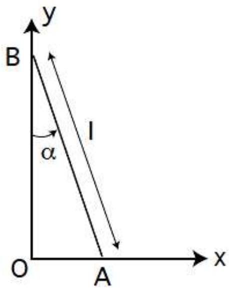
MECANIQUE DU SOLIDE

Revoir impérativement les exercices du cours et des TD : ils tombent tous à l'oral !
En mécanique ne pas oublier de **faire des prévisions et des commentaires concrets** !!

Question de cours : Lois du frottement entre deux solides.

MS 1 : Equilibre d'une échelle. (*Centrale*, *Mines*)

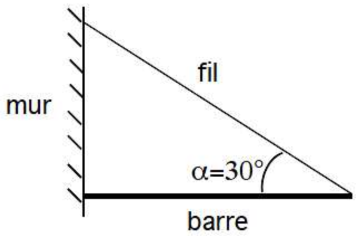


Une échelle de masse m et de longueur $2l$ repose à la fois sur le sol et contre un mur. Le contact avec le sol est caractérisé par un coefficient de frottement f tandis que le contact avec le mur est supposé sans frottement.

Discuter l'absence de glissement de l'échelle seule, puis lorsqu'une personne y monte.

MS 2 : Equilibre d'une barre. (*Mines*)

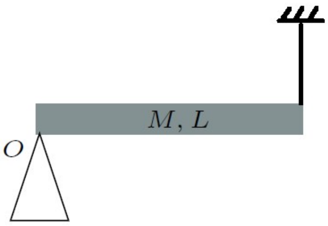
Une barre de masse m et de longueur L est fixée par une de ses extrémités à un fil (de masse nulle), avec lequel elle fait un angle $\alpha = 30°$ (figure ci-dessous), et repose sur un mur par son autre extrémité. Le contact de la barre avec le mur est caractérisé par un coefficient de frottement f.



Donner une condition sur f pour que l'équilibre soit possible, puis calculer la tension du fil.

Discuter de nouveau la condition d'équilibre si on place une masse m' sur la barre, à une distance d du mur, puis étudier les cas limites.

MS 3 : Equilibre et mouvement d'une barre. (*Mines*)



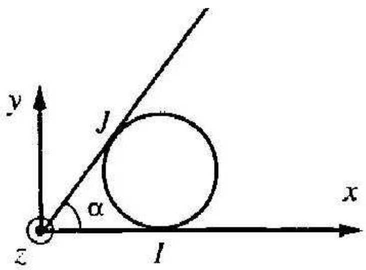
On considère une barre de longueur L et de masse M posée sur un support à l'une de ses extrémités O et maintenue en position horizontale grâce à un fil de masse nulle attaché à son autre extrémité (figure ci-contre). On note f le coefficient de frottement de la barre sur le support. On donne le moment d'inertie de la barre par rapport à tout axe passant par une de ses extrémités et qui lui est orthogonal : $J = \frac{ML^2}{3}$.

Quelle force s'applique au point O à l'équilibre ?

Que devient cette force juste après avoir coupé la corde ?

Une fois la corde coupée, quel est le mouvement de la barre ? Quand celle-ci se met-elle à glisser ?

MS 4 : Mouvement d'un cylindre. (*Centrale*)



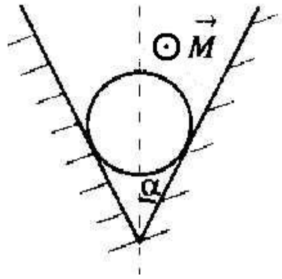
Un cylindre de centre C et de rayon R est placé dans un dièdre d'axe (Oz) et d'angle α (schéma ci-contre). A $t = 0$, la vitesse de son centre de masse est nulle mais on lui communique un vecteur rotatio^{2}n $\overrightarrow{\Omega} = \omega_0 \overrightarrow{u_z}$. On note f le coefficient de frottement au niveau des contacts.

Justifier qualitativement que, pour un signe convenable de ω_0, le contact entre le cylindre et le dièdre est maintenu ; étudier alors le mouvement ultérieur du cylindre et déterminer les expressions des actions de contact.

MS 5 : **Cylindre dans un dièdre.** (*Centrale*)

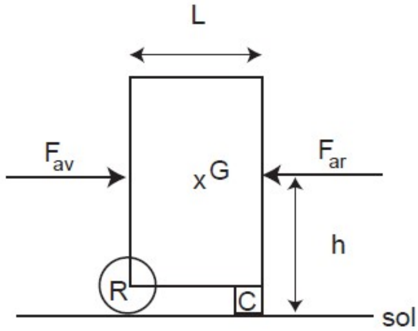
Un cylindre de masse $m = 60$ kg et de rayon $r = 20$ cm repose dans un dièdre d'angle horizontale et d'angle $2\alpha = 60°$ comme indiqué sur le schéma ci-dessous, avec un coefficient de frottement $f = 0{,}3$ au niveau des contacts.

On exerce sur le cylindre un couple $\overrightarrow{M}$ horizontal suivant l'axe du cylindre. A quelle condition sur ce couple le cylindre se met-il à tourner ?



MS 6 : **Déplacement d'un réfrigérateur.** (*Centrale*)

On considère un réfrigérateur, de profondeur L et de masse M, dont le centre de gravité G est situé à une hauteur h du sol. Il repose à l'avant sur une cale C dont il est solidaire et qui possède un coefficient de frottement f avec le sol, et à l'arrière sur un système de roues assimilable à un cylindre de rayon R glissant sans frottement sur le sol (il s'agit d'un modèle pour rendre compte des propriétés des roues).

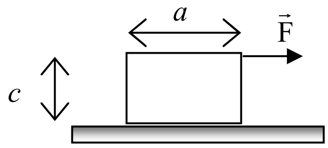


1- Afin de déplacer le réfrigérateur *vers l'avant*, on lui applique sur sa face arrière une force horizontale $\overrightarrow{F_{av}}$ dont le point de contact se trouve à hauteur de G ; puis, pour le déplacer *vers l'arrière*, on lui applique sur sa face avant une force horizontale $\overrightarrow{F_{ar}}$ (voir schéma). Déterminer, dans chaque cas, la force minimale à appliquer pour déplacer le réfrigérateur.

