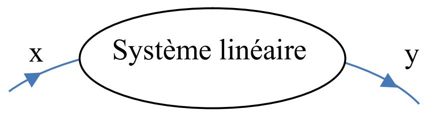
Réponse d'un système linéaire

I- Système linéaire

A- Définition d'un système linéaire, continu, invariant dans le temps



Grandeur d'entrée :

- Tension aux bornes de l'alimentation
- Force de traction

Grandeur de sortie :

- Tension aux bornes de la charge (résistor, bobine …)
- Elongation d'un resort, vitesse

Système linéaire : deux définitions équivalentes

Définition 1 :
Les système est dit linéaire si, sa réponse à signal d'entrée x1 (respectivement x2) est y1 (respectivement y2) alors :

- sa réponse à un signal d'entrée αx_1 est αy_1 $(\alpha \in \mathbb{R})$
- sa réponse à un signal d'entrée $x_1 + x_2$ est $y_1 + y_2$

C'est ce qu'on appelle le « **théorème de superposition** »

Définition 2 :
La relation imposée par un système linéaire entre les grandeurs d'entrée x(t) et de sortie y(t) se met sous la forme d'une équation différentielle linéaire en y à coefficient réels (et constants pour les systèmes linéaires invariants dans le temps :

$$\boxed{b_0 y + b_1 \frac{dy}{dt} + b_2 \frac{d^2y}{dt^2} + \ \ldots\ + b_n \frac{d^n y}{dt^n} = \underbrace{a_0 x + a_1 \frac{dx}{dt} + \ \ldots\ + a_m \frac{d^m x}{dt^m}}_{\text{fonction connue dès que x est connu}}}$$

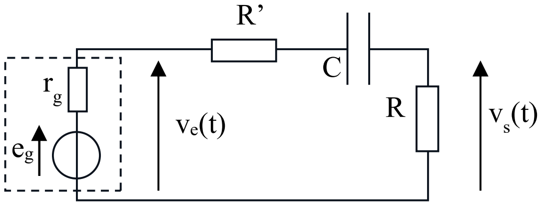
L'équation différentielle est une équation différentielle d'ordre n. On parlera de système linéaire d'ordre n ou filtre d'ordre n.

Système invariant dans le temps

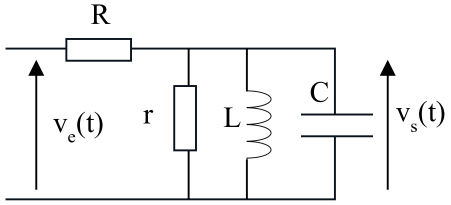
Nous ne travaillerons que sur des systèmes linéaires invariants dans le temps pour ces systèmes, si la réponse au signal d'entrée x(t) est y(t) alors sa réponse à $x(t-\tau)$ (signal x retardé de τ) sera $y(t-\tau)$.

Une condition suffisante pour que le système soit invariant dans le temps : les coefficients de l'équation différentielle : b_0, …, b_n et a_0, … a_m sont invariants dans le temps

B- Mise en équation. Forme canonique



Circuit 1



Circuit 2

1- Utilisation des lois des nœuds et des mailles

Choix des inconnues : pour une mise en équation simplifiée on veillera à ne pas multiplier les inconnues on choisira

- Les intensités i_k dans chaque branche. Les tensions aux bornes des conducteurs ohmiques seront directement notées $\pm Ri_k$ (en fonction de la convention d'orientation) et les tensions aux bornes de bobines seront notées directement $\pm L\dfrac{di_k}{dt}$
- Si le réseau comporte des condensateurs, on rajoutera comme inconnues les tensions à leurs bornes

