

TRANSFERTS THERMIQUES

Revoyez impérativement les exercices du cours et du TD : ils tombent tous à l'oral !
Assurez-vous que vous maîtrisez les 3 géométries usuelles, avec ou sans terme source, en particulier la démonstration de l'équation de diffusion « à la main » par un bilan énergétique adapté, ainsi que les calculs de résistances thermiques.

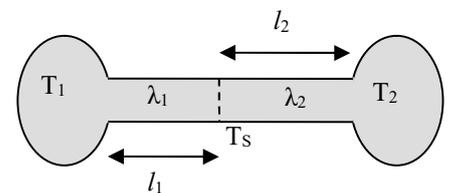
Questions de cours :

- Transferts thermiques. Conductivité thermique.
- Equation de la chaleur. Démonstration et discussion.
- Conduction thermique. Résistance et conductance thermique.

TT 1 : Jonction de deux tiges. (CCINP)

Soient deux tiges cylindriques, homogènes, isotropes, de même section : $S = 1 \text{ cm}^2$, dont la face latérale est calorifugée ; on donne :

- Tige 1 (Aluminium) : longueur $l_1 = 1 \text{ m}$, conductivité thermique $\lambda_1 = 200 \text{ W/m.K}$
- Tige 2 (Cuivre) : longueur $l_2 = 1,5 \text{ m}$, conductivité thermique $\lambda_2 = 380 \text{ W/m.K}$

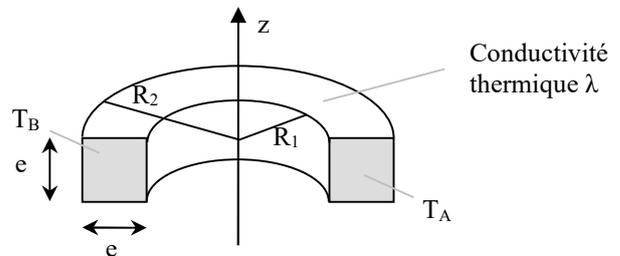


Les deux tiges sont soudées suivant la section, les extrémités du système étant maintenues à température constante : $T_1 = 300 \text{ K}$ pour l'extrémité en aluminium, $T_2 = 500 \text{ K}$ pour l'extrémité en cuivre.

Déterminer, en régime stationnaire, le flux thermique traversant la jonction des deux métaux (en donnant la signification physique de son signe), le gradient de température le long de chaque tige et la température au niveau de la jonction.

TT 2 : Symétrie torique. (Mines)

Déterminer la résistance thermique du demi-tore ci-contre. Puis retrouver la résistance thermique d'un cylindre droit.



TT 3 : L'igloo. (Mines)

On souhaite évaluer l'épaisseur e de glace nécessaire pour que, dans un igloo cubique de côté a suffisamment grand pour qu'ils s'y allongent, quatre aventuriers puissent maintenir via la puissance $P = 60 \text{ W}$ dégagée par chacun d'eux, une température intérieure T_i supérieure à 0°C alors que la température extérieure vaut $T_e = -10^\circ\text{C}$. On donne la conductivité thermique λ de la glace: $\lambda \approx 2 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$, et on néglige tout d'abord les effets de la conduction-convection.

Pour que l'épaisseur de l'igloo ne soit pas trop importante faut-il construire un igloo de faible ou de grande taille a ? Répondre qualitativement puis proposer une configuration (a, e) adaptée et commenter. Sachant que la neige tassée a une conductivité d'environ $0,05 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$, proposer une amélioration de la configuration précédente.

Une forme sphérique serait-elle préférable ? Discuter l'influence du vent.

TT 4 : Fil électrique. (Centrale 2)

On considère un long fil de cuivre cylindrique de rayon R_1 et de section S , dont les conductivités thermique et électrique sont notées λ et γ . Afin d'éviter des courts-circuits avec les autres fils électriques présents, ce fil est entouré d'une gaine de rayon extérieur R_2 , de conductivité λ_g , dont le coefficient de transfert conducto-convectif entre l'air extérieur, de température T_e , est noté h . Le fil est parcouru par un courant d'intensité I constant de 15A, uniformément réparti. On se place en régime permanent.

On donne : $R_2 = 1,5 \text{ mm}$; $S = 2,5 \text{ mm}^2$; $h = 5 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$; λ (fil) = $400 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$;
 λ_g (gaine) = $6 \cdot 10^{-2} \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$; γ (fil) = $6 \cdot 10^7 \text{ Sm}^{-1}$; $T_{ext} = 20^\circ\text{C}$.

- 1- Quelle est la puissance thermique évacuée par le fil ?
- 2- Quelle est la résistance thermique de la gaine ?
- 3- Montrer que le fil de cuivre est quasiment isotherme et calculer sa température.
- 4- Il faut qu'en tout point de la gaine la température reste inférieure à une valeur $T_{max} = 85^\circ\text{C}$ sous peine que la gaine fonde ; en déduire une condition sur l'intensité dans le fil. Comment évolue cette condition en fonction de la section du câble ? Comment réaliser techniquement cette condition ?
- 5- Peut-on appliquer les résultats précédents lorsque le courant varie ? Discuter.