2- On n'exerce plus aucune force mais on suppose le réfrigérateur posé sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Reste-t-il immobile ?

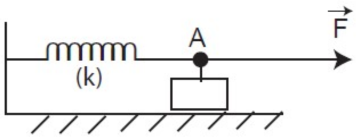
MS 7 : **Déplacement d'un pavé.** (*Mines*)

A. Un pavé est immobile sur un support horizontal fixe. A $t = 0$, on lui applique une force de traction $\vec{F}$ comme représenté sur la figure ci-contre.



Quelle valeur faut-il donner à la force de traction pour amorcer le glissement ? Le pavé risque-t-il de basculer et, si oui, à quelle condition ? En envisageant un glissement, à quelle condition le pavé glisse-t-il à vitesse constante ? Le pavé glissant à vitesse constante, on supprime brutalement la force de traction : discuter le mouvement.

B. On considère maintenant un patin de masse m dont le contact avec le sol est caractérisé par un coefficient de frottement f, et on note F_0 la force seuil nécessaire au déplacement du patin lorsqu'il est simplement posé sur le sol.



Le système étudié ici est constitué de l'association du patin et d'un ressort linéaire de constante de raideur k, comme indiqué sur le schéma ci-dessus. Une extrémité du ressort étant fixée en un point O, l'autre extrémité A, solidaire du patin, est soumise à une force de traction longitudinale F qui est initialement nulle et croit continûment très lentement. Le ressort étant initialement au repos, on note u le déplacement du point A par rapport à cette situation initiale <u>en supposant qu'à chaque instant le patin est dans un quasi état d'équilibre</u> sous l'effet de l'ensemble des actions.

Exprimer le déplacement u du point A en fonction de F et F_0, et tracer le graphe de $u(F)$.

On fait maintenant croître la force F jusqu'à une valeur maximale F_M, puis on la laisse décroître progressivement jusqu'à F = 0 (tout se fait toujours très lentement).

Décrire le comportement du système, c'est-à-dire exprimer à nouveau le déplacement u en fonction de F, lors de cette opération, en dégageant trois modes de fonctionnement selon la valeur atteinte par F_M. Expliciter avec précision la situation sur le graphe de $u(F)$.

$\boxed{\text{MS 8}}$: Machine tournante. (*Mines*)

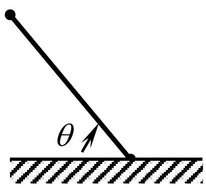
On considère une machine qui tourne à la vitesse angulaire $\omega(t)$ autour de son axe de révolution avec un moment d'inertie J. Elle est soumise à un couple moteur Γ_0 constant et à un couple de frottements fluides qui s'écrit $-h\omega$.

1- Sachant qu'à l'instant $t = 0$, le système est immobile, déterminer l'évolution de ω en fonction du temps. En particulier, déterminer le temps caractéristique τ de cette évolution ainsi que la valeur ω_0 de la vitesse limite atteinte.

2- En réalité, il y a des vibrations et le couple moteur s'écrit : $\Gamma(t) = \Gamma_0\left(1 + m\cos(\Omega t)\right)$ avec $m \ll 1$. Justifier qu'après un certain temps, on puisse mettre $\omega(t)$ sous la forme : $\omega(t) = \omega_0\left(1 + \varepsilon(t)\right)$ avec : $\varepsilon(t) = \gamma\cos(\Omega t - \varphi)$ puis déterminer γ et φ en fonction de m, τ et Ω.

3- On ajoute à la machine un anneau massif appelé volant d'inertie. Quelle utilité voyez-vous à cet ajout ?

$\boxed{\text{MS 9}}$: Chute d'une tige (*X, Mines - CCINP avec énoncé plus détaillé*)

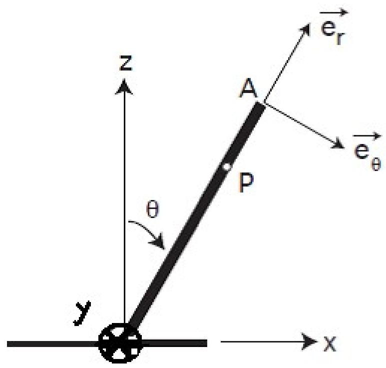


Une tige de masse m et de longueur $2l$ est lâchée sans vitesse comme indiqué sur le schéma ci-contre, l'angle initial de la tige avec la verticale étant quasi nul. Le contact avec le sol est caractérisé par un coefficient de frottement f.

On donne le moment d'inertie de la tige par rapport à tout axe passant par son extrémité et qui lui est orthogonal : $J = \frac{4}{3}ml^2$.

Etudier le mouvement.

$\boxed{\text{MS 10}}$: Une cheminée qui s'écroule. (*Mines*)



Une cheminée verticale est modélisée par un cylindre homogène de masse M, de longueur D et de rayon très petit devant D.

Pour une raison quelconque, l'équilibre de la cheminée est détruit ; cette dernière amorce une rotation autour de sa base dans le plan vertical (Oxz). Par soucis de simplification, le contact en O est assimilé à une liaison pivot parfaite et on donne le moment d'inertie de la cheminée par rapport à l'axe Oy qui vaut $J_0 = \frac{1}{3}MD^2$.

On appelle θ l'angle de la cheminée avec la verticale et on utilise les vecteurs de la base polaire d'axe (Oz).

1- Déterminer l'équation du mouvement de la cheminée tant qu'elle ne se brise pas.

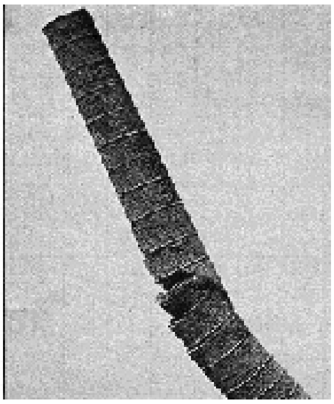
2- Déterminer la force exercée sur la cheminée par la liaison en O en fonction de θ.

