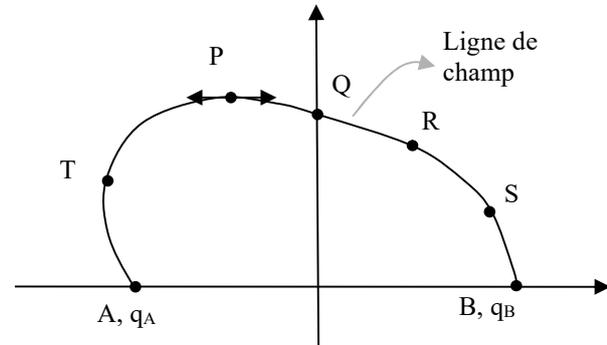


ELECTROMAGNETISME EN REGIME STATIQUE

Revoir les nombreux exos faits pendant l'année : ils tombent à l'oral !
 Revoir également tous les calculs classiques de champs électrostatiques
 (fil infini, plan infini, sphère...) et magnétostatiques (fil infini, nappe, solénoïde long).

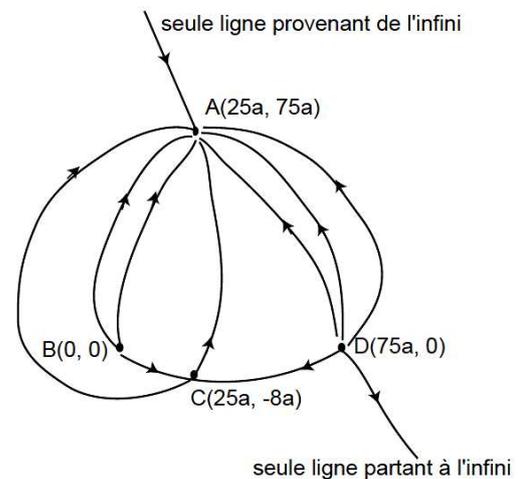
E-Mag 1 : Champ créé par deux charges. (CCINP)

Le schéma ci-contre représente une ligne de champ associée à l'ensemble des deux charges $\{q_A, q_B\}$, q_A étant supposée connue. Calculer q_B .



E-Mag 2 : Lignes de champ électrostatique. (Centrale)

- 1- Trois charges ponctuelles identiques sont placées aux sommets d'un triangle équilatéral : tracer sans calcul l'allure des lignes de champ.
- 2- On considère une distribution de charges supposées ponctuelles, toutes situées dans un même plan. On donne ci-contre la carte de champ associée, tracée dans le plan contenant les charges et où une ligne de champ de chaque type possible est représentée. Les coordonnées (x,y) de 4 points A, B, C et D sont indiquées, l'axe (Ox) étant horizontal et l'axe (Oy) vertical. Déterminer le nombre de charges présentes, leurs positions ainsi que leurs valeurs relatives.



E-Mag 3 : Electrification d'un barreau de plexiglas. (Extrait de Centrale 1)

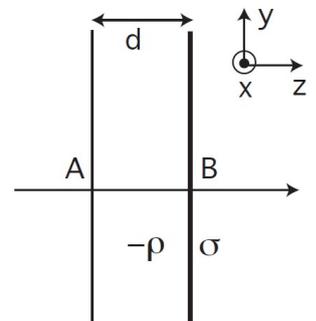
On frotte un barreau de plexiglas avec un chiffon pour le charger positivement.

Justifier qualitativement l'existence d'une charge Q_{max} que l'on ne peut excéder ; modéliser la situation, évaluer cette charge en ordre de grandeur ainsi que le champ électrostatique qui apparaît au voisinage du barreau.

E-Mag 4 : Calcul d'un champ électrostatique. (CCINP, Mines)

Le système ci-contre est constitué d'un bloc d'épaisseur d de densité volumique de charge $-\rho$ et d'une plaque de charge surfacique σ . L'ensemble est neutre et on suppose les effets de bord négligeables.

- 1- Déterminer le champ électrostatique dans tout l'espace, en fonction de ρ .
- 2- Déterminer la différence de potentiel entre les deux faces du bloc.



E-Mag 5: Etude d'une jonction PN. (CCINP, Mines)

Dans un repère cartésien (Oxyz), on s'intéresse à un dispositif modélisé par une densité volumique de charges ne dépendant que de x et uniforme dans 4 zones :

	$x \leq -a$	$-a \leq x \leq 0$	$0 \leq x \leq d$	$d \leq x$
ρ	0	$-\rho_a$	$+\rho_d$	0

- 1- A quelle condition l'ensemble est-il globalement neutre ? On suppose cela vérifié dans la suite.
- 2- Déterminer le champ électrique dans tout l'espace et le représenter.
- 3- Déterminer la différence de potentiel entre $x = -a$ et $x = d$.
- 4- Déterminer, après l'avoir définie, la capacité par unité de surface que l'on peut associer au dispositif.

E-Mag 6: Etude d'un dispositif cylindrique. (Centrale I)

- 1- On considère trois cylindres métalliques coaxiaux C_1 , C_2 et C_3 , longs et creux, de rayons respectifs notés R_1 , R_2 et R_3 . Leurs potentiels sont respectivement $V_1 = V_3 = 0$ et $V_2 > 0$. Calculer le champ et le potentiel électrostatique en tout point de l'espace.
- 2- Le cylindre est en réalité une grille et on admet que ceci ne change pas les résultats obtenus question 1. En outre, un filament métallique émet des électrons entre C_2 et C_3 . Décrire le mouvement de ces électrons.

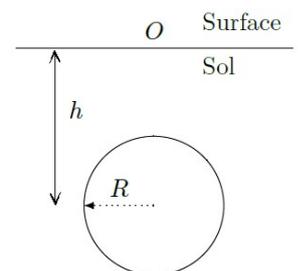
E-Mag 7: Champs électrique et gravitationnel à l'intérieur d'une cavité. (CCINP)

- 1- On considère une sphère de densité volumique de charge uniforme ρ , de centre O et de rayon R. Déterminer le champ électrique puis le potentiel électrique à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère. (L'expression du gradient en sphérique était rappelée.)
- 2- On suppose désormais que cette sphère contient une cavité sphérique vide de charge, de centre O' et de rayon a , vérifiant $OO' + a < R$. Calculer le champ électrique à l'intérieur de la cavité.
- 3- On considère désormais une sphère solide de densité volumique μ , ayant les mêmes caractéristiques spatiales que la sphère considérée précédemment. En utilisant les analogies entre l'électrostatique et de la gravitation, déduire le champ gravitationnel créé par cette structure dans la grotte.

E-Mag 8: Anomalie gravitationnelle. (Mines-Télécom)

On note g_0 l'intensité du champ de pesanteur normalement mesuré au niveau du sol et g_1 cette même valeur lorsqu'une météorite sphérique de rayon R est enfouie à une profondeur h dans le sous-sol.

Calculer l'anomalie gravitationnelle $g_1 - g_0$.



E-Mag 9: Potentiel de Yukawa. (CCINP, Mines)

On se place en coordonnées sphériques de centre O et on suppose que le potentiel en tout point de l'espace

est donné par la formule :
$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-\frac{r}{a}}}{r}$$

- 1- Calculer le champ électrostatique en tout point de l'espace puis son flux à travers une sphère de rayon r .
- 2- Calculer la densité volumique de charge en tout point de l'espace.
- 3- Montrer que cette situation résulte de la superposition de deux distributions de charges, de charges totales opposées, que l'on décrira.
- 4- Discuter le lien entre cette situation et le modèle quantique de l'atome d'hydrogène.

E-Mag 10: Environnement électrostatique d'un colloïde sphérique. (Mines)

Un formulaire donnant l'expression du laplacien en coordonnées sphériques est fourni.

On étudie une boule métallique de rayon a de potentiel uniforme noté V_0 , plongée dans une solution aqueuse contenant des cations de charge e et des anions de charge $-e$ dont les densités particulières sont respectivement notées n_+ et n_- . On étudie la façon dont ces ions sont distribués au voisinage de cette boule, ainsi qu'au potentiel électrostatique V associé à cette distribution (boule + ions qui l'entourent).

On considère que le problème est à symétrie sphérique et qu'à grande distance de la boule, le potentiel $V(r)$ tend vers zéro et les densités $n_+(r)$ et $n_-(r)$ tendent vers une valeur commune n_0 . La température est supposée uniforme et notée T .

1- En tout point de l'espace extérieur à la boule, exprimer la densité volumique de charges en fonction du potentiel, de n_0 , de la constante de Boltzmann k_B et de T .

2- Déterminer l'équation différentielle vérifiée par le potentiel $V(r)$.