TT 5 : Rupture d'un fusible. (CCINP)

Un fusible est un fin cylindre métallique en plomb (ou en étain), de longueur L , de base d'aire S , parcouru par un courant I dont la répartition est supposée uniforme en son sein.

On s'intéresse à la température au sein du fusible en régime permanent, sachant que la surface latérale est calorifugée et que les deux surfaces de base sont maintenues à la température T_0 uniforme. Déterminer :

- 1- La puissance volumique libérée par l'effet Joule au sein du fusible.
- 2- La distribution de la température au sein du fusible.
- 3- La puissance évacuée par chaque base.
- 4- L'entropie créée par unité de temps.
- 5- L'intensité maximale du courant pouvant circuler dans le fusible connaissant la température de fusion du plomb.
AN : comment dimensionner le fusible sachant que $L = 3 \text{ cm}$, $I_{max} = 10 \text{ A}$, $T_0 = 300 \text{ K}$, et que pour le plomb : $T_f = 600 \text{ K}$, $\lambda = 35 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$, $\gamma = 4,8 \cdot 10^6 \text{ S.m}^{-1}$.

Note : La diffusion thermique est ici supposée axiale afin de simplifier l'approche mais en pratique, les transferts thermiques au sein d'un fusible sont latéraux, comme dans l'exercice précédent !

TT 6 : Transferts thermiques avec effet Joule. (Début d'un exercice de l'X)

Une tige d'axe (Ox), de section s , de longueur L , de conductivité thermique λ et de conductivité électrique γ , est en contact à ses extrémités avec deux thermostats : l'un de température T_1 situé dans le plan $x = 0$, l'autre de température $T_2 < T_1$ situé dans le plan $x = L$. La tige est parcourue par un courant I constant et a atteint un régime permanent, sa surface latérale étant calorifugée.

Sous quelle condition sur I la température admet-elle un maximum autre que T_1 ?

TT 7 : Effet Joule avec conductivité électrique dépendant de la température. (Centrale)

Un matériau solide, de masse volumique ρ , de chaleur massique c , de conductivité thermique λ et de conductivité électrique σ est soumis à un champ électrique \vec{E} uniforme et indépendant du temps. Seule la conductivité électrique dépend de la température T .

- 1- Par un bilan énergétique sur un volume fini V de matériau limité par une surface Σ simplement connexe,

montrer que : $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \sigma E^2 + \lambda \Delta T$

- 2- On considère une lame du matériau, d'épaisseur $2l$ comprise entre les deux plans $x = \pm l$ dont la température est maintenue égale à T_0 . Deux électrodes planes situées en $L = \pm l$ imposent un champ électrique le long de Oy .

La conductivité σ dépend de la température selon la loi : $\sigma = \sigma_0 \exp\left(\frac{T_1}{T_0^2}(T - T_0)\right)$; T_1 étant une caractéristique du milieu.

On suppose un régime permanent atteint et que $L \gg l$. La température au sein du matériau n'est alors fonction que de x .

On utilisera les variables réduites : $\tau = \frac{T_1}{T_0^2}(T - T_0)$ et $\xi = \frac{x}{l}$ et on posera $\alpha = \frac{T_1}{T_0^2} \frac{\sigma_0 E^2 l^2}{\lambda}$

Donner une intégrale première de l'équation différentielle suivie par la fonction $\tau(\xi)$ en notant τ_{\max} la valeur maximale de τ .

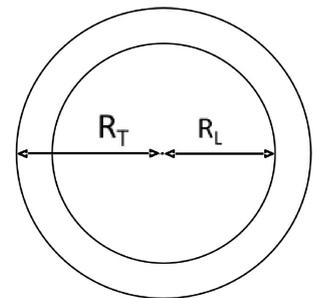
- 3- Que devient l'équation différentielle dans le changement de variable : $u = e^\tau$. Vérifier que la fonction

$u = \frac{u_{\max}}{ch^2 \beta \xi}$ est une solution de l'équation différentielle en déterminant la constante β .

Montrez qualitativement, que si le champ électrique est trop grand, le régime permanent n'est pas possible.

TT 8 : Température au centre de la Terre. (Mines)

On étudie la température au sein d'une boule de rayon R_T , de masse volumique ρ , et de conductivité thermique λ . La température ne dépend que de la distance r au centre de la boule (symétrie sphérique) et les interactions avec le milieu extérieur imposent une température T_s constante à la surface. Enfin, on suppose qu'une puissance massique α uniforme est créée dans la zone où r est compris entre R_T et $R_L < R_T$ (schéma ci-contre).



- 1- À l'aide d'un bilan local, déterminer $T(r)$ pour tout r dans la boule.

- 2- Ce modèle peut être appliqué à la Terre, l'espace entre R_T et R_L représentant la lithosphère (d'une épaisseur d'environ 100km), qui génère une puissance volumique à cause de l'uranium qu'elle contient.