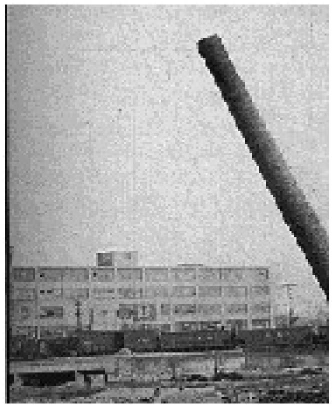
3- On s'intéresse maintenant aux forces internes à la cheminée, suceptibles de provoquer un une rupture. Pour cela on considère un point P quelconque sur l'axe de la cheminée et on s'intéresse à la sous partie de la cheminée comprise entre O et P, dont on note d la longueur. Outre l'action du sol et son propre poids, cette portion OP subit l'action du reste de la cheminée, c'est-à-dire de la portion PA (cette action est liée à la rigidité de la cheminée en P). Le contact entre les 2 portions de cheminée n'étant pas ponctuel, l'action de PA sur OP doit être modélisée par :

- Une résultante $\boldsymbol{S}$ de composantes $S_r(d,\theta)$ et $S_\theta(d,\theta)$;
- Un moment résultant dont la valeur <u>en P</u> sera notée $C(d,\theta)$ en projection sur (Oy).

S_r , S_θ et C traduisent respectivement les efforts de compression, de cisaillement et de flexion qui s'exercent sur la partie OP du fait de la partie PA. En particulier, la cheminée n'est pas conçue pour résister à des efforts de cisaillement ou de flexion trop importants.

Montrer que, dans ce modèle, la rotation de la cheminée provoque une augmentation des efforts de cisaillement et de flexion et que, si la cheminée se brise, cela se fera à sa base ou au tiers en partant de sa base. Confronter aux photographies ci-contre.





MS 11 : Chute d'un cylindre (Martin Centrale 1)

Un cylindre (masse m, rayon R) est posé sur le coin d'une table. L'angle initiale θ_0 défini sur le schéma ci-contre est très faible $(\theta_0 \ll 1)$.

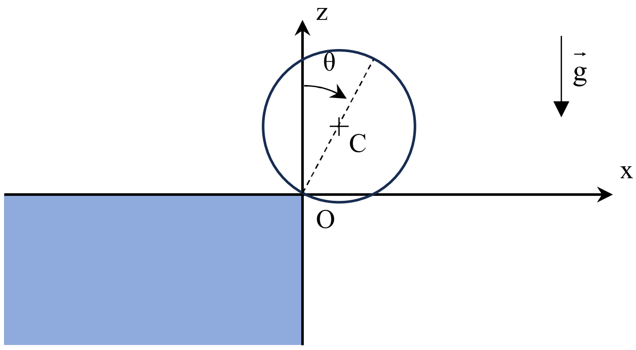
On étudie le mouvement du cylindre. Les frottements de l'air seront négligés mais pas les actions de contact

1- Prédire l'évolution de la situation.

2- Donner une équation du mouvement.

3- Le cylindre glisse-t-il sur le rebord de la table à un moment de sa chute ?

4- Décrire le mouvement du cylindre une fois qu'il a quitté le contact avec la table.



Données :

Moment d'inertie du cylindre par rapport à un axe normal à (Cxz) touchant le cylindre en son bord : $J = \frac{3}{2} mR^2$

MS 12 : Etude d'un mouvement pendulaire. (*CCINP*)

Un solide (S) est constitué de deux tiges homogènes rigidement liées l'une à l'autre, AO et OB, faisant entre elles un angle constant de 90° (figure 1). Chaque tige a pour masse m et pour longueur $2l$.

(S) peut tourner autour d'un axe horizontal (Δ) passant par O (soit Oz). La liaison en O est une liaison pivot parfaite. Un ressort de masse négligeable, de constante de raideur k, est accroché à l'une de ses extrémités en A, l'autre extrémité C étant maintenue fixe. Lorsque l'ensemble est en équilibre dans le champ de pesanteur, AO est horizontal, et OB vertical.

On donne le moment d'inertie d'une tige de masse m et de longueur $2l$, par rapport à un axe perpendiculaire à la tige et qui passe par une extrémité : $I = 4\,ml^2/3$.

On se propose d'étudier les oscillations de petit angle θ autour de la position d'équilibre.

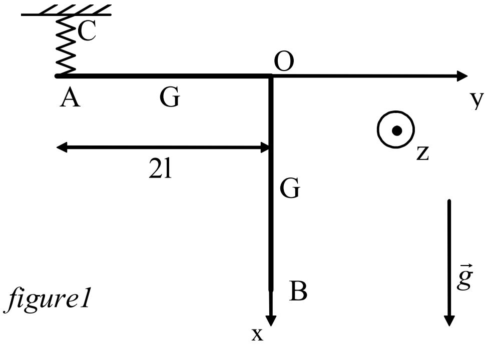


figure1

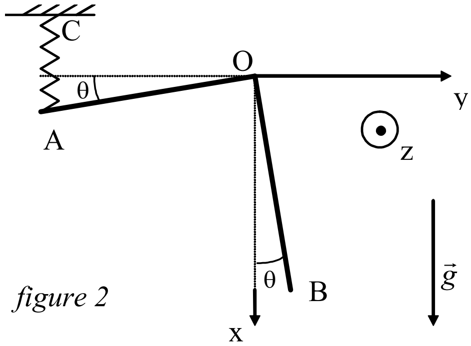


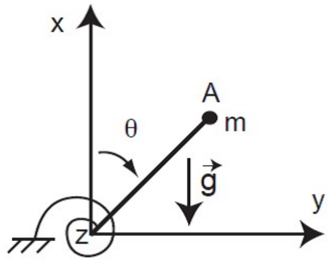
figure 2

1- Calculer le moment d'inertie J de l'ensemble des 2 tiges par rapport à l'axe Δ.

2- Déterminer l'allongement du ressort lorsque le système est à l'équilibre.

