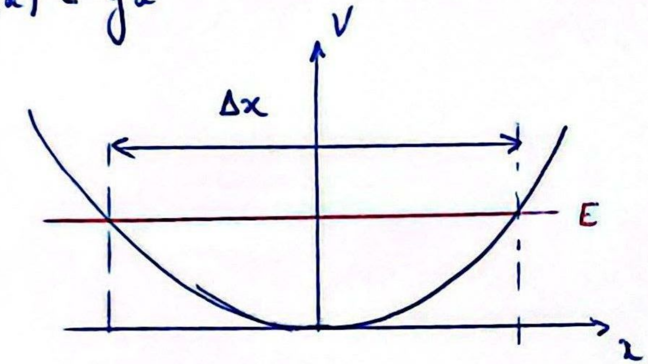
Inégalités de Heisenberg.

Ex 1 : potentiel quadratique.

$V(x) = gx^4$.



La particule sera confinée sur un espace de dimension $\Delta x \sim 2\left(\frac{E}{g}\right)^{1/4}$

Le confinement sera associé à une quantification de l'énergie

$\langle E_c \rangle = \left\langle \frac{p_x^2}{2m} \right\rangle$ avec $\Delta p_x^2 = \langle p_x^2 \rangle - \langle p_x \rangle^2 \leq \langle p_x^2 \rangle$

$\langle E_c \rangle \geq \frac{\Delta p_x^2}{2m}$ avec $\Delta p_x \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$

$\langle E_c \rangle \geq \frac{\hbar^2}{8m} \frac{1}{\Delta x^2}$

Donc $\langle E \rangle \geq \frac{\hbar^2}{8m} \frac{1}{\Delta x^2} + g\langle x^4 \rangle$.

Or $\langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 \geq 0$

Soit $\langle X^2 \rangle \geq \langle X \rangle^2$.

Donc $\langle x^4 \rangle \geq \langle x^2 \rangle^2$

Et ici $\Delta x^2 = \langle x^2 \rangle - \underbrace{\langle x \rangle^2}_{0} = \langle x^2 \rangle$.

Soit $\langle x^4 \rangle \geq \Delta x^4$

et $\langle E \rangle \geq \underbrace{\frac{\hbar^2}{8m} \frac{1}{\Delta x^2} + g\,\Delta x^4}_{f(\Delta x^2)}$

avec $f(u) = \frac{\hbar^2}{8m} \frac{1}{u} + g u^2$

Etudions f : $f' = -\frac{\hbar^2}{8m} \frac{1}{u^2} + 2gu$.

u	0		$\left(\frac{\hbar^2}{16mg}\right)^{1/3}$	
f'		$-$	0	$+$
f		$\searrow$	f_{min}	$\nearrow$

$f_{min} = \left(\frac{16mg}{\hbar^2}\right)^{1/3} \frac{\hbar^2}{8m} \left(1 + \frac{8mg}{\hbar^2} \times \frac{\hbar^2}{16mg}\right)$

$E_{min} \geq f_{min} = \frac{3}{2} \frac{\hbar^2}{8m} \left(\frac{16mg}{\hbar^2}\right)^{1/3}$. homogénéité ok.