En prenant $\alpha = 5.10^{-10} \text{ W.kg}^{-1}$ et en donnant des ordres de grandeurs réalistes pour R_T , R_L , T_s , ρ et λ , estimer la température au centre de la Terre.

- 3- Discuter l'adéquation du modèle avec la structure réelle de la Terre.

TT 9 : Le plus petit mammifère marin. (version de Centrale ; également posé aux Mines)

Un mammifère marin est modélisé par une sphère de rayon R et de centre O . A l'intérieur de son corps, son métabolisme produit une puissance thermique volumique uniforme φ_0 . L'animal est immobile dans l'eau, de conductivité thermique λ , et on relève loin de lui une température $T_0 = 293$ K. On suppose les transferts thermiques radiaux et on note $j_{th}(r)$ la composante radiale du vecteur densité de flux thermique.

- 1- Rappeler la loi de Fourier. Expliquer le signe négatif. Déterminer l'unité S.I. de la conductivité thermique. Citer des lois analogues à la loi de Fourier.
- 2- Calculer le flux thermique évacué par le mammifère dans le fluide en fonction de φ_0 et R , en régime permanent.
- 3- Déterminer $j_{th}(r)$ et $T(r)$ en tout point de l'eau et en déduire la température cutanée T_c . Calculer φ_0 si $T_c = 303$ K, $R = 25$ cm et $\lambda = 500$ u.S.I.
- 4- Pourquoi n'existe-t-il pas de petits mammifères marins ?
- 5- La conductivité thermique de l'eau pure vaut en réalité 0,6 u.S.I. et la valeur beaucoup plus élevée proposée ici a été empiriquement choisie pour compenser une carence du modèle. De quelle carence s'agit-il et pourquoi une surévaluation de λ peut-elle en quelque sorte compenser cette carence ?
- 6- Question bonus posée aux Mines : Retrouver l'expression de la température cutanée T_c sans déterminer $j_{th}(r)$ et $T(r)$ mais en utilisant la notion de résistance thermique.

Note : dans la version posée aux Mines, il était demandé de prendre en compte des transferts conducto-convectifs à l'interface entre l'animal et l'eau. Cette approche semble assez critiquable puisque par ailleurs on cherche la température dans l'eau en y supposant de facto les transferts thermiques purement diffusifs... Vous pouvez réfléchir aux modifications apportées par cette contrainte supplémentaire.

TT 10 : Boule radioactive. (Centrale)

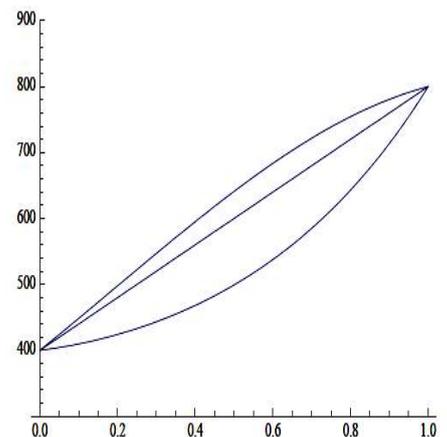
Une boule radioactive est placée dans un récipient rempli d'eau de dimension grande devant son rayon R . Elle reçoit une quantité de chaleur α par unité de volume et de temps. On note λ_1, λ_2 les conductivités thermiques de la boule et de l'eau. On se place en régime stationnaire, la température de l'eau loin de la boule est T_0 et on néglige toute convection dans l'eau.

En faisant un bilan thermique, établir l'équation vérifiée par $T(r)$ dans la boule et dans l'eau. En déduire la loi $T(r)$, la température de surface de la boule T_s ainsi que la puissance que la boule évacue par diffusion dans l'eau.

TT 11 : Conductivité thermique variable. (Centrale)

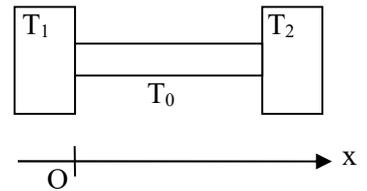
On considère, en régime stationnaire, un cylindre d'axe Ox , de conductivité thermique $\lambda = \lambda_0 \frac{T_0}{T}$. Les parois sont calorifugées. On impose T_1 en $x = 0$ et T_2 en $x = L$. Les échanges thermiques ne se font que selon Ox .

- 1- Par un argument physique, déterminer l'allure de $T(x)$ parmi les trois représentations ci-contre ?
- 2- Déterminer $T(x)$
- 3- Soit ΔT la différence entre la loi trouvée et celle d'un cylindre de conductivité constante λ_0 . Déterminer la position où ΔT est maximale.



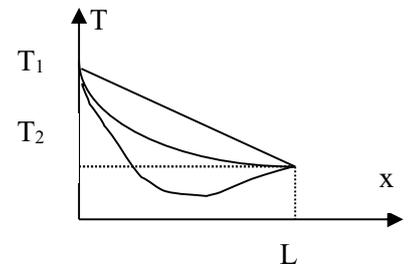
TT 12 : Conduction thermique avec fuites. (CCINP, Centrale)

On s'intéresse à une barre cylindrique de longueur L et de section σ , de masse volumique ρ et de conductivité thermique λ , reliant deux thermostats (schéma ci-contre).



