# ONDES MECANIQUES

**Cpt Ondes 1** **Acoustique-onde (Gabriel Centrale 1)**

On considère la corde d'un instrument de musique de longueur L qui vibre dans le plan Oxy et oscille selon l'axe Oy à la pulsation ω ret à la célérité c = 310 m/s

**1-** Proposer une expression pour y(x,t). Comment appelle-t-on ce type d'onde. Montrer qu'il existe une quantification de la pulsation spatiale.

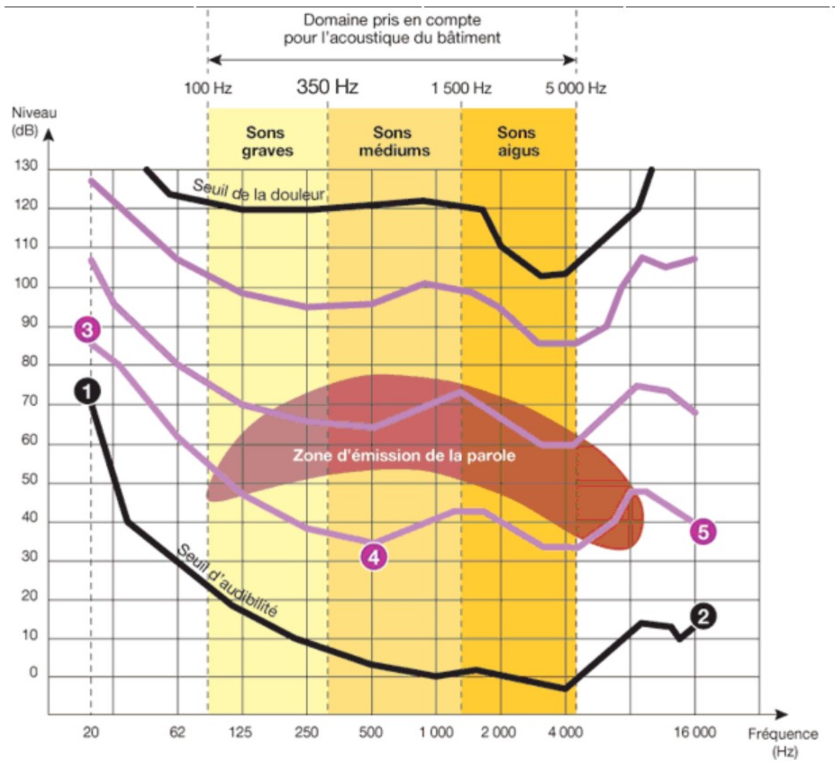
**2-** On met la main pour créer un nœud de vibration au centre de la corde. On excite la corde avec un archet. Déterminer la fréquence f de vibration et en déduire la note jouée. Quel est le rôle de l'archet ?

**3-** On sait que à une distance l = 0,1 m du violon on a $L_{dB}$ = 45 dB. Déterminer la distance limite d'audibilité du violon, en faisant des hypothèses à préciser.

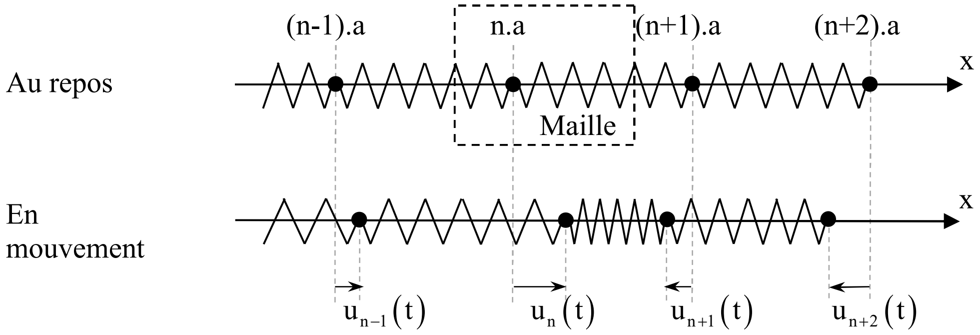
Données :

- On donne la définition du niveau d'intensité sonore en décibel : $L_{dB} = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ où I est l'intensité sonore en $W.m^{-2}$ $I_0 = 10^{-12}\ W.m^{-12}$ est l'intensité de référence.