3- Déterminer l'équation différentielle vérifiée par θ. Montrer que le mouvement est sinusoïdal. Donner l'expression de la période en fonction de m, g, k, l et J.

MS 13 : **Pendule et mesure des variations du champ de pesanteur.** (***Centrale***)



Un pendule rigide est constitué d'une tige de longueur l et de masse négligeable, à l'extrémité de laquelle est fixée une masse m considérée ponctuelle. Le pendule peut tourner autour d'un axe horizontal (Oz) via une liaison pivot parfaite. Il est toutefois relié à un ressort spiral qui exerce un couple de rappel $\vec{\Gamma} = -C\theta\overrightarrow{u_z}$.

L'objectif de ce dispositif est de mesurer le champ de gravité.

1- Proposer une manière de mesurer le champ de gravité à l'aide d'un pendule simple.

2- Discuter qualitativement les positions d'équilibre du pendule décrit ci-dessus, lorsque C prend des valeurs très élevées ou très faibles.

3- Déterminer les positions d'équilibre possibles et discuter leur stabilité.

4- Montrer que, moyennant une condition sur C que l'on explicitera, on peut observer des petites oscillations autour de $\theta = 0$. Exprimer la période de ces oscillations en fonction de g, l et du paramètre $\eta = \dfrac{C}{mgl}$.

5- Déterminer la variation relative de période du pendule pour une petite variation du champ de pesanteur. Comparer au cas d'un pendule simple et commenter.

Note : N'oubliez pas que pour étudier un pendule rigide, il faut impérativement le considérer comme un solide même si, comme ici, toute la masse est fixée à une extrémité.

MS 14 : **Embrayage.** (***Centrale, Mines***)

Enoncé Centrale :

Un embrayage est constitué de 2 disques (1) et (2) de même rayon R, de même axe (Oz) et de même moment d'inertie J par rapport à cet axe, mais dont les vitesses angulaires Ω_1 et Ω_2 sont a priori différentes. Nous supposerons que le moteur entraine le disque (1) et que le disque (2) est lié aux roues. Lors du « passage d'une vitesse », les deux disques sont mis au contact avec une force d'appui de (1) sur (2) que nous noterons $\vec{F} = F\overrightarrow{e_z}$. Ce contact se fait avec un coefficient de frottement f.

1- On donne l'expression de la force exercée par le disque (1) sur un élément de surface dS du disque (2) : $\overrightarrow{dF} = \dfrac{F}{\pi R^2} dS\overrightarrow{e_z} + dF'\overrightarrow{e_\theta}$. Commenter puis donner l'expression de dF' ; on discutera selon les valeurs relatives de Ω_1 et Ω_2.

2- Calculer le moment $\vec{\Gamma}_{1/2}$ en O des actions exercées par (1) sur (2).

3- On donne les expressions du couple moteur $\overrightarrow{\Gamma_0}$ appliqué au disque (1) ainsi que des couples $\overrightarrow{\Gamma_1}$ et $\overrightarrow{\Gamma_2}$ associés aux frottements aérodynamiques subis par les deux disques : $\overrightarrow{\Gamma_0} = qFR\,\overrightarrow{e_z}$ et $\left.\overrightarrow{\Gamma_i}\right|_{i\in\{1,2\}} = -\dfrac{J}{\tau}\Omega_i\,\overrightarrow{e_z}$

Donner les dimensions de q et τ puis déterminer $\Omega_1(t)$ et $\Omega_2(t)$ en choisissant des conditions initiales appropriées à la situation physique décrite. Discuter.

Enoncé Mines :

Un embrayage est constitué de 2 disques identiques (1) et (2), de même axe (Oz) : le moteur entraine le disque (1) et le disque (2) est lié aux roues. Lorsqu'on relâche la pédale d'embrayage, les deux disques sont mis au contact et (1) exerce alors sur (2) une force $\vec{F} = F\overrightarrow{e_z}$.

Etudier le mouvement des deux disques juste après le « passage d'une vitesse ».

MS 15 : Rotation d’un cylindre. (*Mines*)

Un cylindre est posé sur une table horizontale, son axe de symétrie de révolution étant vertical. On le lance alors en rotation sur lui-même autour cet axe de révolution, sa partie inférieure restant en contact avec la table. Lors de ce contact, on suppose que l’on peut appliquer les lois de Coulomb à chaque élément de surface du cylindre en contact avec la table.

Etudier le mouvement.

MS 16 : Attraction « Round-up ». (*Centrale*)

Un « Round-up » est une attraction foraine à sensation inventée et construite par l'Américain Frank Hurbetz, dont la première version date de 1954. Il est constitué d’un cylindre creux de rayon $R = 6$ m dont la surface latérale intérieure est recouverte de panneaux contre lesquels les passagers prennent place. Le cylindre est alors mis en rotation à grande vitesse et les passagers se retrouvent plaqués contre les panneaux ; l’attraction est alors inclinée d’un angle qui peut aller jusqu’à 75° rapport au sol et les passagers restent collés aux panneaux, défiant en quelque sorte la gravité. A plein régime, la vitesse de rotation de l’attraction atteint 30 tours/min. Le mot « Round-up » vient de l'action que les cow-boys exécutent avec leur lasso pour attraper le bétail : le mouvement de rotation de l'attraction rappelle celui du lasso.

1- Rappeler les lois de Coulomb dans le cas du frottement entre deux solides.

2- Le manège se situe en position horizontale et tourne à plein régime. On note μ le coefficient de frottement solide entre le dos des passagers et la surface latérale de l’attraction. Exprimer la valeur minimale de μ pour qu’un passager puisse lever les pieds sans glisser.

3- La masse du rotor et des passagers est de 3 tonnes et on suppose qu’elle se situe sur la surface latérale du manège. Exprimer le moment d’inertie du manège puis calculer la puissance moyenne développée par le rotor pour atteindre le plein régime en 40 s.