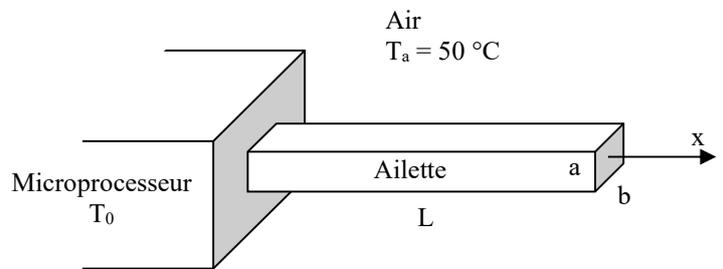
La barre n'est pas calorifugée et il existe des échanges conducto-convectifs avec l'air extérieur, de température T_0 supposée uniforme. On note h le coefficient de conducto-convection.

- 1- Donner la température $T(x)$ le long de la barre en régime permanent, en introduisant un paramètre d homogène à une longueur. Commenter l'effet de l'échange thermique latéral.
- 2- Parmi les trois courbes ci-contre, deux d'entre elles correspondent à : $h = 4 \cdot 10^{-2}$ et $h = 3 \cdot 10^{-3}$ dans les unités SI. Identifier-les et justifier la multiplicité des allures observées. Quelle est la valeur de h pour la troisième courbe ?
- 3- Proposer une situation électrique équivalente à cette situation thermique.



TT 13 : Ailette de refroidissement. (Centrale 2)

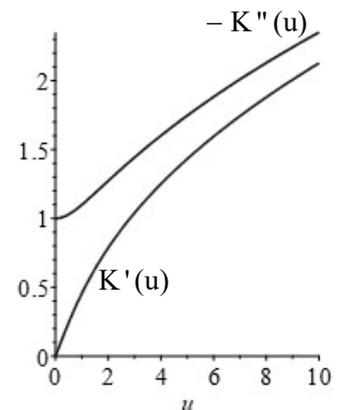
On considère un microprocesseur à la température $T_0(t)$ que l'on souhaite refroidir à l'aide d'une ailette de refroidissement, la température de l'air extérieur étant $T_a = 50^\circ\text{C}$. Les dimensions de l'ailette sont $a = 1 \text{ mm}$, $b = 1 \text{ cm}$ et $L \gg b$ (figure ci-contre) ; elle est faite en acier inoxydable pour lequel on donne les caractéristiques suivantes :



- Capacité thermique massique : $c = 435 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
- Conductivité thermique : $\lambda = 52 \text{ uSI}$
- Coefficient de conducto convection avec l'air : $h = 20 \text{ uSI}$ (convection naturelle)
- Densité : $d = 8,0$

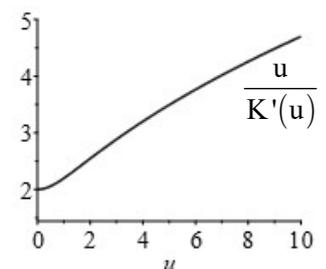
A- On note $T(x,t)$ la température à l'intérieur de l'ailette, sous l'hypothèse d'une diffusion thermique unidimensionnelle selon l'axe (Ox) indiqué sur la figure 1.

- 1- Donner les unités de λ et h .
- 2- Montrer que T vérifie l'équation différentielle : $\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{D}{\delta^2} (T - T_a)$ où D désigne la diffusivité thermique et δ une constante à déterminer.
- 3- On montre que la condition de validité de cette approximation unidimensionnelle s'écrit : $\frac{ah}{\lambda} \ll 1$. Interpréter en termes de résistances thermiques.



B- On suppose que $T_0(t) = T_a + \theta_0 \cos(\omega t)$. On pose $T(x,t) = T_a + \theta(x,t)$ et on cherche $\theta(x,t)$ en notation complexe sous la forme : $\underline{\theta}(x,t) = \underline{\theta}_m \exp(j(\omega t - kx))$.

- 1- Déterminer la relation de dispersion associée à cette « onde thermique ».
- 2- Adimensionner cette relation en posant $K = k\delta$ et $u = \frac{\omega}{\omega_c}$, où ω_c est une pulsation caractéristique à déterminer. Calculer numériquement D et ω_c et commenter.
- 3- Dans la suite on pose : $K' = \text{Re}(K)$ et $K'' = \text{Im}(K)$. Etablir le lien entre la



vitesse de phase et $\frac{u}{K'(u)}$. Calculer numériquement la vitesse caractéristique qui apparait et commenter

Il était alors demandé de tracer sous Python les graphes de $K'(u)$, $K''(u)$ et $u/K'(u)$ et on obtenait les tracés de la figure ci-contre. [Fallait-il calculer explicitement ces fonctions avant de les tracer ? Je pense que non et que les expressions étaient fournies...]