- On donne le graphique ci-dessous




**Cpt Ondes 2** **: Chaine de masses-ressorts modélisant un solide cristallin.** ***(CCINP, X sans indications)***



*Version CCINP :*

Le solide cristallin unidimensionnel est modélisé par un sustème de masses pontuelles identiques m, représentait les atomes, couplées par des ressorts identiques de raideur k (cf ci-dessous)

On suppose la chapine d'oscillateurs aisnsi constituée indinié et l'on note $u_n(t)$ $(n \in \mathbb{Z})$ le déplacement sur l'axe par rapport à sa position d'équilibre, au temps t, de la masse repérée par l'indice n. On note a la longueur à l'équilibre des ressorts (dimension de la maille du cristal)

**1-** Equation de propagation

Montrer que $\dfrac{d^2u_n}{dt^2} = -\dfrac{k}{m}\left(2u_n - u_{n-1} - u_{n+1}\right)$.

Justifier la dénomination d'équation de propagation.

**2-** Relation de dispersion

On cherche des solutions à l'équation 2 de la forme $u_n(t) = U e^{j(Kna-\omega t)}$ où U est une constante. Que représentent U, ω, K (on supposera $\omega > 0$) ?

Montrer que K et ω sont reliés par la relation : $\omega^2 = 4\omega_0^2 \sin^2\left(\dfrac{Ka}{2}\right)$

Quelle est la signification de cette équation ? Représenter sur un graphique ω en fonction de K.

**3-** Zone de Brillouin

Exprimer le rapport des déplacements de deux masses consécutives/

En déduire que l'on peut se limiter au domaine de K suivant : $-\dfrac{\pi}{a} \le K \le \dfrac{\pi}{a}$.

Ce domaine de K définit ce que l'on appelle la zone de Brillouin du cristal.

Interpréter physiquement le cas $K = \pm\dfrac{\pi}{a}$

**4-** Vitesse de groupe et vitesse de phase

Donner la définition d'un milieu dispersif. Citer quelques exemples de milieux dispersifs (par exemple en optique).

Rappeler la définition et la signification de la vitesse de groupe et de la vitesse de phase.

Calculer la vitesse de groupe $V_g$ d'un paquet d'onde, de pulsation spatiale centrée autour d'une valeur $K_0$ $\left(-\dfrac{\pi}{a} \le K_0 \le \dfrac{\pi}{a}\right)$ et se propageant dans le cristal.

Que vaut $V_g$ pour $K_0 = \pm\dfrac{\pi}{a}$ ? Interpréter ce résultat.

Pour $K_0 = 0$, décrire le déplacement relatif de deux atomes consécutifs et interpréter.

**5-** Chaîne finie

Décrire, rapidement et qualitativement, comment sont médifiés les résultats précédents dans le cas d'un cristal de longueur finie.

*Possibilité de suite de l'exo en effectuant un passage à la limite continue…*

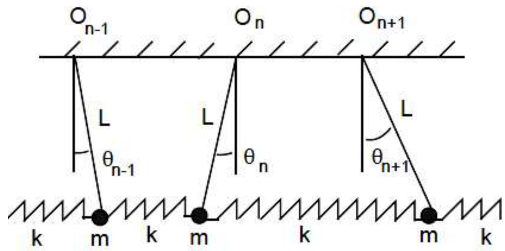
*Version X :*

On considère une chaîne infinie unidimensionnelle de ressorts, tous de masse négligeable, de longueur à vide *a* et raideur *k*. A l'extrémité de chaque ressort se trouve une masse *m* qui coulisse sans frottements selon un axe O*x* (toutes les masses sont identiques). Au repos, les masses sont espacées d'une longueur *a*. On met une des masses en oscillation sinusoïdale.

Peut-on avoir une onde qui se propage jusqu'à l'infini le long de la chaine ?

**Cpt Ondes 3 : Chaine de pendules couplés.**

On considère une chaîne de pendules simples identiques équidistants effectuant des oscillations de faible amplitude.




**1-** On note $x_n = na + u_n$ la position de la $n^{ième}$ masse m. Quel est le sens physique de $u_n$ ? Quel est le lien entre $u_n$ et $\theta_n$ pour les petites oscillations. ?

**2-** Soit $u(x,t)$ la fonction telle que $u(na,t) = u_n(t)$. Sachant que $u_n$ reste faible devant $a$ et varie peu d'un pendule au suivant, trouver une équation différentielle vérifiée par $u(x,t)$. La résoudre et commenter.

**Cpt Ondes 4 : Ondes de compression au sein d'un cylindre.**

On considère un solide homogène de masse volumique ρ constante, qui a la forme d'un cylindre de section S et d'axe Ox horizontal, le long duquel on étudie les petits mouvements de déformation. On néglige l'action de la pesanteur.