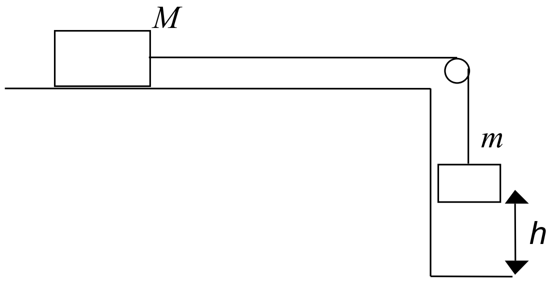
QUELQUES EXERCICES A LA LIMITE PROGRAMME OU HORS PROGRAMME…

1) SYSTEMES DE SOLIDES :

Méthode pour la résolution de tous ces exercices :

- *Effectuer très rigoureusement le paramétrage, puis le bilan des actions, pour chaque solide du système.*
- *Déterminer les éventuelles relations entre les inconnues cinématique, liées à la présence de fils inextensibles et/ou au non glissement d'un fil sur une poulie ; en déduire le nombre d'inconnues cinématiques effectives.*
- *Déterminer les éventuels liens entre les inconnues dynamiques en appliquant le principe des actions réciproques et en prenant en compte les particularités liées aux fils et poulies sans masse (transmission de la tension).*
- *Mise en équation :*
  - *Si le système est conservatif et à un degré de liberté effectif, appliquer le TEM au système formé de l'ensemble des solides (sauf problèmes de statique).*
  - *Sinon, appliquer la méthode systématique : TCI à chaque solide en translation, TMC à chaque solide en rotation autour d'un axe fixe.*
  - *Dans le cas de deux solides au contact ou liés par une liaison, remplacer éventuellement un de ces théorèmes par le TCI ou le TMC appliqué à l'ensemble des solides, si cela permet d'éviter de faire apparaitre les actions de contact / de liaison d'un solide sur l'autre.*
  - *En particulier, si une composante de la quantité de mouvement ou du moment cinétique de l'ensemble du système des solides se conserve, il ne faut pas le rater !*

MS 18 : Détermination d'un coefficient de frottements. (*Mines*)

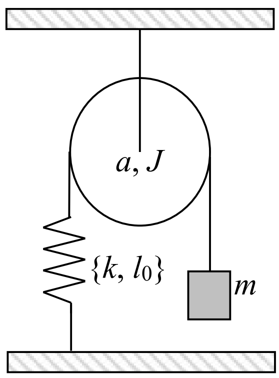


On considère le dispositif ci-contre où le fil reliant les deux masses est inextensible et où il n'y a pas de pertes dues à la poulie, supposée sans masse.

A $t = 0$, le fil entre les deux masses est tendu et on lâche la masse m d'une hauteur h au dessus du sol. La masse M est mise en mouvement et s'arrête après avoir parcouru une distance d.

Déterminer le coefficient de frottement f entre la table et la masse M, en fonction de m, M, h et d.

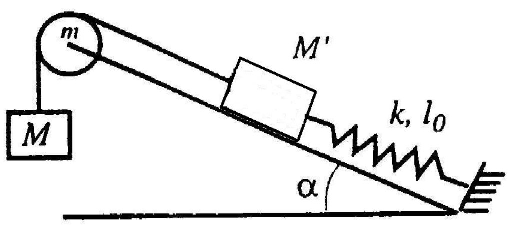
MS 19 : Système poulie-masses-ressort (1). (*Mines*)



On considère le dispositif ci-contre où le fil reliant les différents éléments est inextensible et sans masse ; la poulie est de rayon a et son moment d'inertie par rapport à son axe de révolution est J ; il n'y a aucun glissement du fil sur la poulie.

Déterminer la longueur du ressort à l'équilibre, puis étudier le mouvement du système.

MS 20 : Système poulie-masses-ressort (2). (*INT*)

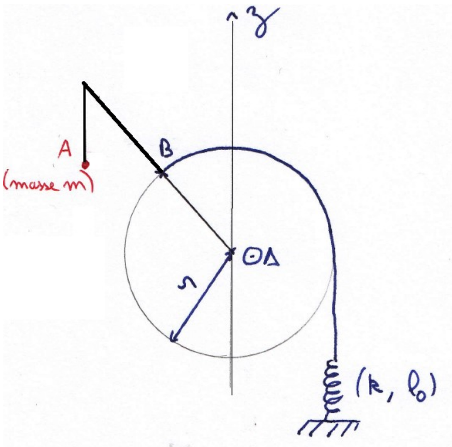


On considère le dispositif ci-contre où le fil reliant les deux masses est inextensible et sans masse, et ne glisse pas sur la poulie ; la poulie est également sans masse et il n'y a aucun frottement sur le plan incliné.

Etudier le mouvement du système.

MS 21 : **Système poulie-masses-ressort (3).** (***Mines***)

On considère le dispositif ci-contre composé d'un disque de centre O et de rayon r pouvant pivoter sans frottement autour de son axe de symétrie de révolution Δ, et d'une tige rigide de longueur L soudée au disque en un point B.



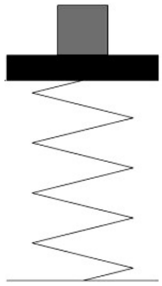
La tige est liée en son extrémité B à un fil inextensible et sans masse, qui s'enroule sur le disque et se prolonge ensuite par un ressort de raideur k. Le point B se trouve sur l'axe vertical (Oz) lorsque le ressort est au repos.

Enfin, une masse m est accrochée via un second fil à l'autre extrémité de la tige.

Etudier les positions d'équilibre du système.

M 22 : **Oscillations d'un plateau.** (***Mines***)

Un ressort de masse négligeable, de raideur k et de longueur au repos l_0, est maintenu vertical par un dispositif approprié ; son extrémité inférieure est fixe et son extrémité supérieure est solidaire d'un plateau de masse M. On pose alors une masse m sur le plateau, ce qui produit une variation d'altitude h de ce dernier, puis on appuie sur le plateau afin qu'il descende d'une hauteur a par rapport à la position précédente, puis on le lâche.