2- Mise en équation

- Orienter les intensités dans chacune des branches (choisir le sens comme on le souhaite) et faire apparaître sur le schéma les tensions Ri_k et $L\dfrac{di_k}{dt}$
- Ecrire la loi des nœuds ($n-1$ équations indépendantes)
- Choisir $b-(n-1)$ mailles indépendantes, pour chacune d'elles choisir un sens de parcours et écrire la loi des mailles.
- Si le réseau comporte des condensateurs compléter le système d'équation par $i_k = \pm C\dfrac{du_k}{dt}$
- Résoudre le système d'équations obtenues. Le plus simple est souvent d'éliminer progressivement les inconnues non demandées et de travailler toujours avec des systèmes solvables (passer d'un système de 5 équations à 5 inconnues à un système 4 équations à 4 inconnues, etc …)

TRES IMPORTANT : vérifier l'homogénéité. On se souviendra que :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \dim(RC) = \dim\left(\dfrac{L}{R}\right) = T & \dim(LC) = T^2 \\ \dim\left(\dfrac{du}{dt}\right) = \dim(u).T^{-1} & \dim\left(\dfrac{d^2u}{dt^2}\right) = \dim(u).T^{-2} \end{array}}$$

3- Mise en forme canonique

Ordre 1 : $\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{1}{\tau}y = f(t)$

Ordre 2 : $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = f(t)$ ω_0 est la pulsation propre du système et Q on facteur de qualité

Autres paramétrages possibles $\frac{d^2y}{dt^2}+2\lambda\frac{dy}{dt}+\omega_0^2 y=f(t)$ λ facteur d'amortissement

$\frac{d^2y}{dt^2}+2m\omega_0\frac{dy}{dt}+\omega_0^2 y=f(t)$ m facteur d'amortissement réduit

Les coefficients τ, ω_0 et Q sont caractéristiques du circuit étudié et ne varient si l'on choisit une autre grandeur de sortie (par exemple la tension aux bornes d'un autre dipôle) : le « membre de gauche » de l'équation ci-dessus ne changera pas mais la fonction appelée f changera.

Exemples : Etudier les circuits 1 et 2 ci-dessus :

- trouver l'équation différentielle reliant v_s à v_e
- identifier les paramètres caractéristiques : τ (circuit 1) ou ω_0 et Q (circuit 2) et interpréter la dépendance de Q en R et r.

C- Réponse d'un filtre linéaire

$$b_0 y+b_1\frac{dy}{dt}+b_2\frac{d^2y}{dt^2}+\ ...\ +b_n\frac{d^ny}{dt^n}=f(t)$$

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle se met sous la forme $y(t)=y_{libre}(t)+y_{établi}(t)$

1. y_{libre} est solution de l'équation différentielle avec second membre nul. On la nomme en physique **régime libre**
   Cette solution fait intervenir les solutions de l'équations caractéristiques associée à l'équation différentielle : $b_0+b_1r+b_2r^2+\ ...\ +b_nr^n=0$
   Soit r_1, r_2, …, r_n ses solutions. Elles sont réelles ou complexes (et dans ce cas, elles sont deux à deux conjuguées, les coefficients b_i étant réels)
   Si les racines sont distinctes : $y_{libre}(t)=A_1e^{r_1t}+A_2e^{r_2t}+...+A_ne^{r_nt}$
   Si deux racines sont conjuguées ($r_1=r_2$) : $y_{libre}(t)=(A_1t+A_2)e^{r_1t}+A_3e^{r_3t}+...$
   Dans le cas d'un système **stable**, les solutions r_i vérifient $\Re e(r_i)<0$ et $y_{libre}(t)\xrightarrow{t\to\infty}0$
   Ce sera la cas ssi tous les coefficients apparaissant dans le membre de gauche b_0, b_1, …, b_n sont **tous de même signe** (vérification)

2. $y_{établi}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (avec second membre). En physique on emploiera parfois l'expression surprenante « la » solution particulière. On sous-entend alors la solution particulière qui a la « même forme » que le second membre f(t) ; on parlera alors de **régime établi.**
   Ainsi :
   - si x (grandeur d'entrée) est un signal périodique de période T, $y_{établi}$ est une fonction périodique de période T.
   - si x est un polynôme de degré p en t alors $y_{établi}$ est recherché sous la forme d'un polynôme de même degré.
   - Si x est une fonction exponentielle $\left(x(t)=A.e^{\alpha t}\right)$, $y_{établi}$ est recherché sous la forme d'une exponentielle : $y_{établi}(t)=B.e^{\alpha t}$