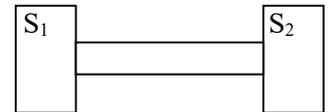
4- Interpréter les graphes de ces fonctions.

TT 14 : Evolution d'un système isolé. (CCINP, Centrale, Mines, X...)

Enoncé type Centrale-Mines :

Deux solides S_1 et S_2 de même capacité thermique C et de températures initiales différentes T_{10} et T_{20} sont en contact via une barre conductrice de la chaleur, de capacité thermique négligeable devant celles des solides et dont toutes les caractéristiques géométriques sont supposées connues. L'ensemble est isolé thermiquement de l'extérieur.

1- On suppose tout d'abord que les solides S_1 et S_2 peuvent être considérés comme des thermostats. Calculer le taux de création d'entropie dans la tige en régime stationnaire.



2- On suppose désormais que les variations des températures de S_1 et S_2 ne sont pas négligeables et on s'intéresse à l'évolution du système, au cours du temps, en effectuant une approximation de régime quasi permanent.

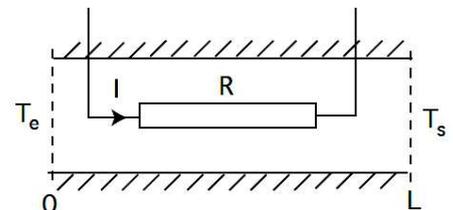
Déterminer les températures $T_1(t)$ et $T_2(t)$ de S_1 et S_2 à tout instant et discuter l'approximation de régime quasi stationnaire.

Calculer l'entropie créée au cours de l'évolution.

3- Quels résultats sont-ils modifiés si la tige n'est plus de capacité thermique négligeable ?

TT 15 : Mesure d'une capacité thermique. (Mines)

La canalisation est calorifugée. On mesure T_e et T_s grâce à des thermocouples. Il passe dans le tuyau une résistance R parcourue par une intensité I .



1- Appliquer le premier principe en régime permanent, au système fermé constitué de la masse d'eau entre O et L , et de la masse dm entrant entre t et $t + dt$

2- En déduire une relation entre la chaleur massique c , R , I , T_e , T_s et le débit massique D_m . Comment mesurer c avec ce dispositif ?

3- Maintenant le tuyau perd une puissance de fuite P_f . Comment P_f intervient dans le bilan précédent ?

4- On fait une seconde mesure avec $D'_m \neq D_m$, $I' \neq I$, $T'_e \neq T_e$ et $T'_s \neq T_s$. Sous quelle hypothèse peut-on avoir accès à c sans connaître P_f ?

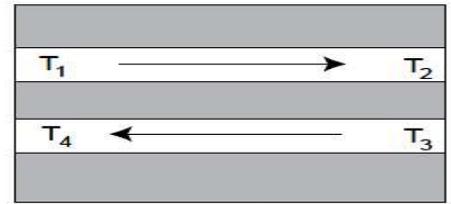
TT 16 : Etude d'un échangeur. (TPE, Centrale ; énoncé et géométrie variable)

Enoncé brutal :

On étudie un échangeur thermique en régime permanent. On néglige les variations d'énergie mécanique. L'échangeur est globalement calorifugé et la pression P y est constante. Le gaz qui le traverse est un gaz parfait diatomique et suite le trajet ci-contre :

On donne $T_1 = 300\text{ K}$ et $T_3 = 90\text{ K}$

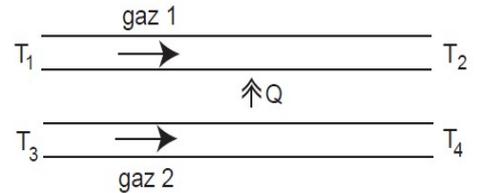
Comment en déduire T_2 et T_4 ?



Autre géométrie :

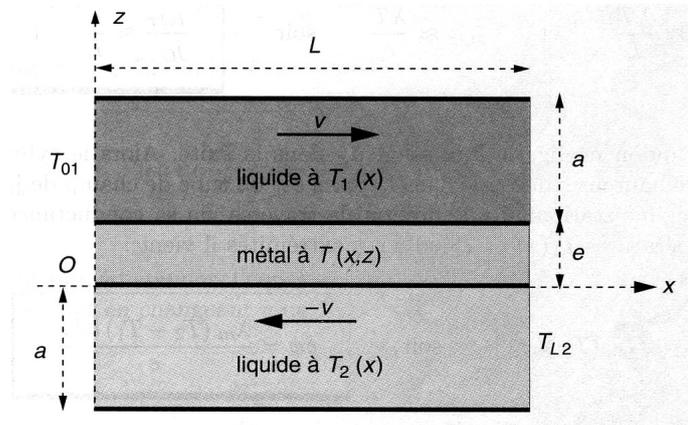
Un échangeur thermique est constitué par deux gaz en écoulement échangeant une quantité de chaleur Q .