3- Résoudre cette équation différentielle en supposant que V_0 est très faible devant $k_B T/e$. On pourra poser

$$V(r) = \frac{U(r)}{r}.$$

4- Interpréter le résultat obtenu et mettre en évidence une longueur D caractéristique du problème. Calculer D dans le cas de l'eau pure à $pH=7$ et commenter. On donne :

$$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}; \quad \varepsilon_r = 80; \quad e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}; \quad k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}; \quad T = 300 \text{ K}; \quad \mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23}.$$

E-Mag 11: Champ électrostatique dans un plasma, longueur de Debye. (tous concours)

Laplacien en coordonnées sphériques d'une fonction $f(r)$: $\Delta f(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \cdot f(r))}{\partial r^2}$

On considère un plasma d'argon contenant en moyenne et par unité de volume n_e électrons libres de masse m_e et de charge $-e$, $n_i = n_e$ ions Ar^+ de masse m_i et n_0 atomes Ar de masse m_0 .

On considère d'autre part que le plasma est en équilibre thermodynamique local, ce qui permet de définir la température dynamique T de ce plasma.

Considérons un ion argon Ar^+ particulier, placé en O , et pris comme origine. Du fait de l'attraction coulombienne, au voisinage de cet ion, on observe un surplus de charge négative, responsable d'un écart local à la neutralité globale du plasma. Soit $V(r)$ le potentiel qui règne en un point M situé à la distance r de l'ion Ar^+ situé en O (l'origine des potentiels est prise à l'infini). Les densités volumiques d'ions et d'électrons en M s'écrivent respectivement.

$$n_+ = n_e \exp\left(-\frac{eV(r)}{k_B T}\right) \quad \text{et} \quad n_- = n_e \exp\left(\frac{eV(r)}{k_B T}\right) \quad \text{avec } k_B \text{ constante de Boltzmann.}$$

1- Quelle(s) remarque(s) vous suggère(nt) les expressions de n_+ et n_- ? Quel nom donne-t-on habituellement à ces lois de distribution.

2a- Donner l'expression de la densité volumique totale de charges au point M pour $r \neq 0$

2b- Quelle est l'équation locale satisfaite en M par le potentiel $V(r)$?

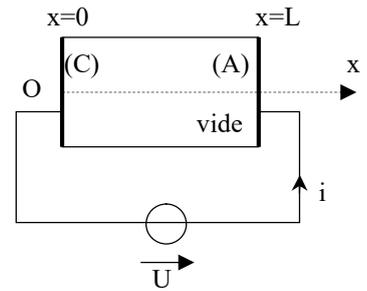
2c- On se place dorénavant dans l'hypothèse $eV(r) \ll k_B T$. Simplifier l'équation obtenue en 2b- et la résoudre en introduisant la fonction $u(r) = r \cdot V(r)$. On introduira pour cela deux constantes d'intégration A_1 et A_2 .

2d- On admet que $V(\infty) = 0$ et qu'au voisinage immédiat de l'ion Ar^+ , l'influence de sa charge, supposée ponctuelle, l'emporte sur celle des charges électroniques distribuées en volume. Déterminer les constantes A_1 et A_2 . Donner ensuite l'expression du potentiel $V(r)$ en fonction de e , ε_0 permittivité diélectrique du vide, r , et d'une distance λ_D (appelée longueur de Debye) que l'on explicitera en fonction de ε_0 , k_B , T , n_e et e . Commenter le résultat obtenu.

3- En déduire la densité volumique totale de charge $\rho_c(r)$ en $r \neq 0$, puis la charge totale $Q(r)$ (y compris la charge ponctuelle centrale) contenue dans une sphère de centre O et de rayon r en fonction de e , λ_D et r . Discuter les cas $r \rightarrow 0$ et $r \rightarrow \infty$. Conclure

E-Mag 12 : Diode à vide. (Centrale, ENS en version brutale)

On envisage le dispositif de la figure ci-dessous : une cathode (C) plaque métallique plane de surface S , est chauffée et émet des électrons dans un enceinte où règne un vide poussé ; ces électrons sont récupérés par une anode (A) identique à (C) et portée à un potentiel U positif par rapport à la cathode par un générateur de tension de fem U .



On étudie un régime stationnaire pour lequel on définit dans l'espace $0 \leq x \leq L$ entre les deux électrodes de même surface S la vitesse $v(x)$ d'un électron passant en un point d'abscisse x , le nombre volumique d'électrons $n^*(x)$ et le potentiel électrique $V(x)$, tel que $V(x=0) = 0$. On note I l'intensité du courant dans le circuit avec l'orientation indiquée sur la figure.

1- Trouver une relation entre $v(x)$ et $V(x)$ puis montrer que le potentiel suit une équation du type :

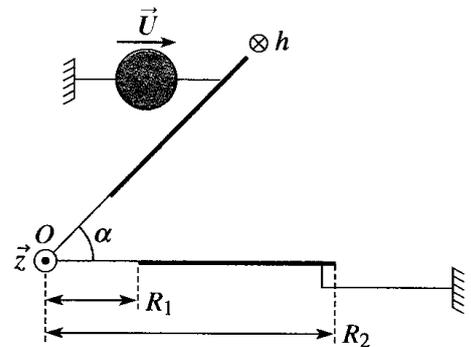
$$\frac{d^2V}{dx^2} = aV^{-\frac{1}{2}} \text{ puis chercher une solution de la forme } V(x) = \beta x^k.$$

2- Quelle est la caractéristique $U = f(I)$? Commenter.

3- Quelle durée met un électron pour passer de la cathode à l'anode ?

E-Mag 13 : Etude d'un condensateur diédrique.

On étudie un condensateur diédrique (schéma ci-contre), formé de deux armatures rectangulaires planes de hauteur h , de surface $S = h(R_2 - R_1)$, faisant un angle α entre elles. On néglige les effets de bord.



Calculer le potentiel et le champ à l'intérieur du condensateur, la densité surfacique de charges sur les plaques et en déduire la capacité du condensateur.

Retrouver l'expression de cette capacité en effectuant un calcul énergétique.

Expression du laplacien en coordonnées cylindriques :
$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

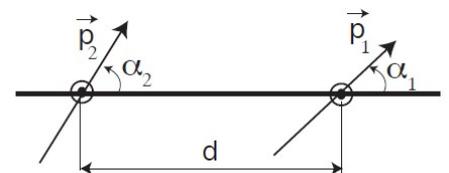
E-Mag 14 : Interaction entre deux dipôles. (Mines)

1- Montrer que le champ électrostatique créé en M par un dipôle de moment dipolaire \vec{p} situé en O se met sous

la forme :
$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{u})\vec{u} - \vec{p}}{r^3}$$
 avec $\vec{r} = r\vec{u}$ et donner

l'allure des lignes de champ.

En déduire l'énergie d'interaction des deux dipôles représentés ci-contre, dont les moments dipolaires \vec{p}_1 et \vec{p}_2 sont de même norme p .



2- Dans un repère cartésien $(Oxyz)$ où le demi espace $x > 0$ est vide et le demi espace $x < 0$ est occupé par un conducteur métallique de potentiel nul, on place une charge $+q$ au point $(a,0,0)$. On admet que, pour les grandeurs électrostatiques de tout le demi espace $x > 0$, la situation est équivalente à un espace entièrement vide (sans conducteur métallique) comportant deux charges $+q$ et $-q$ situées respectivement aux points $(a,0,0)$ et $(-a,0,0)$.

2a- Proposer une justification à cette équivalence (non posée le jour de l'épreuve).

2b- Donner l'allure des lignes de champ dans la première configuration.

2c- Toujours dans la première configuration, on conserve le conducteur métallique dans le demi espace $x < 0$ mais on enlève la charge q et on la remplace par un dipôle électrostatique, placé au point $(a,0,0)$ et dont le moment dipolaire fait un angle α avec l'axe (Ox) . Discuter l'équilibre et le mouvement du dipôle.

3- Donner des exemples de structures dipolaires.

E-Mag 15: Piège de Penning. (X, ENS ; les 1ères questions ont été posées à Centrale)

On considère une zone de l'espace vide de charges ou le potentiel électrostatique s'écrit :

$$V(x, y, z) = \alpha \cdot x^2 + \beta \cdot y^2 + \gamma \cdot z^2$$

- 1- Que peut-on dire sur α , β et γ ? On suppose en outre que le dispositif présente une symétrie de révolution autour de (Oz) . Que peut-on dire de plus ?
- 2- Peut-on piéger une particule dans cette zone de l'espace ?

On suppose désormais que le potentiel s'écrit : $V(x, y, z) = \alpha \cdot (x^2 + y^2 - 2z^2)$ avec $\alpha > 0$, et qu'il existe un champ magnétique uniforme colinéaire à (Oz) . On s'intéresse au mouvement d'une particule chargée de masse m et de charge $q < 0$.

- 3- Montrer que le mouvement selon l'axe (Oz) est une oscillation et en donner la fréquence. Effectuer l'application numérique dans le cas d'un électron ($m = 9.10^{-31} \text{kg}$; $e = 1,6.10^{-19} \text{C}$), avec $\alpha = 1000 \text{ V.cm}^{-2}$ et un champ magnétique de 1 tesla. On pourra s'appuyer sur ces valeurs numériques pour traiter la question suivante.
- 4- Déterminer les équations qui régissent $x(t)$ et $y(t)$. On introduira la pulsation ω_0 associée au mouvement d'oscillation selon (Oz) ainsi que la pulsation cyclotron ω_c de l'électron. Résoudre ces équations et montrer que le mouvement horizontal est une composition de deux mouvements circulaires uniformes de pulsations respectives $\omega_1 \approx \omega_0^2 / 2\omega_c$ et $\omega_2 \approx \omega_c$. Proposer une allure pour la trajectoire. L'électron a-t-il été piégé ?