Dans le domaine d'élasticité du matériau, la norme F de la force de traction permettant à un solide de longueur L de s'allonger de ΔL est donnée par la loi de Hooke : $F = ES\frac{\Delta L}{L}$ où E est une constante appelée module d'Young du matériau

**1-** Quelle est l'unité d'un module d'Young ? On motivera sa réponse pour laquelle on utilisera une seule unité du système international.

**2-** On note X(x,t) le déplacement par rapport à la position de repos d'une section plane d'abscisse x. Calculer la variation relative de longueur d'une tranche élémentaire du cylindre de longueur au repos dx et en déduire la force de traction $\vec{F}(x,t) = F(x,t)\overrightarrow{u_x}$ exercée par la partie « droite » (du côté des x croissants) sur la partie « gauche » (du côté des x décroissants) en fonction de E, S et $\frac{\partial X}{\partial x}$. Ecrire l'équation du mouvement de la tranche de longueur dx et en déduire l'équation aux dérivées partielles vérifiées par X(x,t)

**Cpt Ondes 5 : Onde au sein d'un ressort.**

On considère un ressort horizontal de longueur à vide L dont une extrémité est fixée en O et dont l'extrémité mobile M est reliée à une masse ponctuelle m libre se déplaçant sans frottement le long de l'axe Ox. On note μ la masse linéique du ressort. On repère le mouvement d'une spire située à l'abscisse x au repos par sa position $x + \xi(x,t)$. Si on coupe fictivement le ressort à l'abscisse x, la force exercée par la partie droite sur la partie gauche est donnée par la loi de Hooke : $\vec{F} = K\frac{\partial \xi}{\partial x}\overrightarrow{u_x}$ où K est une caractéristique du matériau.

**1-** Montrer que $\xi(x,t)$ est solution d'une équation de d'Alembert et exprimer la célérité c correspondante.

**2-** On fait l'approximation des régimes quasi-stationnaires, c'est-à-dire qu'on néglige les dérivées temporelles dans l'équation de D'Alembert. On note $L + X(t)$ la position de la masse m.

**2a-** Déterminer la fonction ξ(x,t) en fonction de x, X(t) et L.

**2b-** En déduire la force exercée par le ressort sur m en fonction de K, L et X. En déduire la raideur k du ressort en fonction de K et L.

**2c-** Déterminer la pulsation $\omega_{ARQS}$ des oscillations. En déduire une condition sur μ, L et m pour que l'ARQS soit validée.

**3-** On revient au cas général.

**3a-** Quelles sont les conditions aux limites imposées à la fonction ξ(x,t) d'une part par le mur en x = 0 et d'autre part par la masse m en x = L ?

**3b-** On cherche des solutions de la forme : $\xi(x,t) = f(x)\cos(\omega t)$

Etablir l'équation dont f(x) est solution et déterminer sa forme à une constante multiplicative près en fonction de ω, x et c.

**3c-** Montrer que ω est solution de : $\tan\left(\frac{\omega L}{c}\right)=\frac{K}{m\omega c}$

Discuter cette équation graphiquement.

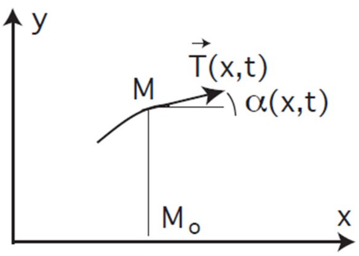
**3d-** On suppose que $\mu L \ll m$ et $\omega_1 \ll \frac{c}{L}$. En utilisant le développement limité $\tan u = u + \frac{u^3}{3} + o\left(u^3\right)$, déterminer $\omega_1$ à l'ordre 1 en $\frac{\mu L}{m}$ en fonction de K, μ, L et m. Vérifiait que tout se passe comme si on accrochait à un ressort sans masse un masse ponctuelle fictive $m^* = m + \alpha\mu L$ où α est un nombre à déterminer.

## Cpt Ondes 6 : Ondes sur une corde tendue. (*Mines*)

Une corde sans raideur, inextensible, de masse linéique μ constante, est tendue par une tension $\vec{T}$. Au repos, elle se confond avec l'axe Ox. On étudie les petits mouvements transversaux de cette corde de part et d'autre de cette position d'équilibre dans le plan Oxy, en admettant qu'un élément de la corde au repos (au point $M_0$) reste pendant le mouvement à la même abscisse. L'élongation d'un point d'abscisse x à l'instant t (point M) est notée y(x,t). La tangente en M à la corde fait un angle α(x,t) qui reste petit, ce qui suppose $\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right| \ll 1$. Enfin l'action du champ de pesanteur sur le mouvement, ainsi que tout cause d'amortissement sont négligées.

