $a = 50 \text{ nm}$, $n = 1 \cdot 10^{18} \text{ particules} \cdot \text{m}^{-3}$. Le fluide est de l'eau à $T = 300 \text{ K}$.

1. Nous admettons que les colloïdes suivent la loi de Boltzmann et nous notons $n_0 = n(0)$. Déterminer $n(z)$ et exprimer sa longueur caractéristique de variation, L . On pourra poser $\Delta\mu = \mu_{or} - \mu_f$. Calculer L .

3. Nous convenons que la comparaison du rapport $L(a)/a$ à l'unité définit une frontière entre un état de suspension et celui d'un sédiment.

Exprimer, en fonction de $k_B T$ et $\Delta\mu$, la taille critique a_c associée à cette frontière.

Exprimer le rapport L/a en fonction du rapport a/a_c .

Montrer que L/a est aussi le rapport de deux énergies que l'on précisera.

Justifier le choix du critère adopté. Calculer a_c .

4. L'utilisation de la loi de Boltzmann suppose que les colloïdes sont indépendants entre eux. Indiquer la condition, portant sur a et n , pour que cette hypothèse soit valable. Est-elle, ici, satisfaite ?

Exercice 2 : Composition et masse totale de l'air atmosphérique.

En supposant que l'air atmosphérique est constitué de 20% de dioxygène et 80% de diazote au niveau de la mer, que deviennent ces pourcentages à 4000 m d'altitude ?

Evaluer la masse totale de l'atmosphère terrestre.

Exercice 3 : Enrichissement isotopique par ultra centrifugation

Masses atomiques

Atome	F	^{235}U	^{238}U
Masses atomiques (u)	19,0	235,0	238,0

Constantes diverses

Unité de masse atomique unifiée	$1 \text{ u} = 1,66 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
Constante des gaz parfaits	$R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

Certains noyaux sont susceptibles de fissionner sous l'effet d'un bombardement de neutrons « lents » (vitesse de $2,2 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$) : on parle alors de noyaux fissiles. Le seul isotope fissile naturel est l'uranium-235. Dans les réacteurs REP, on privilégie cette fission par neutrons lents. Or l'uranium est un mélange naturel de deux isotopes principaux : l'uranium-238 (99,28%) et l'uranium-235 (0,714%). On améliore alors le rendement de la réaction de fission en enrichissant l'uranium naturel avec de l'uranium-235.

Une fois extrait du sol, le minerai d'uranium est transformé chimiquement en hexafluorure d'uranium UF_6 . Dans le procédé d'enrichissement par centrifugation, l'hexafluorure d'uranium est chauffé pour être transformé en vapeur, puis le gaz passe par une série de centrifugeuses qui vont l'enrichir en jusqu'à la teneur souhaitée (de 3 à 5%). Ensuite refroidi et solidifié, l'hexafluorure d'uranium sera transformé en combustible nucléaire prêt à l'emploi, sous forme de pastilles.

Une centrifugeuse est constituée d'un cylindre de rayon $R = 10 \text{ cm}$ et de hauteur $h = 5 \text{ cm}$, tournant autour d'un axe vertical (Oz) à la vitesse angulaire constante $\omega = 50\,000 \text{ tr}\cdot\text{min}^{-1}$. Le gaz d'hexafluorure d'uranium UF_6 est introduit dans le cylindre. Les molécules $^{235}\text{UF}_6$ et $^{238}\text{UF}_6$ de masses différentes se répartissent alors différemment et il est possible de déterminer la distribution spatiale des molécules dans la centrifugeuse.

On note $\mathcal{R}_0$ un référentiel lié au laboratoire, d'axe vertical (Oz). On suppose que $\mathcal{R}_0$ est galiléen. On considère, dans un premier temps, que le cylindre est rempli d'un gaz, supposé parfait, constitué de molécules identiques de masse m . L'ensemble est à la température $T = 353 \text{ K}$.

Soit un volume élémentaire de gaz $d^3\tau$ autour d'un point M situé à la distance r de l'axe (Oz) de la centrifugeuse. On note $P(M) = P(r)$ le champ de pression dans le gaz, $\rho(r)$ la masse volumique du gaz et $n^*(r)$ sa densité particulaire.