E-Mag 16: Champs magnétique créé par un solénoïde conique. (CCINP, Mines)

On donne la norme B du champ magnétique en M sur l'axe (Oz) d'une spire circulaire de rayon R , en fonction de l'angle α sous lequel la spire est vue depuis

$$M \text{ (figure 1) : } B(M) = \|\vec{B}(M)\| = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha$$

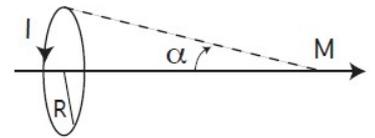


figure 1

- 1- Quels sont la direction et le sens du champ magnétique en un point M de coordonnée $z > 0$? Au point M' de coordonnée $z' = -z$?

Donner l'expression de $B(M)$ en fonction de la coordonnée z de M.

Discuter l'équivalence entre la spire et un dipôle magnétique à grande distance de O.

- 2- Des fils d'épaisseur $2a$ sont parcourus par un courant I et enroulés sur une portion de cône de sommet O et demi-angle au sommet α (figure 2).

- 2a- On découpe une tranche de ce cône correspondant à l'intervalle $[z ; z + dz]$ et on l'assimile à une unique spire de courant parcourue par un courant dI . Exprimer dI .

- 2b- En déduire le champ magnétique créé par le solénoïde conique en O en fonction de a , α , h , H , I et μ_0 .

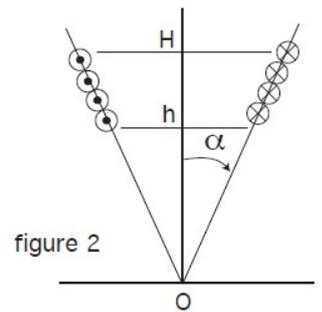


figure 2

- 3- On met tête bêche deux solénoïdes coniques comme le précédent (figure 3), le sommet O étant commun. Comment doit-on choisir le sens des courants pour que B soit maximal en O ? Donner l'expression du champ magnétique créé en O en fonction de a , α , h , H , I et μ_0 .

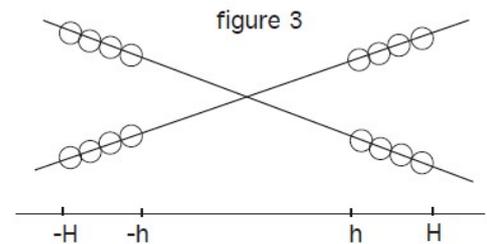


figure 3

- 4- Questions supplémentaires posées aux Mines : Déterminer la composante radiale du champ au voisinage de l'axe.

E-Mag 17: Champs magnétique créé par une sphère en rotation. (Mines)

Soit une sphère de centre O , de rayon R , de charge Q et de densité surfacique σ uniforme, qui tourne autour d'un axe fixe à la vitesse ω constante. On suppose que la rotation de la sphère n'a aucune incidence sur la répartition des charges.

Expliquer l'apparition d'un champ magnétique et calculer son intensité en O , puis à grande distance de la sphère.

On donne l'expression du champ magnétique créé par une spire circulaire de centre C et de rayon ρ en un point M quelconque de son axe : $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 i}{2\rho} \sin^3 \alpha \vec{e}_z$ où α est l'angle sous lequel la spire est vue depuis M .

Enoncé plus détaillé (et complété) :

On s'intéresse à une sphère creuse Σ de centre O et de rayon R , portant une charge totale Q uniformément répartie sur sa surface ; cette sphère tourne à la vitesse angulaire ω constante autour d'un de ses diamètres, choisi comme axe (Oz), que l'on oriente de façon que la rotation de la sphère se fasse dans le sens direct. On utilisera les coordonnées sphériques (r, θ, φ) d'axe (Oz).

- 1- En découpant la surface de Σ en bandes infinitésimales selon des plans $z = \text{constante}$, montrer que cette sphère chargée en rotation peut être considérée comme un ensemble de spires circulaires infinitésimales de même axe de révolution, chacune étant parcourue par un courant permanent infinitésimal dI . On montrera que le courant dI associé à une « spire » vue depuis O sous un angle θ , à $d\theta$ près, s'écrit : $dI = \frac{Q\omega}{4\pi} \sin \theta d\theta$.
- 2- En utilisant l'expression fournie du champ créé par une spire circulaire sur son axe, déduire de la question 1 l'expression du champ magnétique créé par Σ en son centre.
- 3- Calculer le champ magnétique créé par Σ en tout point M de l'espace suffisamment éloigné de O ; qu'entend-on par « suffisamment éloigné » ?
- 4- Dessiner l'allure de la carte de champ créée par Σ dans tout l'espace, en admettant que :
 - * Le champ est uniforme à l'intérieur de Σ .
 - * Le champ possède, en coordonnées sphériques, la même expression mathématique en tout point extérieur à Σ , quelle que soit la distance d'observation.
- 5- Le champ est-il continu à la traversée de la surface Σ ? Le cas échéant, déterminer la valeur de la discontinuité en tout point de Σ et commenter.

E-Mag 18 : Conducteur ohmique cylindrique. (CCINP, Mines, ici en version Mines)

On considère un cylindre métallique creux d'axe (Oz) dont les parois intérieure et extérieure, de rayons respectifs R_1 et R_2 , sont respectivement portées aux potentiels V_1 et V_2 . La hauteur h du cylindre est supposée très grande devant les rayons. On étudie la conduction dans le cylindre en régime permanent.

- 1- En appliquant le modèle de Drüde aux électrons de conduction, montrer que leur vitesse \vec{v} s'écrit : $\vec{v} = -\mu \vec{E}$.
 μ est appelé mobilité de l'électron.
En déduire que le métal suit la loi d'Ohm locale et exprimer sa conductivité électrique σ_0 en fonction de la mobilité μ des électrons, de leur densité particulière n et de leur charge e .
- 2- Calculer la résistance R_0 du cylindre métallique en fonction de σ_0 et des paramètres géométriques.
- 3- On applique maintenant au cylindre un champ magnétique uniforme de norme B dirigé selon l'axe (Oz).
Établir le lien existant entre le vecteur densité de courant \vec{j} et le champ électrique \vec{E} et dessiner la forme des lignes de champ de \vec{E} et de \vec{j} dans le cylindre. On effectuera une vue en coupe dans un plan $z = \text{constante}$.
- 4- Calculer la nouvelle résistance R du cylindre en fonction de R_0 , μ et B . Commenter.

ELECTROMAGNETISME EN REGIME VARIABLE (HORS ONDES)

Les exos d'électromagnétisme en régime variable qui ne portent pas spécifiquement sur les ondes sont quasiment toujours traités dans l'ARQS (et sauf condensateurs, il s'agit quasi toujours d'une ARQS magnétique) ; toutefois, analysez bien les énoncés car 1) cette hypothèse n'est pas toujours clairement indiquée même si elle s'impose et 2) certains exos doivent être traités hors ARQS.

Concernant l'ARQS magnétique, il faut connaître sur le bout des doigts le calcul du champ électrique induit dans le vide autour d'un solénoïde parcouru par un courant variable.

E-Mag 24 : Courant variable dans une plaque. (Centrale)

Une plaque métallique carrée centrée en O , de normale (Ox) , de conductivité σ , de côté a et d'épaisseur $e \ll a$, est parcourue par un courant $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$.

On s'intéresse à la densité volumique de courants dans cette plaque, qu'on suppose de la forme :

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \underline{J}(x) e^{j\omega t} \vec{u}_z \text{ en notation complexe, où } \underline{J}(x) \text{ est une fonction paire.}$$

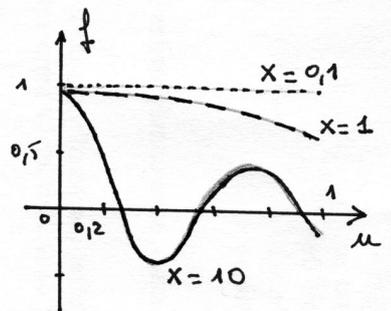
- 1- Donner les équations liant l'amplitude complexe du vecteur densité de courant à celles des champs électrique et magnétique dans la plaque.
- 2- En déduire l'équation différentielle vérifiée par la fonction $\underline{J}(x)$.
- 3- Déterminer une longueur δ caractéristique du problème et l'évaluer numériquement à 50 Hz, 5 kHz, 500 kHz et 50 MHz, sachant que $\sigma = 6.10^7 \text{ S.m}^{-1}$. Que peut-on en conclure ?
- 4- Déterminer la densité volumique de courant dans la plaque.