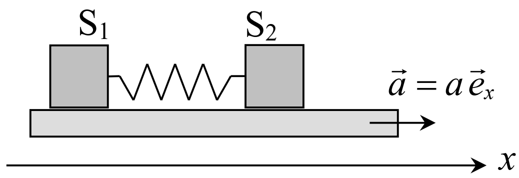
Quelle condition doit vérifier a pour que la bille ne quitte jamais le plateau ?

On suppose que : $a = 2g\dfrac{m+M}{k}$ où g est l'accélération de la pesanteur.

Déterminer l'instant où la masse quitte le plateau, ainsi que sa cote et sa vitesse à cet instant.

MS 23 : **Mouvement sur un support accéléré.** (***Mines***)

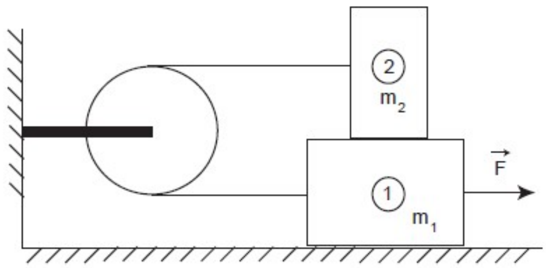
Sur un plateau uniformément accéléré le long d'un axe (Ox), on considère deux solides S_1 et S_2 de même masse m attachés l'un à l'autre par un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k. Le contact entre S_1 et le plateau est caractérisé par un coefficient de frottement f, tandis que S_2 peut glisser sans frottements sur le plateau.



A l'instant initial, les deux solides sont immobiles par rapport au plateau et le ressort au repos ; déterminer la longueur du ressort au cours du temps.

MS 24 : **Déplacement relatif de deux blocs.** (***Mines***)

On considère le dispositif ci-contre où le fil reliant les deux pavés est inextensible et sans masse. La poulie est également sans masse. Les coefficients de frottement sol / pavé et pavé / pavé sont identiques et notés f. On applique une force horizontale sur le pavé n°1.



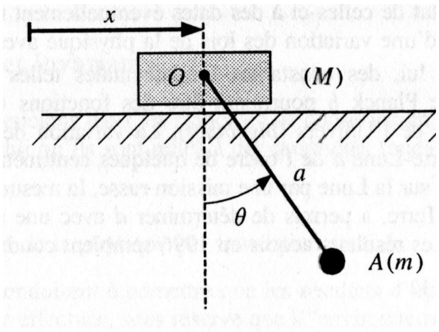
Calculer la valeur minimale F_{min} à donner à cette force pour observer un déplacement des pavés et donner alors l'accélération du pavé n°1.

Note : A la limite du glissement, toutes les forces sont parfaitement déterminées à partir du modèle proposé et on peut sans soucis répondre à la question posée en procédant méthodiquement. En revanche, si vous essayez d'étudier la situation d'équilibre dans le cas d'une force $F < F_{min}$, vous constaterez que le modèle proposé ne permet pas de déterminer sans ambiguïté l'ensemble des forces mises en jeu (on aboutit à un système comportant *une inconnue de plus que le nombre d'équations). Ceci vient du modèle de « fil inextensible » qui, dans cette configuration, est trop simpliste et ne permet pas de calculer la tension du fil.*

MS 25 : Etude d'un pendule attaché à un chariot. (*Mines*)

Les systèmes de solides articulés comme celui-ci sont hors programme.

On considère le dispositif ci-contre composé d'un chariot de masse M susceptible de se déplacer sans frottements sur un support horizontal le long d'un axe (Ox). Au centre O ce chariot est accroché un pendule simple de masse m et de longueur a. Le chariot et le pendule sont respectivement repérés par des coordonnées x et θ (voir la figure ci-contre). Le dispositif étant initialement au repos, on écarte le pendule de sa position d'équilibre et on lâche l'ensemble sans vitesse initiale

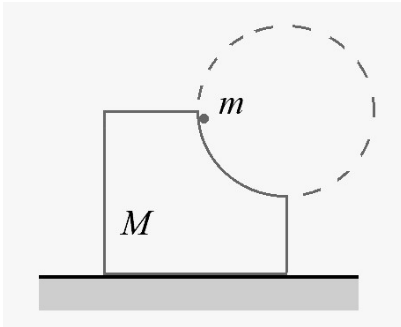


Déterminer l'évolution du système au cours du temps.

Indication : appliquer des théorèmes qui évitent de faire apparaitre les actions de contact d'un solide sur l'autre.

MS 26 : Solide qui glisse sur un support mobile (*X*)

On étudie un système de deux solides S_1 et S_2, de masses respectives M et m. S_1 est un cube qui peut glisser sans frottements sur un sol horizontal, mais dont une partie a été évidée afin de créer une rampe cylindrique, comme indiqué sur le schéma ci-contre (vue en coupe). S_2 est une petite bille assimilable à un point matériel qui peut glisser sans frottements sur cette rampe.



A $t = 0$, l'ensemble est au repos et on lâche la masse m au sommet de la rampe.

Déterminer les vitesses finales des deux solides.

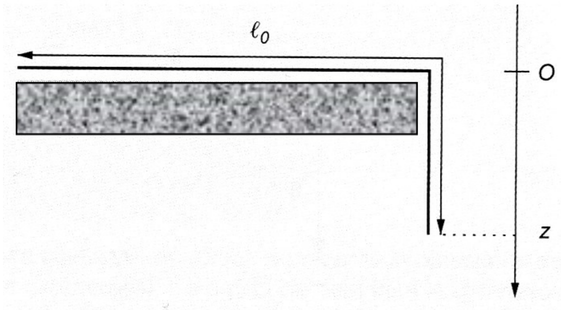
2) SYSTEMES DEFORMABLES :

Méthode pour la résolution de tous ces exercices :

- *Si le système comporte un fil qui se déforme au cours du mouvement mais dont la forme est parfaitement connue à chaque instant, et si ce système est conservatif, appliquer impérativement le théorème de l'énergie mécanique. Si nécessaire, les énergies se calculent end coupant le fil ou le solide en tranches infinitésimales.*
- *Si le système comporte un fil statique ou qui se déforme au cours du mouvement et dont la forme est imparfaitement connue, ou si ce système n'est pas conservatif, appliquer le ou les théorèmes utiles à une tranche infinitésimale de fil. Il faut pour cela introduire la tension locale au sein du fil.*

MS 27 : Corde qui glisse. (*Mines, X*)

Une corde inextensible de longueur l_0 et de masse m est posée sur une table, une de ses extrémités reposant dan le vide. On appelle z(t) la longueur de corde suspendue dans le vide à l'instant t (cf figure ci-contre)



1- On supposera que les frottements sont très faibles et que le corde est souple, c'est-à-dire peut se déformer sans effort. Montrer que le système est conservatif.