3. $y(t) = y_{libre}(t) + y_{établi}(t)$ sera appelé **régime transitoire** (on verra une justification de cette dénomination dans les chapitres précédents)

Pour une équation différentielle d'ordre n, il apparaîtra n constante d'intégration (notées plus haut A_1, A_2, …, A_n) à déterminer. On le fera à partir des conditions initiales imposées en électrocinétique par **la continuité de la tension aux bornes des condensateurs et de l'intensité traversant les bobines**.

Méthode : - Ecrire toutes les équations électriques « de base » à $t = 0^+$
(on pourra reprendre le système d'équations initial cf B-2-)
- Identifier les grandeurs électriques connues à 0^+ (en utilisant les continuités)
- Résoudre.

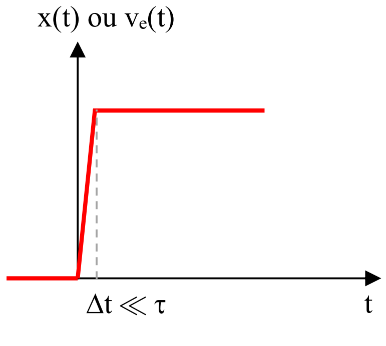
Cette étude doit être menée sur la solution de l'équation **avec second membre** $y(t) = y_{libre}(t) + y_{établi}(t)$

Dans la suite du cours, nous étudierons deus réponses d'un système linéaire : les réponses à une entrée continue ou à une entrée sinusoïdale (réponse harmonique ou sinusoïdale forcée). Ces deux études sont en fait générales et permettront de déterminer la réponse du système à une stimulation x quelconque.

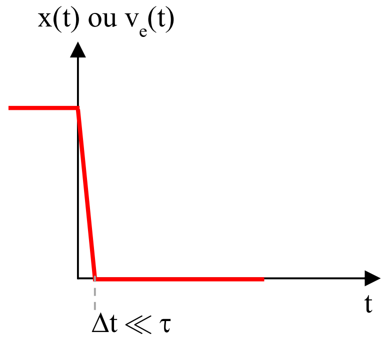
II- Excitation constante (continue) : régime transitoire et régime permanent

« Excitation continue » signifie que la grandeur d'entrée (souvent la tension d'entrée est indépendant du temps à partir d'un instant souvent pris comme origine des temps).

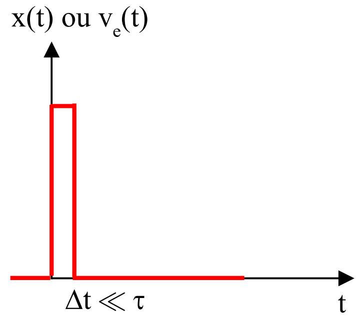
On rencontre fréquemment l'un des 3 cas suivants.



Réponse à l'échelon
ou réponse "indicielle"