E-Mag 25 : Champ dans un condensateur en régime variable. (Mines)

Les armatures d'un condensateur plan sont des disques de rayon R et d'axe (Oz) , situés en $z = -e/2$ et $+e/2$. On applique à ses bornes une tension sinusoïdale haute fréquence, de pulsation ω , et on s'intéresse au champ électrique entre les deux armatures.

Un formulaire donnant les expressions en coordonnées cylindriques des opérateurs usuels de l'analyse vectorielles est fourni.

- 1- Déterminer l'équation locale vérifiée par le champ électrique.
- 2- On écrit le champ sous la forme : $\vec{E}(\vec{r}, t) = \underline{E}(r) \exp(j\omega t) \vec{u}_z$. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\underline{E}(r)$.
- 3- On pose : $\underline{E}(r) = \underline{E}_0 \times f(u)$ avec $\underline{E}_0 = \underline{E}(r=0)$ et $u = r/R$. Donner l'équation vérifiée par la fonction f en introduisant un paramètre adimensionné X dépendant de c , R et ω .
- 4- On cherche une solution en série entière : $f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n$
Déterminer a_0 et a_1 ainsi qu'une relation de récurrence liant a_n et a_{n+2} , puis conclure.
- 5- L'allure de la fonction f est donnée ci-contre pour trois valeurs de X . Commenter en faisant référence à l'ARQS.



E-Mag 26: Courant variable au sein d'un fil électrique.

Un conducteur ohmique de conductivité γ , cylindrique d'axe (Oz) et de rayon R , est parcouru par un courant $I(t)$ basse fréquence de la forme : $I(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$.

On suppose que le vecteur densité de courant s'écrit, en notation complexe et en coordonnées cylindriques d'axe (Oz) : $\underline{\vec{J}} = \underline{J}_0(r) \exp(j\omega t) \vec{u}_z$ avec un choix d'origine des temps tel que : $\underline{J}_0(r=0) = J_0 \in \mathbb{R}$.

1- Commenter cette expression et en proposer une justification qualitative. Peut-on prévoir l'allure de la fonction $|\underline{J}_0(r)|$?

2- Déterminer les expressions complexes des champ électrique et magnétique en fonction de $|\underline{J}_0(r)|$. En déduire

que $|\underline{J}_0(r)|$ vérifie l'équation différentielle : $\frac{d^2 \underline{J}_0}{dr^2}(r) + \frac{1}{r} \frac{d\underline{J}_0}{dr}(r) - j\mu_0 \gamma \omega \underline{J}_0(r) = 0$

3- A partir des équations de Maxwell, déterminer une équation différentielle vérifiée par $\underline{\vec{J}}$ et retrouver l'équation ci-dessus.

4- On sait qu'une telle équation différentielle admet une solution développable en série entière et on admet que cette solution est l'unique solution du problème. On pose donc : $\underline{J}_0(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{r}{R}\right)^n$

Déterminer les coefficients a_0 , a_1 et a_2 en fonction des données et du coefficient J_0 (que l'on en cherchera pas à déterminer pour le moment). On fera apparaître la quantité $\frac{\mu_0 \gamma \omega R^2}{4}$ que l'on notera α .

Donner un ordre de grandeur de α pour un courant industriel parcourant un fil de cuivre.

5- On suppose qu'on peut approcher la solution de façon satisfaisante en limitant la somme à $n \leq 2$. Proposer une explication puis décrire et commenter la distribution des courants au sein du fil.

6- Déterminer le lien entre J_0 et I_m , ainsi que la valeur de la phase ϕ intervenant dans l'expression de $I(t)$.

Formulaire, en coordonnées cylindriques :

$$\text{div} \vec{G} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rG_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial G_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial G_z}{\partial z}$$

$$\text{rot} \vec{G} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial G_z}{\partial \theta} - \frac{\partial G_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial G_r}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rG_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial G_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

E-Mag 27: Champ dans un solénoïde. (Centrale)

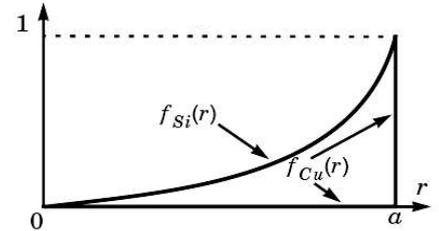
On remplit l'intérieur d'un solénoïde long de rayon a par un cylindre conducteur (cuivre) ou semi-conducteur (silicium) de conductivité γ . Le solénoïde est formé de n spires par unité de longueur et parcouru par un courant électrique $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ sinusoïdal de fréquence 100 kHz. On utilise la notation complexe et on cherche les champs électrique et magnétique qui règnent à l'intérieur du solénoïde sous la forme : $\underline{\vec{B}}(\vec{r}, t) = \underline{B}(r) \exp(j\omega t) \vec{u}_z$ et $\underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \underline{E}(r) \exp(j\omega t) \vec{u}_\theta$

Pour les applications numériques on prendra :

$$a = 15 \text{ cm} ; \gamma_{\text{Cu}} = 6,0 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1} ; \gamma_{\text{Si}} = 1,0 \cdot 10^3 \text{ S.m}^{-1} ; \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}.$$

Un formulaire donnant les expressions en coordonnées cylindriques des opérateurs gradient, divergence et rotationnel, est fourni.

- 1- Montrer que l'on peut effectuer l'étude dans l'ARQS. Rappeler l'expression du champ magnétique créé par le solénoïde. Pourquoi le champ magnétique à l'intérieur du cylindre métallique ne peut-il pas être assimilé à ce champ ?
- 2- Déterminer les 2 équations différentielles du 1^{er} ordre satisfaites par $\underline{E}(r)$ et $\underline{B}(r)$. Montrer que, hors ARQS, ces équations sont encore valables.
- 3- Déterminer les équations différentielles satisfaites indépendamment par $\underline{E}(r)$ et $\underline{B}(r)$. On fera apparaître une longueur caractéristique que l'on notera λ et que l'on évaluera numériquement.



- 4- Une résolution numérique de l'équation sur $\underline{E}(r)$ permet de tracer $f(r) = |\underline{E}(r)| / |\underline{E}(a)|$ pour les barreaux de cuivre et de silicium (voir ci-contre). Expliquer qualitativement ces courbes et interpréter le rôle de la constante λ .

- 5- Dans le barreau de cuivre, on modélise maintenant la répartition des

courants volumiques de la façon suivante :

$$r < a - \lambda \quad \vec{j} = \vec{0}$$

$$a - \lambda < r < a \quad \vec{j} = j_0(t) \vec{e}_\theta$$
 où $j_0(t)$ est une fonction réelle

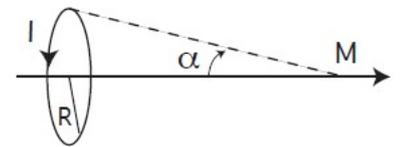
5a- Déterminer $j_0(t)$ en fonction de I_0 , n , λ et ω .

5b- Exprimer la puissance moyenne dissipée sur une hauteur h du barreau, en fonction de I_0 , n , γ , μ_0 et ω . Exprimer de même le flux entrant du vecteur de Poynting sur cette hauteur h et commenter.

E-Mag 28: Courants de Foucault. (CCINP pour les questions 1 à 3)

On donne la norme B du champ magnétique en M sur l'axe (Oz) d'une spire circulaire de rayon R , en fonction de l'angle α sous lequel la spire est vue

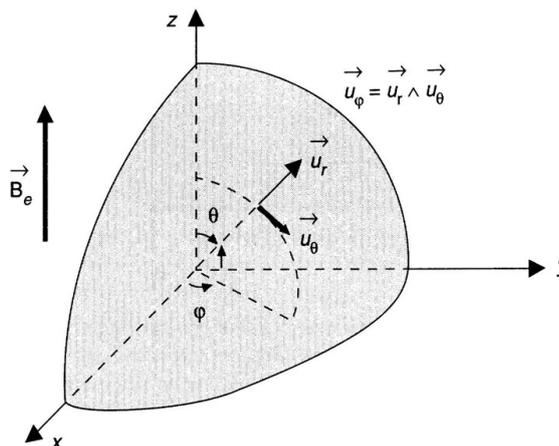
depuis M (figure ci-contre) : $B(M) = \|\vec{B}(M)\| = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha$



Une sphère pleine S de rayon a « petit », constituée d'un métal ohmique de conductivité σ est soumise à un champ magnétique extérieur uniforme et variant dans le temps de façon sinusoïdale avec une fréquence $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ du domaine

des fréquences industrielles : $\vec{B}_e = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$

- 1- Expliquer qualitativement pourquoi, dans une hypothèse où la fréquence du courant industriel (50 Hz) est jugée « faible », il peut être légitime de confondre le champ magnétique totale \vec{B} en un point de S avec le champ extérieur \vec{B}_e .