I.B.1) Soit $\mathcal{R}_1$ le référentiel lié au cylindre en rotation. Est-il galiléen ? Pourquoi ?

I.B.2) Faire un bilan des forces exercées sur la particule de fluide en équilibre dans le référentiel $\mathcal{R}_1$. On exprimera la résultante élémentaire des forces de pression sous la forme de son équivalent volumique (sans démonstration).

I.B.3) Évaluer numériquement l'accélération d'entraînement subie par la particule de fluide en rotation. Justifier que, par la suite, on néglige le poids dans le bilan des forces.

I.B.4) Dédire de la condition d'équilibre relatif de la particule de fluide la répartition $n^*(r)$ des molécules dans le cylindre. On notera $n^*(0)$ la densité particulaire sur l'axe de rotation et on donnera l'expression de $n^*(r)$ en fonction de $n^*(0)$, m , T , k_B , r et ω .

I.B.5) Montrer que la répartition $n^*(r)$ ainsi trouvée obéit à une statistique de Maxwell-Boltzmann, avec une énergie potentielle E_p dont dérive la force d'inertie d'entraînement.

I.B.6) On donne, en figure 4, l'allure des densités particulaires $n_1^*(r)$ et $n_2^*(r)$ des molécules $^{235}\text{UF}_6$ et $^{238}\text{UF}_6$ en fonction de r . En déduire le principe de base de l'enrichissement de l'uranium : on explicitera le protocole qui permet d'obtenir le gaz enrichi en ^{235}U .

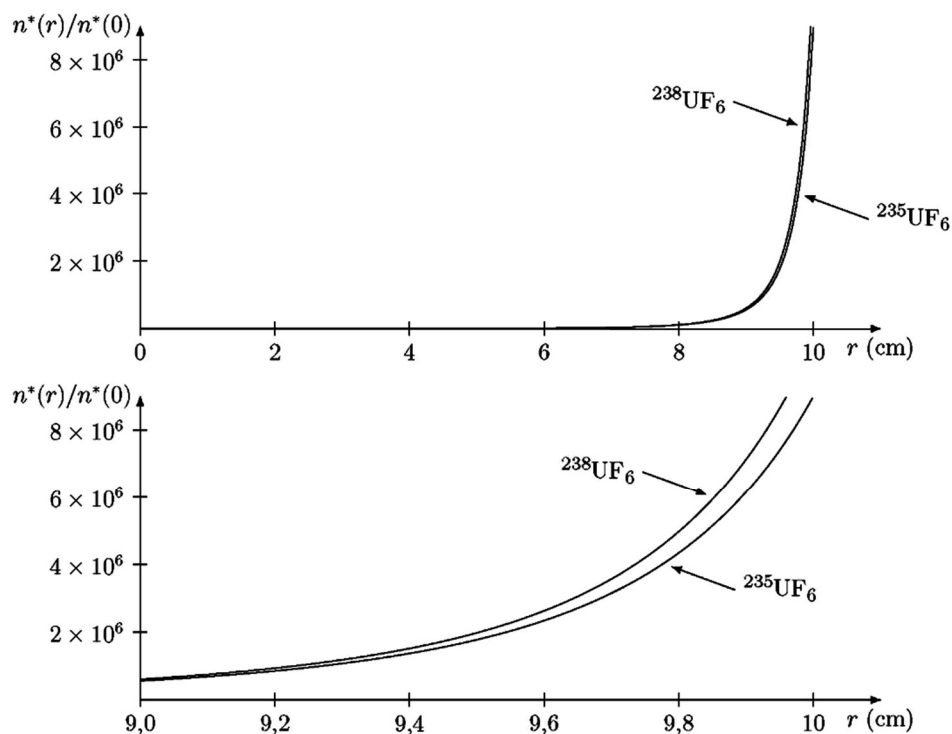


Figure 4 Densités particulaires des molécules $^{235}\text{UF}_6$ et $^{238}\text{UF}_6$ en fonction de r