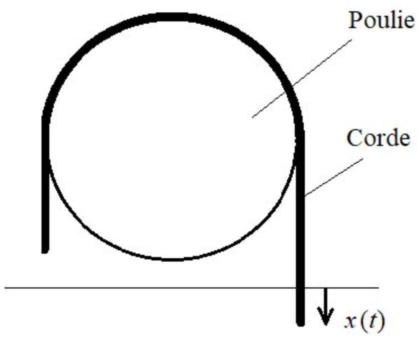
2- Trouver une équation satisfaite par z(t)

3- La corde est initialement immobile et $z(0) = z_0$. Trouver l'évolution de z(t)

MS 28 : Corde et poulie. (*Mines*)

On considère une corde de masse linéique ρ et de longueur l qui, sous l'effet de son poids, glisse sans frottement sur une poulie d'inertie négligeable de rayon R. La corde est soumise à une force de frottement fluide due à l'air de norme linéique γv où v est la norme de la vitesse de la corde.

On repère l'extrémité droite de la corde par son abscisse x le long d'un axe vertical descendant, x étant nul lorsque la corde pend symétriquement de part et d'autre de la poulie (voir figure). On s'intéresse alors aux conditions initiales suivantes : $x\ (t = 0) > 0$ et $v\ (t = 0) = 0$.



1- Déterminer l'équation différentielle vérifiée par x tant que l'extrémité gauche n'atteint pas la poulie.

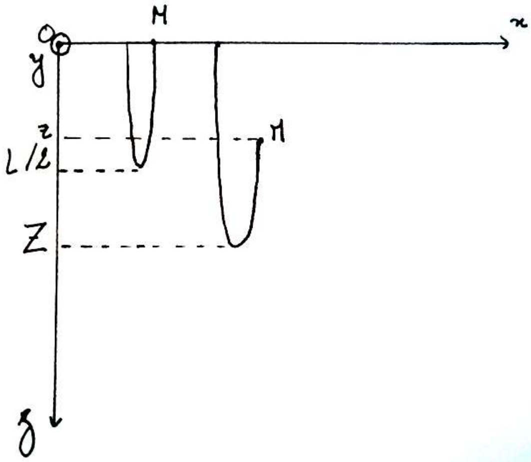
2- En prenant $\gamma = 0$, donner le temps que met l'extrémité gauche à atteindre la poulie.

3- Comment ces résultats sont-ils modifiés si la corde ne glisse pas sur la poulie mais entraine celle-ci en rotation ?

MS 29 : Un jeu dangereux. (*CCINP*)

Un étudiant de masse M se tient sur un pont situé dans le plan (xOy). Il est attaché à un câble de masse linéique μ de longueur L supposé inextensible. On s'intéresse au système S composé de l'étudiant et du câble, que l'on suppose indissociables. A l'instant t = 0, l'étudiant saute.

Le câble pend alors en l'air sur une longueur $z = \frac{L}{2}$ (voir schéma). On note z la hauteur de l'étudiant et Z la hauteur du point le plus bas du câble.



1- On définit l'origine des énergies potentielles lorsque l'étudiant se trouve dans le plan xOy. Calculer l'énergie mécanique du système S à l'instant t = 0.

2- L'étudiant se trouve désormais à une hauteur $z < Z$

2a- Exprimer Z en fonction de z et L.

2b- Calculer l'énergie potentielle de la portion du câble située entre O et z

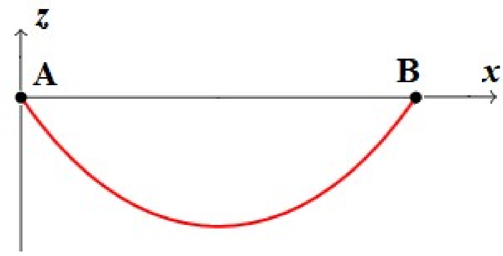
2c- En déduire que l'énergie potentielle du câble vaut : $E_p = A\mu g\left(Lz - \frac{z^2}{2}\right) + cst$ où A est une constante à déterminer.

3- Donner une condition nécessaire pour le système soit conservatif.

4- A l'aide du théorème de l'énergie mécanique, calculer la vitesse de M en fonction de z sachant que M est à la même vitesse que la portion du mobile du câble, cette dernière étant à déterminer.

5- Application : calculer la vitesse de l'étudiant à l'instant où le câble est complètement tendu. Discuter le cas particulier $\mu = 0$

$\boxed{\text{MS 30}}$: Forme d'une corde suspendue. (*X, ENS dans une version brutale*)



On s'intéresse à une corde sans raideur, de longueur *L* et de masse *m* uniformément répartie, suspendue dans le champ de gravité entre deux points d'attache A et B situés sur un même axe horizontal. On cherche l'équation *z* (*x*) donnant la forme spatiale de la corde au repos.

En tout point point M d'abscisse *x* de la corde, on définie la tension $\overrightarrow{T(x)}$ comme la force exercée par la partie de la corde située à droite de M sur la partie de la corde située à gauche de M.

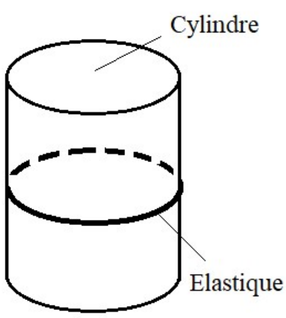
1- En étudiant l'équilibre d'un morceau de corde situé entre *x* et *x* + *dx*, montrer que la projection $T_x(x)$ est en fait indépendant de *x* ; cette quantité sera notée T_0 et on ne cherchera pas à la calculer.