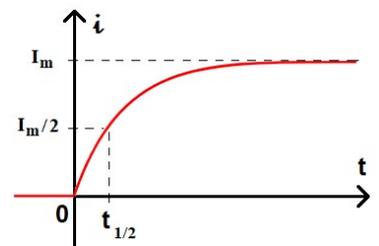


- 2- Dans le cadre de l'hypothèse précédente, donner l'expression de la densité de courant \vec{j} à l'instant t en un point S repéré par des coordonnées sphériques (r, θ, φ)
 - 3- En déduire la puissance moyenne $\langle P \rangle$ dissipé dans S .
 - 4- Evaluer le champ magnétique \vec{B}_1 créé au centre O de S par la distribution de courants calculée en 2-.
 - 5- Déduire du résultat précédent un critère permettant de préciser le domaine de validité de l'approximation faite à la question 1- et montrer que ce critère s'exprime très simplement si l'on introduit l'épaisseur de peau δ du métal pour un champ de pulsation ω , grandeur donnée par l'expression : $\delta^2 = \frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}$.
- Conclure numériquement pour ce qui est des dimensions de S .

E-Mag 29 : Etude d'un câble coaxial (1). (Mines)

On considère un câble coaxial dont l'âme est modélisée par un cylindre métallique de rayon $a_1 = 2,5$ mm et de conductivité γ , et la gaine par un cylindre métallique creux de rayon $2a_1$ et de conductivité γ' supposée très grande devant γ .

Une extrémité du câble est reliée à un générateur et l'autre est court-circuitée par un fil de résistance négligeable. Le générateur est d'abord éteint puis, à un instant choisi comme origine des temps, on l'allume. On observe alors, à l'aide d'un oscilloscope numérique, l'évolution de l'intensité qui parcourt le circuit ; l'oscillogramme obtenu a l'allure ci-contre où la mesure de $t_{1/2}$ donne $10,7 \mu\text{s}$.



- 1- Effectuer un schéma du montage et des branchements de l'oscilloscope. Puis, en s'aidant des résultats expérimentaux, proposer une interprétation du phénomène physique et modéliser le dispositif étudié par un circuit simple mettant en jeu des composants du type R, L, C.
- 2- En considérant la densité de courant uniforme dans l'âme du câble, proposer un calcul conduisant à une détermination la conductivité électrique γ de l'âme.
- 3- Discuter l'influence de a_1 sur la valeur de $t_{1/2}$.
- 4- Question supplémentaire : Est-il raisonnable de négliger la résistance électrique du fil dans cette expérience ?

Exercices mêlant mécanique et électromagnétisme en régime variable

E-Mag 30 : Principe du béatatron. (Mines)

Des électrons sont injectés dans un tore circulaire de rayon moyen r_0 et de rayon intérieur négligeable, où règne un champ magnétique modélisable sous la forme : $\vec{B}(\vec{r}, t) = B(r) \cos(\omega t) \vec{u}_z$

On note : $F(r) = \int_0^r x B(x) dx$.

- 1- Déterminer à quelle condition l'électron peut suivre une trajectoire circulaire,
- 2- Pour simplifier on suppose que les dépendances spatiales du champ sont approximativement de la forme :

$$\begin{cases} B(r > r_0) = B_0 \\ B(r < r_0) = \frac{5}{2} B_0 \end{cases} \text{ puis } \begin{cases} B(r > r_0) = \frac{5}{2} B_0 \\ B(r < r_0) = B_0 \end{cases}$$

Déterminer dans chaque cas si une trajectoire circulaire est possible et, le cas échéant, déterminer le rayon de la trajectoire ainsi que l'équation du mouvement.

- 3- Discuter la possibilité d'accélérer l'électron en lui faisant effectuer un tour.

E-Mag 31 : Mouvement d'une charge à l'intérieur d'un solénoïde. (Centrale 2)

Un formulaire d'analyse vectorielle est disponible.

On considère un solénoïde long, d'inductance L et de résistance R , ayant n spires par unité de longueur. Ce solénoïde est alimenté par un générateur continu de fém E que l'on allume à $t = 0$.

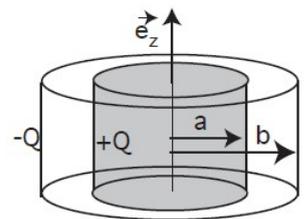
- 1- Calculer le courant $i(t)$ parcourant le solénoïde.
- 2- Exprimer le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde.
- 3- A partir d'une équation de Maxwell, montrer que le champ électrique est non nul à l'intérieur du solénoïde et le calculer. On proposera deux méthodes pour ce calcul.
- 4- On s'intéresse maintenant au mouvement d'une charge initialement située à l'intérieur du solénoïde. Ecrire les équations du mouvement de cette charge en coordonnées cylindriques.
- 5- Montrer que la vitesse axiale de la charge est constante et qu'il existe une constante du mouvement de la forme $r^2 \left(\dot{\theta} + \alpha \frac{B}{2m} \right)$, où la constante est à déterminer.
- 6- En déduire une équation différentielle sur la seule variable $r(t)$.
- 7- Un programme python est fourni avec un code permettant d'intégrer des équations différentielles. Utiliser le programme pour discuter la trajectoire observée.

E-Mag 32 : Mouvement d'une charge à l'extérieur d'une bobine. (Centrale 1)

- 1- Énoncer et redémontrer le théorème d'Ampère.
- 2- Donner sans démonstration la formule du champ magnétique à l'intérieur d'une bobine parcourue par un courant constant, en négligeant les effets de bord.
- 3- Démontrer la formule :
$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$
- 4- On suppose que la bobine est parcourue par un courant constant qui est brutalement coupé à un instant pris comme origine. On s'intéresse alors à une charge q située à l'extérieur de la bobine, initialement immobile.
 - 4a- Décrire qualitativement le mouvement de la charge.
 - 4b- Déterminer la quantité de mouvement de la charge après extinction totale du courant. Commenter.

E-Mag 33 : Mise en mouvement d'un condensateur. (Mines, X)

On considère un condensateur cylindrique de hauteur h , de rayons intérieur et extérieur a et b , et de moment d'inertie J par rapport à son axe de symétrie (Oz), autour duquel il est susceptible de tourner sans frottements. Ce condensateur est chargé avec une charge Q et il est plongé dans un champ magnétique uniforme de norme B_0 dirigé selon (Oz).

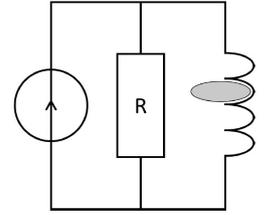


- 1- On suppose tout d'abord que l'espace inter-armatures est parfaitement isolant et qu'on annule progressivement le champ magnétique en une durée τ . On constate alors une mise en rotation du condensateur autour de l'axe (Oz).
Expliquer le phénomène observé et calculer le moment cinétique acquis par le condensateur au cours de cette opération.
- 2- On suppose maintenant que le champ magnétique est maintenu constant mais que l'espace inter-armatures n'est plus parfaitement isolant. Le condensateur se décharge alors en une durée τ' . On constate à nouveau une mise en rotation du condensateur autour de l'axe (Oz).
Expliquer le phénomène observé et calculer à nouveau le moment cinétique acquis par le condensateur au cours de cette opération.
- 3- En quoi ces mouvements de rotation peuvent-ils sembler paradoxaux ? Que nous apprennent ces deux expériences sur les propriétés du champ électromagnétique ?

E-Mag 34 : Mise en mouvement d'un disque. (*Mines, variante de la question 1 de l'exercice précédent*)

On étudie le circuit ci-contre formé d'un générateur, d'une résistance et d'une bobine. On a placé dans la bobine une plaque isolante chargée positivement, libre de tourner sans frottement autour du même axe que la bobine.

On coupe le générateur et la plaque se met à tourner. Pourquoi ? Dans quel sens la plaque tourne-t-elle ? Cela vérifie-t-il la loi de Lenz ? Calculer la vitesse angulaire finale de la plaque.



E-Mag 35 : Mise en rotation d'une sphère. (*Variante plus difficile de l'exercice 33, posée jadis aux Mines, aujourd'hui niveau X*)

On considère une sphère conductrice de rayon R et de moment d'inertie J par rapport à un axe vertical autour duquel elle est susceptible de tourner sans frottements. La sphère porte initialement une charge Q uniformément répartie en surface et est plongée dans un champ magnétique uniforme vertical ascendant de norme B_0 . On étudie ci-dessous deux situations différentes associées à cette même condition initiale.

- 1- On suppose tout d'abord que la sphère est isolante et que l'on annule progressivement le champ magnétique. On constate alors une mise en rotation de la sphère autour de l'axe vertical. Expliquer le phénomène observé et montrer que la vitesse angulaire finale atteinte par la sphère s'écrit : $\Omega = \frac{\alpha QR^2 B_0}{J}$. On donnera la valeur de α et on précisera le sens de rotation.
- 2- On suppose maintenant que la sphère est conductrice et que l'on relie son pôle sud à la Terre par un fil. On constate alors que la sphère se décharge lentement et se met en rotation autour de l'axe vertical. Montrer que quand elle est totalement déchargée, la sphère a atteint la même vitesse angulaire que dans la première expérience.
- 3- En quoi ces mouvements de rotation peuvent-ils sembler paradoxaux ? Que nous apprennent ces deux expériences sur les propriétés du champ électromagnétique ?