Régime libre



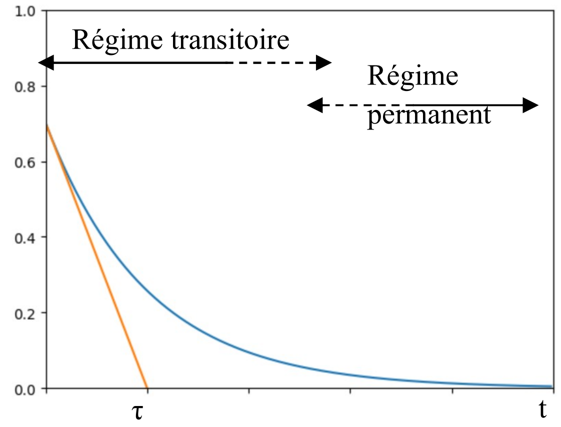
Réponse impulsionnelle

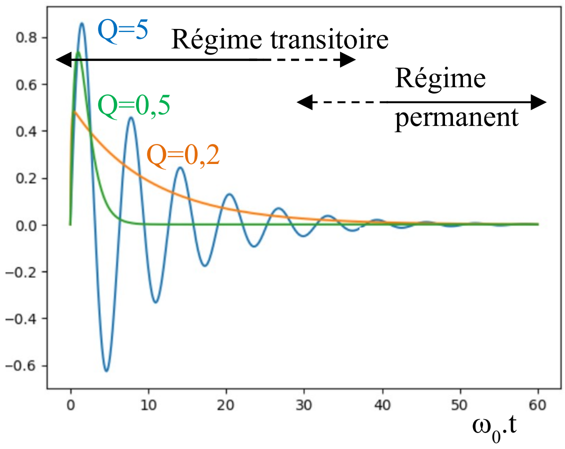
τ désigne ici un temps caractéristique du circuit (temps d'établissement du régime permanent ou d'extinction du régime libre) qui est :

- le temps τ lié à l'équation différentielle par un circuit du premier ordre
- un temps à définir à l'aide de ω_0 et Q pour un circuit du 2ème ordre (on verra qu'il s'agit de $\frac{Q}{\omega_0}$ ou $\frac{1}{Q\omega_0}$)

Exercice : donner $v_s(t)$ pour les circuits 1 et 2 (pour $Q > \frac{1}{2}$, $Q = \frac{1}{2}$ et $Q > \frac{1}{2}$) et identifier la constante de temps τ caractérisant l'établissement du nouveau régime établi dans chacun des 4 cas étudiés.

Régime transitoire





Temps de réponse à 95% : 3τ

$$\frac{\left|v_s(t>3\tau)-v_{s\infty}\right|}{\left|v_s(0^+)-v_{s\infty}\right|}<0,05$$

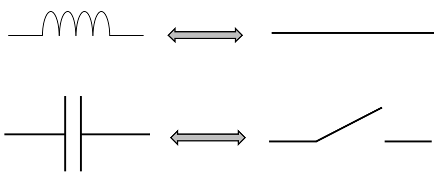
Temps de réponse à 99% : 5τ

$$\frac{\left|v_s(t>5\tau)-v_{s\infty}\right|}{\left|v_s(0^+)-v_{s\infty}\right|}<0,01$$

Pas d'expression simple pour $t_{95\%}$ ou $t_{99\%}$

Remarques :

- Conditions initiales :
  Certaines fois, il est simplement précisé que le système est dans un état donné (interrupteur dans une position donnée par exemple ou valeur particulier constante de la fem e) depuis « un temps très long ». Cela signifie « depuis un temps grand devant τ » et cela permet donc de traiter de le système en régime permanent continu :

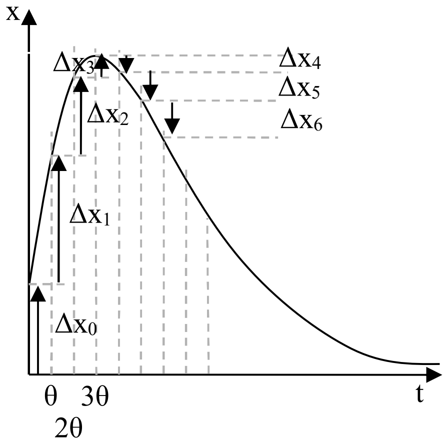
  

  Il sera parfois nécessaire d'apporter une information supplémentaire en précisant la charge du condensateur pour les temps négatifs.
- Régime établi continu (ou constant) :
  Le régime établi $y_{\text{établi}}(t)$ peut être obtenu à l'aide de l'équation différentielle, mais peut être aussi obtenu directement en travaillant sur le circuit équivalent en régime permanent continu (en faisant les substitutions indiquées ci-dessus). **Cette étude permet de vérifier le second membre de l'équation différentielle et doit donc toujours être menée**.