2- Trouver alors deux relations liant la projection $T_z(x)$ à T_0 et $\frac{dz}{dx}$, et en déduire une équation différentielle vérifiée par z(*x*).

3- Intégrer cette équation en choisissant l'origine du repère au point le plus bas de la corde et montrer que l'on aboutit à : $z(x) = a\left(\cosh\left(\frac{x}{a}\right) - 1\right)$

où *a* est un paramètre que l'on exprimera en fonction de T_0 , m, L et g.

$\boxed{\text{MS 31}}$: Elastique sur un cylindre. (*Mines*)



On considère un cylindre de rayon *a* et un élastique tendu autour de celui-ci, comme représenté sur la figure ci-contre. Le coefficient de frottements de l'élastique sur le cylindre est noté *f*.

Déterminer la tension que doit avoir l'élastique pour que celui-ci ne glisse pas le long du cylindre.

3) SPHERE OU CYLINDRE QUI ROULE SUR UN SUPPORT, AVEC OU SANS GLISSEMENT :

Très hors programme !!
Indications pour la résolution de tous ces exercices :

- *Le solide est paramétré par un angle + les coordonnées de son barycentre.*
- *Il faut exprimer la vitesse de glissement du solide sur le support à l'aide de ces coordonnées : si cette vitesse est non nulle à t = 0 (utiliser les conditions initiales fournies), la première phase du mouvement est un glissement ; si cette vitesse est initialement nulle, la première phase peut être un roulement sans glissement ou un glissement et il faut alors effectuer une hypothèse dont on teste la validité a posteriori.*
- *Pour la mise en équation, la méthode systématique consiste à appliquer au solide le TCI et le TMC par rapport à G dans le référentiel barycentrique. Il faut ajouter à cela la condition de contact : vitesse de glissement nulle dans le cas du roulement sans glissement (fournit un lien entre les coordonnées de G et l'angle de rotation), loi de coulomb du glissement dans l'autre cas* ($|T| = f|N|$).
- *Lors d'un roulement sans glissement, le système se ramène souvent à un degré de liberté effectif et est conservatif : utiliser le TEC plutôt que la méthode systématique.*
- *Une fois les équations résolues dans la première phase du mouvement, il faut tester les limites de cette phase, ou l'hypothèse initiale effectuée : le glissement dure tant que la vitesse de glissement reste non nulle ; le roulement sans glissement dure tant que* $|T| \leq f|N|$. *Il est courant qu'une phase initiale de glissement soit suivie d'une phase de roulement sans glissement (le contraire ne se produit pas si le support est plan…).*

MS 31 : Effet rétro au billard. (*Mines, ENS dans une version brutale*)

Une boule homogène de centre G, de masse m et de rayon R, se déplace avec un coefficient de frottement f sur un tapis de billard modélisé par un plan horizontal, fixe dans un référentiel galiléen dont $\overrightarrow{u_y}$ est la verticale ascendante. Le moment d'inertie de la boule par rapport à un diamètre quelconque vaut $J = \frac{2}{5}mR^2$. Par une action ad hoc qui ne sera pas étudiée, on lance la boule avec une vitesse angulaire initiale $\vec{\Omega}(t=0) = \Omega_0\overrightarrow{u_z}$ et une vitesse initiale $\vec{v}(G, t=0) = v_0\overrightarrow{u_x}$ avec $\Omega_0 > 0$ et $v_0 > 0$.

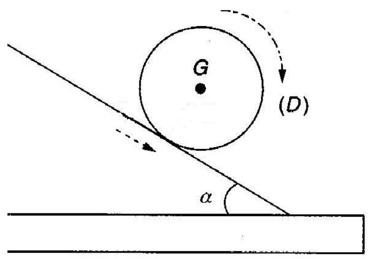
1- Montrer que la boule glisse à l'instant t = 0 et préciser le sens de la vitesse de glissement.

2- On suppose qu'il y a glissement pour $0 \leq t \leq t_1$. Déterminer $\vec{v}(G,t) = v(t)\overrightarrow{u_x}$, $\vec{\Omega}(t) = \Omega(t)\overrightarrow{u_z}$, la vitesse de glissement $\overrightarrow{v_g}(t)$ et la date t_1.

3- Etudier le mouvement pour $t \geq t_1$. En déduire une condition sur v_0, R et Ω_0 pour que la boule finisse par se déplacer avec $\vec{v}$ de même direction et de même sens que $-\overrightarrow{u_x}$

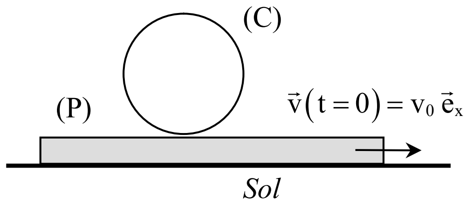
MS 32 : Roulement sur un support incliné. (*ENS*)

Etudier le mouvement d'une sphère de masse *m* et de rayon *R* lâchée sans vitesse initiale sur un plan incliné, le contact se faisant avec frottement. Son moment d'inertie par rapport à un de ses diamètres s'écrit : $2mR^2/5$.



$\boxed{\text{MS 33}}$: Cylindre sur une plaque. (*Mines*)

Une plaque de masse m_p glisse sans frottements sur un sol horizontal, sa vitesse initiale étant notée $v_0 \overrightarrow{e_x}$. Sur cette plaque est posé un cylindre de masse m_c et de rayon R, initialement immobile par rapport au sol. Le coefficient de frottement entre le cylindre et la plaque est noté f. Le moment d'inertie du cylindre par rapport à son axe de symétrie est $J = \dfrac{1}{2} MR^2$.



1- Déterminer les équations du mouvement tant que le cylindre glisse sur la plaque.

2- Estimer la distance parcourue par le cylindre avant l'arrêt du glissement.

3- Expliquer ce qui se passe une fois que le glissement cesse.

4- Réaliser un bilan énergétique.