On donne l'aire d'une calotte sphérique de rayon R et de demi-angle au sommet α : $S_\alpha = 2\pi R^2 (1 - \cos\alpha)$.

INDUCTION AU SEIN D'UN CIRCUIT FILIFORME

Revoir impérativement les exercices de révision d'induction distribués pendant l'année : ils sont quasiment tous tombés à l'oral ces dernières années !!!

Revoir en détails tous les aspects concernant les rails de Laplace, avec ou sans générateur, ceux- conduisent à une multitude d'exercices à tous les concours.

Questions de cours :

- Circuit fixe dans un champ magnétique variable.
- Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire.
- Conversion de puissance mécanique en puissance électrique : rail de Laplace.

Ind 1 : Induction mutuelle entre deux solénoïdes. (Centrale)

On souhaite déterminer expérimentalement l'inductance mutuelle de deux bobines coaxiales dont les centres sont espacés d'une distance d . L'inductance propre des bobines est de 10 mH et leur résistance de quelques ohms.

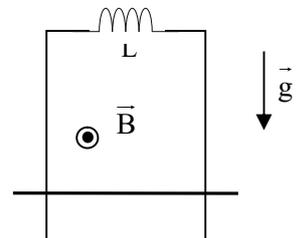
Pour cela, on branche la 1^{ère} en série avec une résistance de 100 ohms et un générateur idéal de tension délivrant un signal triangulaire de 1,41 V crête-crête et de fréquence 100 Hz ; on observe à l'oscilloscope ce signal triangulaire ainsi que la tension aux bornes de la seconde bobine, celle-ci étant uniquement reliée à l'oscilloscope.

Faire le schéma du montage et expliquer ce que l'on voit à l'oscilloscope, puis déterminer la mutuelle sachant que la tension crête-crête mesurée aux bornes de la seconde bobine est de 0,043 V.

Ind 2 : Rail de Laplace vertical. (Mines-Télécom, CCINP)

On considère une tige de longueur l , de masse m et de résistance électrique R . Cette tige est mobile sans frottement le long d'un circuit vertical contenant une inductance L . Il y a un champ magnétique \vec{B} perpendiculaire au plan du circuit. La tige est lâchée sans vitesse initiale.

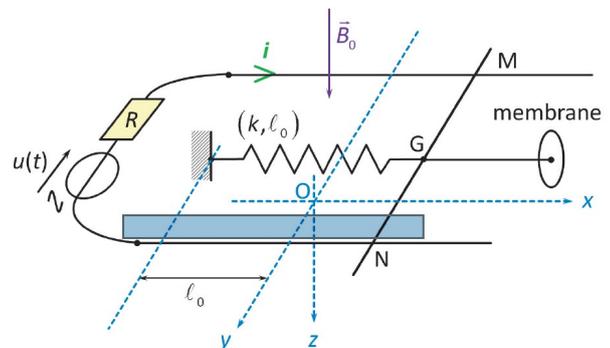
- 1- Etablir les deux équations différentielles couplées régissant v la vitesse de la tige et i l'intensité dans le circuit électrique.
- 2- En déduire les allures de $i(t)$ et $v(t)$
- 3- A partir des deux équations couplées, établir une équation bilan d'énergie.
Commenter le régime stationnaire.



Ind 3 : Etude d'un haut-parleur. (Version « nouveau programme » d'un exo des Mines)

On modélise un haut-parleur par un dispositif de type rail de Laplace avec générateur, dont les caractéristiques sont les suivantes (voir la figure ci-contre) :

- Le générateur alimentant le rail possède une f.é.m. sinusoïdale $u(t) = U_m \cos(\omega t)$ et une résistance interne R .
- Le rail est formé de deux barres métalliques parallèles, distantes d'une longueur l , chacune de résistance négligeable devant R .
- La tige, de longueur légèrement supérieure à l , de résistance r et de masse m , est mobile en translation le long du rail, sans frottements de contact. Elle est solidaire d'une membrane ayant une surface suffisante pour rayonner une onde sonore dans l'air lorsqu'elle vibre. La masse de cette membrane est négligeable devant m .



- Du fait de la friction de l'air sur la membrane dont elle est solidaire, la tige subit l'équivalent d'une force de frottement fluide proportionnelle à sa vitesse via un coefficient h (défini positif) qui dépend de la forme et de la taille de la membrane.
- Enfin, la tige est attachée, en son barycentre, à un ressort est de raideur k . Ce barycentre est repéré par son abscisse x le long du rail, supposée nulle lorsque le ressort est au repos.
- L'ensemble est plongé dans un champ magnétique stationnaire et approximativement uniforme, de norme B_0 et dirigé verticalement vers le bas.

1- Déterminer le système d'équations électromécaniques régissant ce dispositif. On prendra en compte l'auto-induction au sein de l'ensemble du circuit, dont l'inductance propre sera notée L .

2- Montrer qu'il existe une fonction E telle que : $\frac{dE}{dt} = ui - hv^2 - (R + r)i^2$, donner la signification des différents termes et interpréter cette relation.

Définir et exprimer le rendement énergétique du haut-parleur.

3- En utilisant la notation complexe, montrer qu'en régime permanent sinusoïdal, la vitesse de la tige et la *f.é.m.* du générateur sont liées par une relation de la forme : $\frac{v}{u} = -\frac{\alpha}{\alpha^2 + (R + r + jL\omega)(h + j(m\omega - k/\omega))}$

où le coefficient α sera exprimé en fonction des données.

4- Pourquoi cette quantité peut-elle être *a priori* qualifiée de « fonction de transfert » du haut-parleur ? Quelle caractéristique devrait avoir cette fonction de transfert pour que le haut-parleur émette un signal sonore reproduisant fidèlement le signal électrique d'entrée ?

5- En utilisant des valeurs typiques pour de petits haut-parleurs du commerce, le diagramme de Bode du gain associé à cette fonction de transfert est celui de la figure *a* ci-dessous (tracé numériquement). Commentez l'allure de ce diagramme, en expliquant si elle vous semble conforme à ce que l'on attend d'un bon haut-parleur.

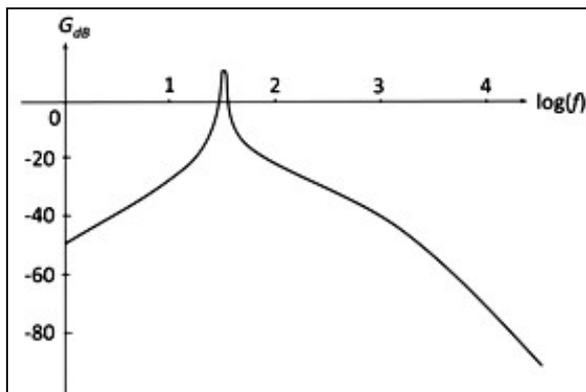


Fig a. Diagramme de Bode du gain associé à la fonction de transfert intensité-vitesse d'un haut-parleur possédant les caractéristiques suivantes :

$$m = 10 \text{ g} ; k = 1,2 \cdot 10^3 \text{ N/m} ; h = 1,4 \text{ kg/s}$$

$$R + r = 7 \Omega ; L = 0,4 \text{ mH} ; B_0 l = 4,4 \text{ T}\cdot\text{m}$$

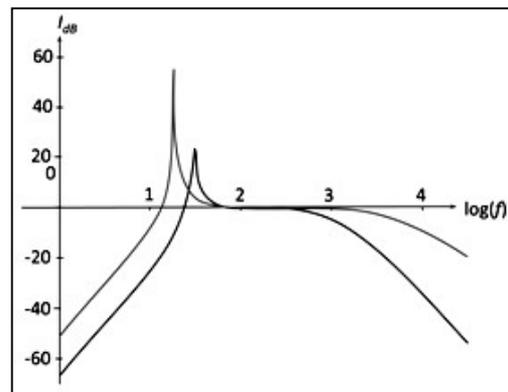


Fig b. Intensité sonore I (en dB), émise par le haut-parleur en fonction du log de la fréquence. La courbe en rouge correspond au haut-parleur de la figure précédente, la courbe en bleu à un haut-parleur de caractéristiques légèrement différentes. On a fixé arbitrairement un gain de 0 dB à 250 Hz.

6- En réalité l'analyse de la fonction de transfert précédente n'est pas pertinente car, outre la conversion électromécanique, il faut prendre en compte l'efficacité du rayonnement de la membrane, qui dépend elle aussi de la fréquence. La courbe la plus sombre de la figure *b* représente l'intensité de l'onde sonore émise par le haut-parleur précédent en fonction de la fréquence, pour une amplitude fixe de la *f.é.m.* d'alimentation ; elle résulte d'un calcul basé sur une modélisation simple du rayonnement de la membrane.

a- Commentez l'allure de ce nouveau diagramme en précisant, le cas échéant, dans quel domaine fréquentiel ce haut-parleur doit être utilisé. À votre avis, pourquoi les enceintes de bonne qualité sont-elles formées de plusieurs haut-parleurs différents ?

b- Les constructeurs choisissent volontairement les paramètres du dispositif afin d'obtenir une fréquence de résonance la plus basse possible. Quel est l'intérêt de ce choix ?

c- La courbe claire de la figure *b* correspond à un second haut-parleur de caractéristiques légèrement différentes du précédent. Comment se distinguent ces deux haut-parleurs ? Lequel vous semble le plus intéressant ?