- 1- Trouver deux relations reliant T_1, T_2, T_3 et T_4 .
- 2- T_1 et T_3 étant fixées, en déduire T_2 et T_4 .



Enoncé détaillé :

Un échangeur thermique est constitué de deux canalisations d'axe Ox de longueur L et de même section rectangulaire de côtés b selon \vec{u}_y et a selon \vec{u}_z , séparées par une paroi métallique d'épaisseur $e \ll L$. Dans la conduite (1), un liquide entre en $x = 0$ à la température $T_1(x = 0) = T_{01}$ et s'écoule à la vitesse constante $v\vec{u}_x$. Dans la conduite (2), le même liquide entre en $x = L$ à la température $T_2(x = L) = T_{L2}$ et s'écoule à la vitesse constante $-v\vec{u}_x$. On note $T_1(x)$ et $T_2(x)$ la température dans les deux conduites supposée uniforme dans une section.



Données : capacité thermique massique c , masse volumique μ et conductivité thermique λ du liquide ; conductivité λ_m de la paroi métallique. On suppose la pression uniforme.

- 1- Justifier que dans la paroi métallique, la composante selon \vec{u}_x du vecteur densité de flux thermique est négligeable devant la composante selon \vec{u}_z .
- 2- En effectuant un bilan sur un système bien choisi, déterminer une équation différentielle vérifiée par les fonctions $T_1(x)$ et $T_2(x)$. En déduire sans calcul une seconde équation différentielle vérifiée par ces deux fonctions.
- 3- Montrer que si la vitesse d'écoulement est suffisante, ces équations peuvent se mettre sous la forme

$$\text{approchée : } \delta \frac{dT_1(x)}{dx} = \delta \frac{dT_2(x)}{dx} = T_2(x) - T_1(x)$$

On exprimera δ en fonction des données et on donnera sa dimension.

- 4- Justifier brièvement l'évolution affine de $T_1(x)$ et $T_2(x)$. La résolution complète du système donne :

$$T_1(x) = \frac{(L + \delta)T_{01} + x(T_{L2} - T_{01})}{L + \delta} ; T_2(x) = \frac{(L + \delta)T_{01} + (x + \delta)(T_{L2} - T_{01})}{L + \delta}$$

Discuter l'optimisation industrielle du rapport $\frac{L}{\delta}$, puis du choix de λ_m . Montrer qu'il faut trouver un compromis sur la vitesse v

- 5- Qu'obtient-on si les deux liquides s'écoulent dans le même sens ?

TT 17 : Auto-inflammation du papier. (Mines)

Le Soleil est vu depuis la Terre sous un angle ε de 32 minutes. Un expérimentateur essaie de faire brûler une feuille de papier A4 sous l'effet du rayonnement solaire, à l'aide d'une lentille. Les caractéristiques de l'expérience sont les suivantes :

- * Flux lumineux solaire au lieu et à l'heure de l'expérience : 350 W.m^{-2} ;
- * Température au lieu et à l'heure de l'expérience : 23°C
- * Qualité de papier disponible : 60 ou 80 g.m^{-2} ;
- * Couleur de papier : noir ou blanc ;
- * Masse volumique du papier : 600 kg.m^{-2} ;
- * Capacité thermique massique du papier : $1,5.10^3 \text{ J.K}^{-1} .\text{kg}^{-1}$;
- * Température d'auto-inflammation du papier : 233°C ;
- * Type de lentille disponible : convergente ou divergente ;
- * Focales des lentilles : 5 cm, 20 cm ou 1 m ;
- * Diamètre d'ouverture des lentilles : 5 ou 10 cm.

Expliquer le principe de l'expérience, effectuer un schéma mettant en évidence l'effet de la lentille, puis en discutant le choix du papier et de la lentille et en faisant des hypothèses raisonnables, calculer la durée minimale d'auto-inflammation du papier.

TT 18 : Evolution d'une tige. (Mines)

Une tige de section s , de longueur L et de conductivité thermique λ est en contact à ses extrémités avec deux thermostats : l'un de température T_1 est situé dans le plan $x = 0$, l'autre de température T_2 est situé dans le plan $x = L$. La surface latérale est calorifugée et la tige a atteint un régime permanent.

À $t = 0$, on supprime brutalement les contacts avec les thermostats et on calorifuge les extrémités. On note T_∞ la température finale atteinte par la tige et $T(x,t)$ le champ de température au cours d'évolution. On pose enfin : $\theta(x,t) = T(x,t) - T_\infty$.

1- Calculer T_∞ .

2- Chercher pour $\theta(x,t)$ des solutions sous la forme $\theta(x,t) = f(x) \times g(t)$. On introduira deux grandeurs τ et δ caractéristiques des variations des fonctions $g(t)$ et $f(x)$.

3- Montrer que seules certaines valeurs de δ sont possibles. Déterminer ces valeurs.