**1-** Equation d'onde pour un ébranlement le long de la corde.

**1a-** La longueur de la corde varie très peu lorsqu'elle vibre. Montrer qu'à des termes du second ordre en α près, l'abscisse curviligne s peut être confondue avec x.




**1b-** On admet que la tension $\vec{T}$ reste en tout point tangente à la corde. Ecrire la relation fondamentale de la dynamique pour un tronçon de la corde compris entre les abscisses x et x+dx.
Montrer à l'aide des hypothèses faites que la tension est de module constant, noté T, et déterminer l'équation différentielle du mouvement vérifiée par y(x,t)/

**2-** Solution en ondes stationnaires de l'équation de D'Alembert.
A présent la corde de longueur L est fixée à ses extrémités x = 0 et x = L.

**2a-** On cherche des solutions à l'équation du **1b-** sous la forme de variables séparées : $y(x,t)=f(x)g(t)$.
Montrer que f et g doivent être des fonctions sinusoïdales. En notant ω la pulsation (temporelle) de g, quelle est la pulsation (spatiale) k de f ?

**2b-** Montrer que les pulsations ω ne peuvent prendre qu'une série de valeurs discrètes notés $\omega_n$ et en donner l'expression. En déduire que pour des grandeurs L et ω fixées, la longueur d'onde λ ne peut elle-même prendre qu'une suite de valeur $\lambda_n$. Exprimer la longueur L en fonction de $\lambda_n$.

**2c-** Quelle est l'expression d'une solution correspondant au mode de vibration d'indice n ? En déduire la solution générale de l'équation du **1-** écrite sous forme (2) d'une série de Fourier.

**2d-** Justifier le terme d'onde stationnaire donné à $y_n(x,t)$ (mode n). Monter qu'il existe le long de la corde, outre les extrémités des points immobiles ; en préciser le nombre et la position.
En supposant qu'à l'instant t = 0 la corde coincide avec l'axe Ox, représenter graphiquement l'état des déformation de la corde aux instants $t_1 = \frac{T_n}{4}$, $t_2 = \frac{T_n}{2}$, $t_3 = \frac{3T_n}{4}$, $t_4 = T_n$ avec $T_n = \frac{2\pi}{\omega_n}$ dans les cas $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$

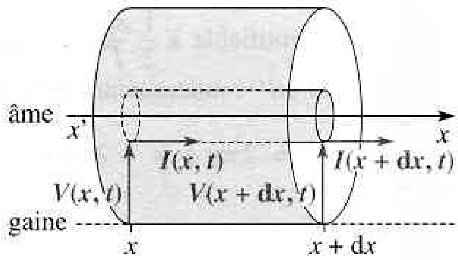
AN : pour une corde de longueur L, oscillant à la fréquence ν, donner la tension $T_n^0$ à appliquer pour obtenir le seul mode n. En déduire ν pour n = 1 (fréquence propre la plus basse), $T_1^0 = 2930\,N$, $\mu = 5{,}65.10^{-3}\ kg.m^{-1}$, $L = 1{,}22\,m$. Quelle note musicale reconnaissez-vous ?

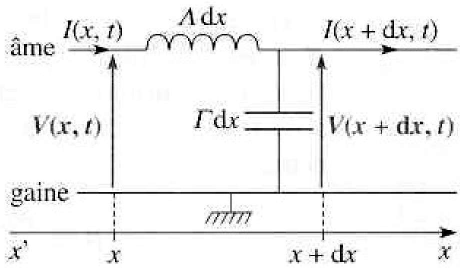
# ONDES EN ELECTROCINETIQUE

## Cpt ondes 7 : Etude d'un câble coaxial. (a donné lieu à des oraux à *Centrale, Mines & ENS*)

Une tranche de longueur $dx$ d'un câble coaxial est modélisée électriquement de la façon suivante :

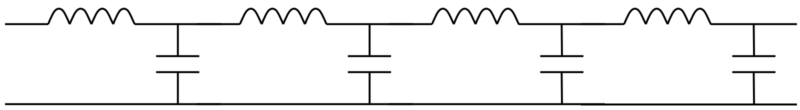
**MODELISATION D'UNE TRANCHE DE CABLE DE LONGUEUR *dx* :**




$\Lambda$ et $\Gamma$ sont respectivement l'inductance et la capacité par unité de longueur du câble. L'ensemble du câble est ainsi modélisé par une succession de cellules électriques identiques, comme suit (on parle de « modèle à constantes réparties ») :

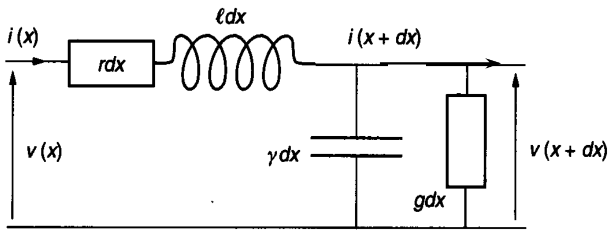
**MODELISATION DE L'ENSEMBLE DU CABLE :**



**1-** Etablir les équations couplées qui régissent l'intensité $I(x,t)$ et de la tension $V(x,t)$ au sein du câble ; en déduire les équations de propagation de ces grandeurs et commenter.