7- On s'intéresse maintenant aux propriétés purement électrocinétiques du haut-parleur.

a- Montrer que le courant circulant dans le haut-parleur est lié à la *f.é.m.* par une relation de la forme :

$$\frac{u}{i} = R + r + jL\omega + \underline{Z}_m(\omega)$$

\underline{Z}_m sera exprimée en fonction des données.

b- Proposer un nouveau schéma électrique équivalent pour le circuit. Comment expliquer que la quantité \underline{Z}_m soit appelée "*impédance motionnelle*" du haut-parleur ?

c- Existe-t-il une association de dipôles simples dont l'impédance équivalente serait \underline{Z}_m ? Conclure.

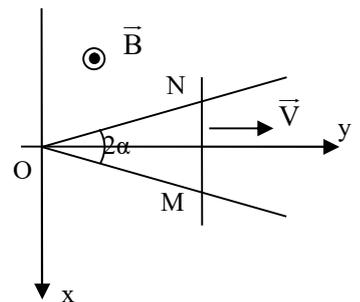
Ind 4 : Rail de Laplace bizarre. (CCINP)

Deux barres conductrices sont sécantes en O et symétriques par rapport à l'axe (Oy) . On place sur ces deux barres une barre conductrice parallèle à (Ox) qui se déplace à vitesse constante le long de (Oy) , sous un champ magnétique vertical constant.

1- Calculer la force électromotrice induite. Quel est le sens du courant induit i ?

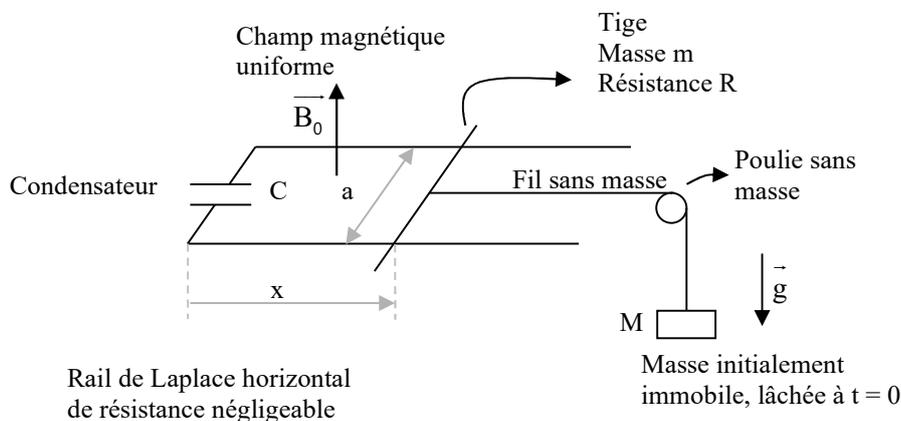
2- La résistance totale R du circuit est proportionnelle à sa longueur, la résistance par unité de longueur des barres étant notée k . Exprimer i en fonction de B , α , v et k .

3- Sachant qu'un opérateur déplace la barre, faire un bilan d'énergie et déterminer la puissance fournie par l'opérateur.



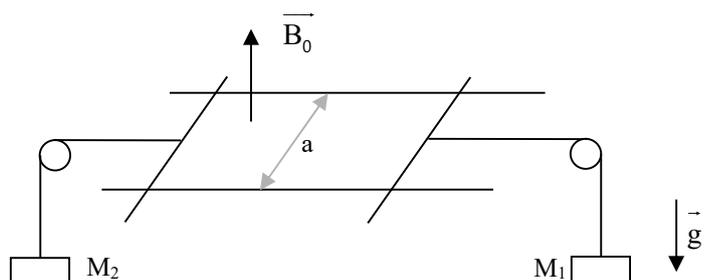
Ind 5 : Rail de Laplace . (CCINP)

Etudier le mouvement de la barre posée sur le rail de Laplace dans le dispositif ci-dessous. On négligera tout frottement.



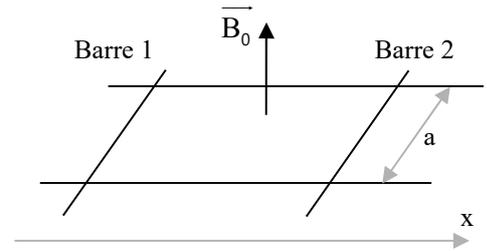
Note : Cet exercice existe aussi avec un générateur à la place du condensateur, l'objectif étant de tracter la masse M.

Il a également été posé aux Mines en version « 2 barres » (schéma ci-contre). Un exercice avec 2 barres est proposé plus loin.



Ind 6 : Rail de Laplace avec 2 barres. (Mines)

On s'intéresse à un rail de Laplace horizontal de largeur a , ouvert à ses deux extrémités, sur lequel sont posées deux barres de même masse m et de même résistance R supposée très grande devant la résistance du rail (schéma ci-contre). L'ensemble baigne dans un champ magnétique uniforme et constant, dirigé selon la verticale ascendante.



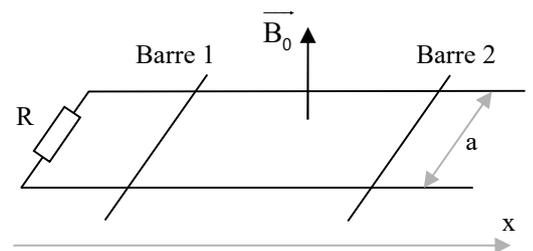
À l'instant initial, la barre n°1 est immobile et la barre n°2 est lancée vers la barre n°1 avec une vitesse v_0 . On suppose que les deux barres restent en permanence perpendiculaires au rail et on les repère par leurs abscisses respectives x_1 et x_2 le long du rail. On néglige tout frottement et tout phénomène d'auto-induction.

- 1- En supposant que les deux barres ne vont pas se percuter au cours de l'expérience (hypothèse H), déterminer l'évolution temporelle du système.
- 2- À quelle condition l'hypothèse H est-elle vérifiée ?
- 3- Lorsque l'hypothèse H n'est pas vérifiée, il y a un "choc" entre les deux barres. En supposant que ce choc est élastique (se fait sans perte d'énergie cinétique), discuter qualitativement le mouvement ultérieur (on ne demande pas de calcul complet).

Ind 7 : Poursuite de tiges. (Centrale 2) Voir énoncé annexe.

Ind 8 : Rail de Laplace avec plusieurs barres. (Version alternative de l'exo précédent)

On s'intéresse à un rail de Laplace horizontal de largeur a , ouvert à une extrémité et fermé à l'autre extrémité par une résistance R très grande devant la résistance du rail (schéma ci-contre). Sur ce rail sont posées deux barres de même masse m et de même résistance R et l'ensemble baigne dans un champ magnétique permanent et uniforme de norme B , dirigé selon la verticale descendante.



À l'instant initial, la barre n°2 est immobile et la barre n°1 est lancée vers la droite avec une vitesse v_0 . On suppose que les deux barres restent en permanence perpendiculaires au rail et on néglige tout frottement ainsi que tout phénomène d'auto-induction.

- 1- Décrire qualitativement le mouvement qui observé.
- 2- On suppose temporairement la barre n°1 est seule sur le rail (absence de barre n°2). Le circuit étant orienté dans le sens direct par rapport au champ magnétique, montrer par deux méthodes, dont une méthode basée sur un bilan énergétique, que la $fém$ induite « dans la barre n°1 » s'écrit : $e_1 = -B.a.v_1$ où est v_1 est la vitesse de cette barre selon l'axe (Ox) représenté sur la figure.
- 3- En vous basant sur l'expression de la $fém$ qui découle du bilan énergétique, montrer que cette $fém$ peut aussi s'écrire :
$$e_1 = \int_{P \in \text{barre n}^\circ 1} (\vec{v}_1 \wedge \vec{B}(P)) \cdot d\vec{l}_p$$

Quelle est la dimension du terme $\vec{v}_1 \wedge \vec{B}(P)$?

On admet que cette $fém$ e_1 est localisée dans la barre 1 et que son l'expression ci-dessus reste vraie en présence de la barre n°2.