B- Complément : intérêt de la réponse indicielle (réponse à l'échelon)

En électricité, $x(t) = e(t) = E.\mathcal{U}(t)$ ou $x(t) = \eta(t) = I_o.\mathcal{U}(t)$. $U(t)=\begin{cases}0 & \forall t<0\\ 1 & \forall t>0\end{cases}$

Si l'on connaît la réponse, $r_{\mathcal{U}}(t)$, du filtre linéaire à un échelon unité, on peut connaître sa réponse à un signal quelconque .



Soit x(t) , la grandeur d'entrée . Cette grandeur peut être approchée par :

$$x_{app} = \Delta x_o.U(t) + \Delta x_1.U(t-\theta) + \Delta x_2.U(t-2\theta) + ..$$

$$x_{app} = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta x_k.U(t-k\theta)$$

Dans ce cas (linéarité + invariance dans le temps) :

$$y_{app} = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta x_k.r_U(t-k\theta)$$

L'approximation est d'autant meilleure que $\theta \to 0$.

En posant $k\theta = \tau$, $(k+1)\theta = \tau + d\tau$, soit $d\tau = \theta$:

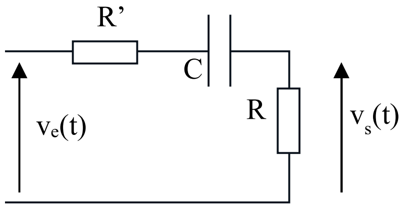
$$\Delta x_k = x(\tau) - x(\tau - d\tau) = \frac{dx}{dt}(\tau).d\tau$$

$$x(t) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{dt}(\tau).U(t-\tau).d\tau \qquad \text{et} \qquad y(t) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{dt}(\tau).r_U(t-\tau).d\tau$$

III- Excitation sinusoïdale : régime transitoire et régime permanent sinusoïdal

A- Excitation sinusoïdale

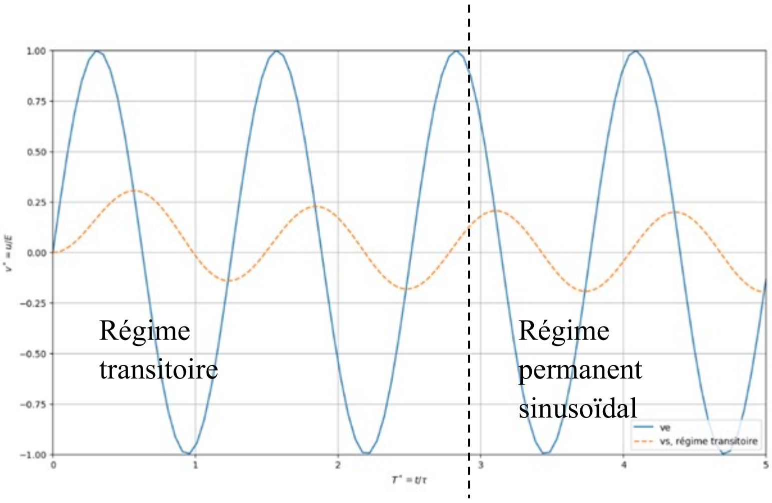
Reprenons le circuit 1 avec à partir de t = 0 $v_e(t) = E\sin(\omega t)$



Circuit 1

La réponse du circuit :

1. Régime transitoire (non sinusoïdal) de durée qq τ (ici $\tau = RC$)
2. Régime permanent sinusoïdal où toutes les grandeurs électriques du circuit sont sinusoïdales de même pulsation ω que v_e mais déphasés et d’amplitude différente.



Mathématiquement : $v_s(t) = v_{s1}(t) + v_{s2}(t)$

1. v_{s1} : solution (dite parfois « générale ») de l’équation homogène
   $v_{s1}(t) \xrightarrow{t \gg \tau} 0$
   Dépend des conditions initiales (qui permettent de déterminer les constantes apparaissant dans la forme générale des solutions).
2. v_{s2} : solution particulière de forme sinusoïdale de pulsation ω : $v_{s2}(t) = S_0 \sin(\omega t + \varphi)$
   S_0 et φ sont à déterminer pour que v_{s2} soit bien solution de l’équation différentielles (sont indépendants des conditions initiales.)