**2-** Dans le cas d'un câble coaxial dont le cœur et la gaine ont des rayons respectivement notés $a$ et $b$, et dont le milieu isolant entre les deux conducteurs est de permittivité relative $\varepsilon_r$, déterminer les expression de $\Gamma$ et $\Lambda$ en fonction de $a$, $b$, $\mu_0$, $\varepsilon_0$ et $\varepsilon_r$. Commenter.

**3-** Une tranche de longueur $dx$ d'un câble coaxial est maintenant modélisée par le schéma de la figure ci-contre et comprend une inductance $\ell.dx$ et une résistance $r.dx$ en série, ainsi qu'une capacité $\gamma.dx$ et une conductance $g.dx$ en parallèle.
Commenter ce nouveau modèle et discuter les termes $r.dx$ et $g.dx$.



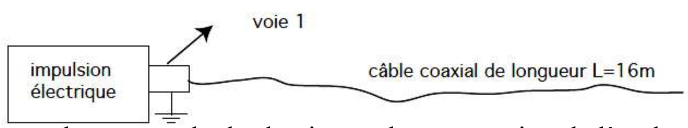

**4-** Etablir les nouvelles équations de propagation de l'intensité $i(x,t)$ et de la tension $v(x,t)$ au sein du câble.

**5-** Envisager des solutions en pseudo ondes progressives harmoniques et établir l'équation de dispersion suivante (dite « des télégraphistes ») : $k^2 = \omega^2\ell\gamma - j\omega(\ell g + r\gamma) - rg$ .
Que peut-on dire, dans le cas général, de la propagation d'une onde électrique le long de cette ligne ?

**6-** Montrer qu'on peut choisir les paramètres caractéristiques de la ligne de façon que la vitesse de phase et la distance caractéristique de l'amortissement soient indépendantes de la pulsation de l'onde. Quel est l'intérêt pratique de ce choix ?

**7-** Afin de mesurer la vitesse de propagation d'une onde électromagnétique dans un câble coaxial, on réalise l'expérience schématisée sur la figure 1 ci-dessous ; on observe alors à l'oscilloscope le signal représenté sur la figure 2.

Figure 1



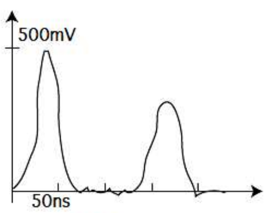
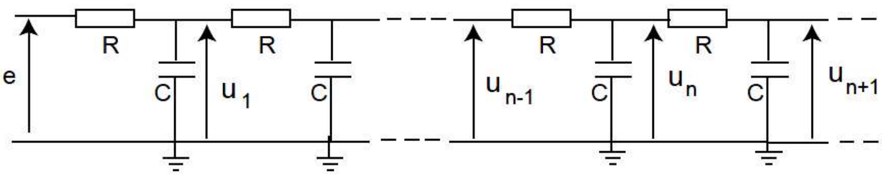




Figure 2

Commenter l'oscillogramme obtenu et calculer la vitesse de propagation de l'onde dans le câble.

**Cpt Ondes 8 : Chaine infinie de cellules identiques. (*Centrale*)**

On considère une chaine infinie de cellules composées d'un condensateur de capacité $C$ et d'un résistor de résistance $R$, alimentée par une tension d'entrée : $e(t) = U_0 \cos(\omega t)$ avec $RC\omega \ll 1$.




**1-** Trouver une relation de récurrence sur $\{u_n(t)\}$ où $u_n$ désigne la tension aux bornes du $n^{\text{ème}}$ condensateur.

**2-** On note $x_n = na$ la position du $n^{\text{ème}}$ condensateur. Proposer une écriture de $u_n$ sous forme d'une pseudo-onde plane progressive harmonique et déterminer la distance $\delta$ caractéristique d'atténuation spatiale de l'onde en fonction de la pulsation du signal.

**3-** Soit $u(x,t)$ la fonction telle que $u(na,t) = u_n$. Sachant que $a$ est faible devant $\delta$, trouver une équation différentielle vérifiée par $u(x,t)$. La résoudre et confronter aux résultats obtenus à la question précédente.