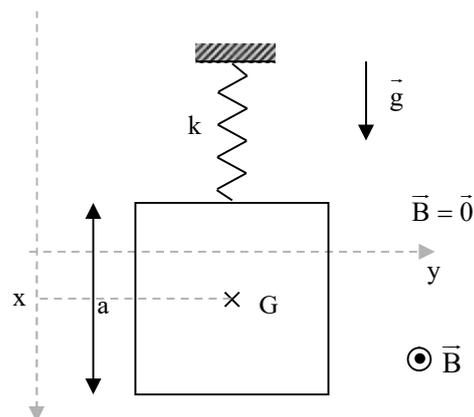
- 4- La barre n°2 étant présente, schématiser le circuit électrique équivalent au dispositif puis déterminer le système d'équations différentielles couplées vérifié par les vitesses v_1 et v_2 des barres. Le résoudre et calculer les déplacements des 2 barres au cours de l'ensemble de l'évolution.
- 5- Calculer l'énergie dissipée par effet Joule au cours de l'ensemble de l'évolution.

Ind 9 : Cadre suspendu à un ressort. (Mines)

On considère un cadre de cuivre filiforme suspendu à un bâti par un ressort de raideur k . Le cadre est carré, de côté a , de centre G , de masse m et de résistance R . On repère G le long d'un axe (Ox) vertical descendant, dont l'origine est choisie à hauteur de la position d'équilibre du cadre.

Un champ magnétique uniforme et stationnaire, de norme B et de direction normale au plan du cadre, règne dans le demi espace $x > 0$.

A l'instant initial, on descend le cadre vers le bas d'une distance $a/2$.

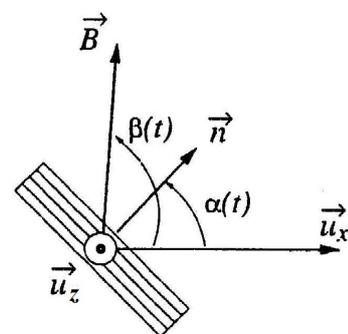


- 1- Déterminer l'équation différentielle du mouvement et effectuer un bilan de puissance.
- 2- Comment mesurer B en utilisant ce dispositif ?
- 3- On suppose maintenant que le bâti subit une perturbation extérieure sinusoïdale. Cette perturbation est-elle mesurable à l'aide de ce dispositif ?

Ind 10 : Moteur asynchrone. (Mines)

L'espace étant rapporté à un trièdre $(Oxyz)$, on s'intéresse à une bobine plate de N spires, de surface S , d'inductance L et de résistance R , en rotation à la vitesse angulaire Ω autour de l'axe (Oz) , confondu avec un de ses diamètres. On repère cette bobine par sa normale \vec{n} et on pose : $(\vec{u}_x, \vec{n}) = \alpha(t) = \Omega t$.

Le dispositif est plongé dans un champ magnétique uniforme de norme B constante, tournant à la vitesse angulaire Ω' autour de (Oz) , c'est-à-dire de direction variable telle que : $(\vec{u}_x, \vec{B}) = \beta(t) = \Omega' t$.



- 1- Justifier qualitativement l'existence d'un couple subi par la bobine.
Que vaut ce couple si $\Omega = \Omega'$? On suppose par la suite que $\Omega \neq \Omega'$.
- 2- Exprimer le flux magnétique ϕ à travers la bobine en fonction de $\phi_0 = BNS$ et de $\omega = \Omega' - \Omega$.
- 3- Justifier sans calcul que le courant parcourant la bobine peut s'écrire : $i(t) = I \cos(\omega t + \varphi)$
puis exprimer son amplitude complexe \underline{I} en fonction de L , R , ϕ_0 et ω .
- 4- Exprimer le couple instantané $\vec{\Gamma} = \Gamma \vec{u}_z$ s'exerçant sur la bobine, puis sa valeur moyenne $\langle \Gamma \rangle$. Tracer $\langle \Gamma \rangle$ en fonction de ω et discuter le fonctionnement du moteur.

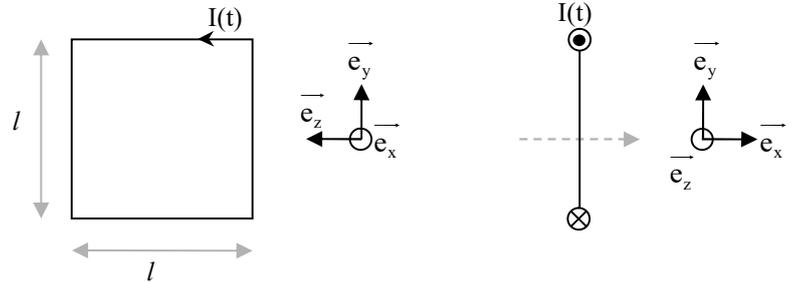
Ce moteur asynchrone est le parfait analogue en rotation du moteur linéaire étudié en DM pendant l'année ! Il ne doit pas être confondu avec le moteur synchrone vu dans le TD Magnétostatique (1) et qui est également abordé dans l'exo qui suit.

Ind 11 : Moteur synchrone. (Centrale 2)

On étudie un moteur synchrone constitué d'un rotor créant un champ tournant et d'un stator en rotation dans ce champ.

I- Etude du stator.

On considère tout d'abord une spire carrée d'axe (Ox), de côté l et de centre O, parcourue par un courant $i(t)$ (schéma ci-contre).

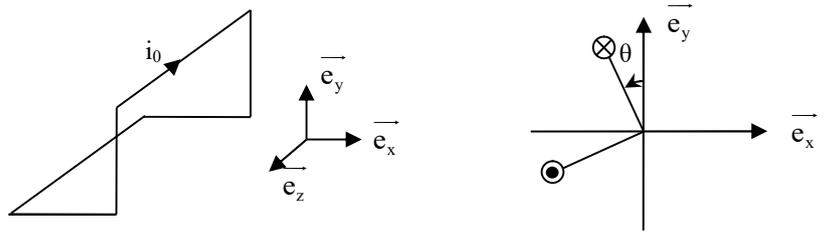


- 1- Quelle est la direction du champ magnétique créé en O ? On note $B_0(t)$ son unique composante. Justifier qu'elle puisse s'écrire $K \times i(t)$ où est K est une constante.
- 2- Déterminer le champ créé en O par un fil infini situé à une distance $l/2$. En déduire un encadrement de K .
- 3- On ajoute au dispositif une autre spire carrée, identique à la précédente mais d'axe (Oy), parcourue par un courant $i'(t)$. Comment choisir $i(t)$ et $i'(t)$ pour obtenir en O un champ tournant à la vitesse angulaire ω ?
On rappelle que le champ magnétique tournant peut être obtenu via du courant triphasé ; revoyez ce qui a été traité à ce sujet dans le TD Magnétostatique (1).

II- Etude du rotor.

On considère le rotor schématisé ci-dessous, susceptible de tourner autour de l'axe (Oz), où chaque portion rectiligne de fil est de longueur a ; il est parcouru par un courant i_0 constant et est placé dans le champ magnétique créé par le stator, supposé uniforme au voisinage de O.

Calculer la résultante et le moment résultant des actions électromagnétiques subies par ce rotor.



III.- Etude du mouvement.

On suppose enfin que le rotor est aussi soumis, en plus des actions précédentes, à un couple de frottement qui dépend de sa vitesse angulaire de rotation $\dot{\theta}$.

- 1- Proposer des expressions plausibles pour ce moment. Dans la suite on utilisera l'expression la plus simple parmi celles proposées.
- 2- On cherche à obtenir une rotation uniforme. Donner deux conditions, dont une sur $\omega = \dot{\theta}$ pour que ce soit le cas. Commenter ces deux conditions.

Ind 12 : Modèle sommaire d'alternateur. (Centrale)

Une bobine de rayon a comportant N tours de fils, de résistance R et d'auto-inductance négligeable, se trouve à une distance $D \gg a$ d'un dipôle magnétique de moment

Ce dipôle magnétique, qui modélise un aimant, est situé sur l'axe de symétrie (Ox) de la bobine et est en rotation à la vitesse angulaire ω autour d'un axe (Oz) orthogonal à (Ox).



- 1- Calculer le courant i induit dans la bobine par la rotation de l'aimant.
- 2- Montrer que l'aimant subit des actions de freinage et donner la valeur moyenne du couple associé à ces actions.

On donne le champ magnétique créé sur son axe (Ox) par une spire de rayon a centrée en O et parcourue par un

$$\text{courant } i : \vec{B}(x) = \frac{\mu_0 i}{2a} \left(1 + (x/a)^2 \right)^{-3/2} \vec{e}_x$$

Ind 13 : Oscillations d'un cylindre. (Mines)

Sur un cylindre de moment d'inertie J par rapport à son axe de symétrie de révolution, supposé vertical, sont enroulées N spires rectangulaires de côtés a et b , fermées sur une résistance R . On néglige l'inductance de cet enroulement.

Un aimant creux impose un champ magnétique uniforme, permanent et horizontal ; on repère le cylindre par l'angle θ entre le plan des spires et le plan vertical contenant la direction du champ. On suppose enfin que le cylindre est maintenu par des fils de torsion exerçant un couple de rappel vers la position $\theta = 0$, avec une constante de torsion C .

Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$, dans le cas général puis dans le cas de petites oscillations autour de la position d'équilibre.

On donne un enregistrement de $\theta(t)$. Commenter.