4- Décrire l'évolution temporelle associée à ce type de solution. Est-ce une solution acceptable ? On propose

d'écrire la solution sous la forme :
$$\theta(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i e^{-\frac{t}{\tau_i}} \cos\left(\frac{x}{\delta_i}\right)$$

Justifier cette écriture et préciser les expressions de τ_i et δ_i . Expliquer précisément comment calculer les coefficients A_i qui conviennent (*calcul non demandé*) et donner l'allure de $T(x,t)$ en fonction de x à différents instants.

5- Calculer l'entropie créée au cours de l'évolution.

TT 19 : Evolution d'une plaque. (Mines)

Une plaque de conductivité thermique λ située entre les plan $x = -a$ et $x = a$ et de grande taille selon les deux autres directions est plongée dans un fluide extérieur de température fixe T_F . La température initiale de la plaque est T_0 . On suppose dans un premier temps un contact thermique parfait entre le fluide et la plaque.

On pose : $\theta(x,t) = T(x,t) - T_F$.

- 1- Trouver l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $\theta(x,t)$. On introduira la diffusivité thermique de la plaque.
- 2- Chercher pour $\theta(x,t)$ des solutions sous la forme $\theta(x,t) = f(x) \times g(t)$. On introduira deux grandeurs τ et δ caractéristiques des variations des fonctions $g(t)$ et $f(x)$.
- 3- Montrer que seules certaines valeurs de δ sont possibles. Déterminer ces valeurs.
- 4- Décrire l'évolution temporelle associée à ce type de solution. Est-ce une solution acceptable ? On propose

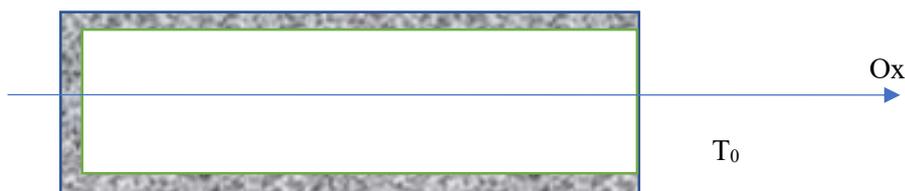
d'écrire la solution sous la forme :
$$\theta(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i e^{-\frac{t}{\tau_i}} \cos\left(\frac{x}{\delta_i}\right)$$

Justifier cette écriture et préciser les expressions de τ_i et δ_i . Expliquer précisément comment calculer les coefficients A_i qui conviennent (*calcul non demandé*).

- 5- On souhaite prendre en compte l'existence d'échanges conducto-convectifs entre le fluide et la plaque, caractérisés par un coefficient de transfert h .
Montrer qu'une solution du type de celle obtenue à la question 3- est encore valable mais que les valeurs possibles de δ ne sont plus les mêmes. Déterminer ces nouvelles valeurs par une méthode graphique (poser $\beta = ha/\lambda$).
Que pensez de l'approche de la question 4 ?

TT 20 : Evolution d'un barreau. (Mines)

On considère un barreau cylindrique de section S et longueur L , entièrement calorifugé à l'exception d'une de ses bases qui est en contact avec l'atmosphère considérée comme un thermostat de température T_0 (figure ci-dessous). Les masse volumique, capacité thermique massique et conductivité thermique du barreau sont connues.



- 1- Quelle est l'équation différentielle vérifiée par le champ de température ?
- 2- On cherche une solution sous la forme $T_0 + T_1 f(x)g(t)$. Déterminer les expressions possibles pour les fonctions f et g et mettre en évidence l'existence de modes propres.
- 3- On s'intéresse uniquement au mode propre fondamental. Si la température évolue selon ce mode, déterminer l'évolution de l'énergie interne du barreau au cours du temps, ainsi que le transfert thermique échangé avec l'atmosphère entre l'instant initial ($t=0$) et un instant t quelconque.

TT 21 : Diffusion thermique dans un barreau en régime variable. (Centrale 2)

On étudie la diffusion thermique au sein d'un barreau cylindrique de longueur $L = 70$ cm, initialement thermalisé à la température $T_0 = 21,7^\circ\text{C}$, et de diffusivité thermique notée D . A partir d'un instant choisi comme origine des temps, l'extrémité inférieure du barreau, située en $x = 0$, est mise au contact d'un thermostat à $T_1 = 70^\circ\text{C}$ tandis que son extrémité supérieure, située en $x = L$, est isolée thermiquement. Les parois latérales du cylindre sont également isolées. L'expérience dure 20 s durant lesquelles l'extrémité supérieure passe de $21,7^\circ\text{C}$ à $31,8^\circ\text{C}$.

I- Déterminer l'équation différentielle vérifiée par le champ de température $T(x,t)$ au sein du barreau.

II- Dans une première approche, on cherche à résoudre cette équation analytiquement. Pour cela, on considère que le barreau est semi-infini

1- Expliquer pourquoi il n'est pas possible de trouver une solution par séparation des variables, de la forme : $T(x,t) = f(x)g(t)$.

2- On pose $T(x,t) = T(z)$ avec $z = \frac{x}{\sqrt{4Dt}}$. Montrer que T vérifie : $\frac{d^2T}{dz^2} + 2z \frac{dT}{dz} = 0$.

3- Résoudre cette équation en utilisant la fonction d'erreur de Gauss :

$$E: x \mapsto \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt. \quad \text{On notera que } \lim_{x \rightarrow \infty} E = 1.$$

4- En utilisant le script python fourni, tracer graphiquement la solution $T(x, t = 20 \text{ s})$ et donner la valeur de $T(x = L, t = 20 \text{ s})$. Commenter sachant qu'une mesure donne $T(x = L, t = 20 \text{ s}) = 31,8^\circ\text{C}$.

Dans le script la fonction E était déjà définie et il restait une ligne de code à remplir dans la définition de la fonction $T(x,t)$ afin d'indiquer l'expression de $T(x,t)$ à l'aide de la fonction E . Vous veillerez donc à proposer ici une expression efficiente de $T(x,t)$. La valeur de température obtenue était $T(x = L, t = 20 \text{ s}) = 35^\circ\text{C}$.

II- Dans une seconde approche, on envisage une résolution numérique. Pour cela, on discrétise la variable temporelle avec un pas k et la variable spatiale avec un pas h , si bien que les instants et positions s'écrivent :

$$t_i = i \times k \quad \text{et} \quad x_j = j \times h.$$

1- Donner les schémas d'Euler permettant d'approcher les

$$\text{dérivées : } \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

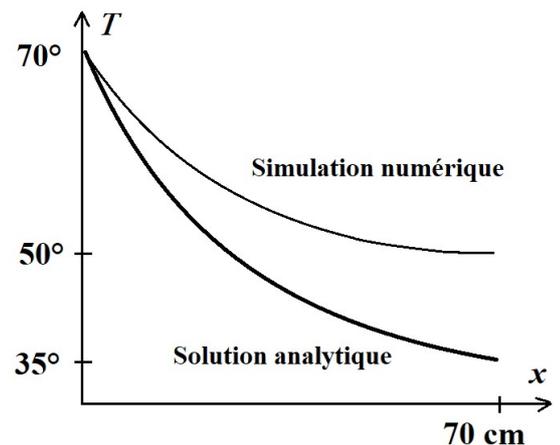
2- Dans le code python fourni, quel choix a été effectué pour k et h ?

Dans le code on pouvait lire :

```
import numpy as np
t = np.linspace(0., 20., 100)
x = np.linspace(0., 70., 100)
```

Compléter ce code et l'exécuter pour obtenir $T(x, t = 20 \text{ s})$ (voir courbe ci-contre).

Comparer cette solution numérique à la solution analytique obtenue au § II.



TT 22 : Sensation de froid. (*Mines*)

Lorsqu'on pose la main sur une table en bois et une table en acier, la table en bois paraît « plus chaude » alors que les deux tables sont à la même température. On se propose d'interpréter cet effet en adoptant le modèle suivant :

- La table est assimilée au demi espace $x > 0$ et la main au demi espace $x < 0$;
- Les conditions initiales à l'instant $t = 0$ où la main vient en contact de la table sont

$$T(x < 0, t = 0) = T_{01} = 37^\circ\text{C} \text{ et } T(x > 0, t = 0) = T_{02} = 17^\circ\text{C}$$

On se donne les conductivités thermiques λ_1 et λ_2 et les diffusivités thermiques D_1 et D_2 . On cherche des solutions de l'équation de la chaleur dans chaque milieu de la forme :

$$T(x < 0, t) = \alpha_1 + \beta_1 \int_0^{u_1} \exp(-v^2) dv \quad \text{avec} \quad u_1 = \frac{x}{2\sqrt{D_1 t}}$$

$$T(x > 0, t) = \alpha_2 + \beta_2 \int_0^{u_2} \exp(-v^2) dv \quad \text{avec} \quad u_2 = \frac{x}{2\sqrt{D_2 t}}$$

1- En dehors de l'instant $t = 0$, on s'impose la continuité de la température en $x = 0$. Justifier brièvement par ailleurs la continuité du flux thermique $j_Q(x, t)$ en $x = 0$.

2- En déduire α_1 , α_2 , β_1 et β_2 . On posera $I = \int_0^\infty \exp(-v^2) dv$

3- En déduire que la température de l'interface se met sous la forme : $T_i = \frac{E_1 T_{01} + E_2 T_{02}}{E_1 + E_2}$ où l'effusivité E est

une caractéristique du matériau qu'on exprimera en fonction de D et λ . Sachant que $E_{\text{main}} = 10^3$,

$E_{\text{acier}} = 10^4$ et $E_{\text{bois}} = 10$ en unités du système international, calculer T_i pour un contact main-acier et un contact main-bois puis conclure.

4- En réalité la main et la table ont une épaisseur $e \approx 1$ cm finie. Montrer que le modèle des demi-espaces est valable pour un contact suffisamment bref.

5- Pour un contact long entre la main et la table, on adopte un module où le champ de température est stationnaire. Déterminer la température T_i de l'interface en fonction de λ_1 , λ_2 , T_{01} et T_{02} . Commenter