B- Etude de la RPS (ou RSF)

Il s'agit de la recherche de $v_{s2}(t)$ que nous appellerons simplement $v_s(t)$ par la suite (en sous entendant : « en RPS »)

Niveau « élémentaire » : on injecte la solution $S_0 \sin(\omega t + \varphi)$ dans l'équation différentielle et on cherche à quelle condition sur S_0 et φ cette fonction est bien solution de l'équation différentielle.

Exercice : trouver par cette méthode S_0 et φ (on ne procèdera PLUS JAMAIS ainsi)

Niveau « plus savant » : on utilise la notation complexe.

A $v_s(t) = S_0 \sin(\omega t + \varphi)$, on associe $\underline{v_s(t)} = S_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$ que l'on note $\underline{v_s(t)} = \underline{S_0}\, e^{j\omega t}$ avec $\underline{S_0} = S_0 e^{j\varphi}$

On a donc $v_s(t) = \mathrm{Im}\left(\underline{v_s(t)}\right) = \mathrm{Im}\left(\underline{S_0} e^{j\omega t}\right)$ (mais nous n'utiliserons quasiment jamais cette relation)

De même $v_e(t) = \mathrm{Im}\left(\underline{v_e(t)}\right)$ avec $\underline{v_e(t)} = E\, e^{j\omega t}$ noté $\underline{v_e(t)} = \underline{E}\, e^{j\omega t}$ avec $\underline{E} = E$ ($\phi_e = 0$)

$\underline{v_s(t)}$ ou $\underline{S_0}$ portent de façon simple à manipuler les informations d'amplitude et de phase de $v_s(t)$.

Les relations linéaires entre $v_e(t)$ et $v_s(t)$ sont toutes préservées en notation complexes.

L'équation différentielle sur $v_s(t)$ et $\underline{v_s(t)}$ conduit à une expression algébrique simple de $\underline{S_0}$ qui donne :

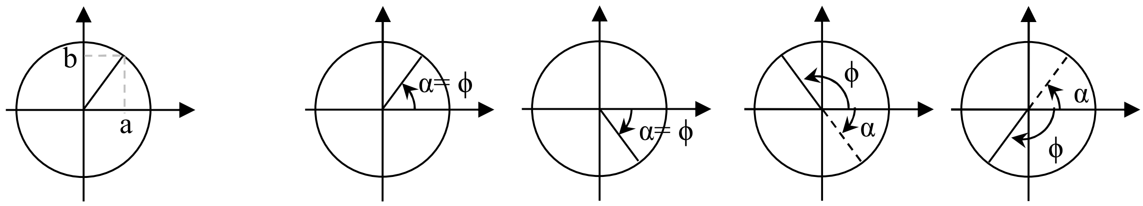
$$S_0 = \left|\underline{S_0}\right|$$

$$\varphi = \mathrm{Arg}\left(\underline{S_0}\right)$$

et donc $v_s(t) = S_0 \sin(\omega t + \varphi)$

Par exemple en reprenant l'exemple du circuit 1 : *à faire en exercice (équation différentielle en réels, passage en complexe, obtention de $\underline{S_0}$ puis de S_0 et φ*

Attention
$$\arg(a + jb) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) & \text{si } a > 0 \\ \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) \pm \pi & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

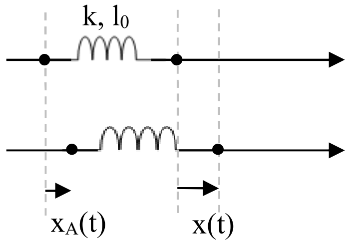


On pose	$a > 0$	$a > 0$	$a < 0$	$a < 0$
$\alpha = \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$	$b > 0$	$b < 0$	$b > 0$	$b < 0$
	$\alpha = \varphi \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$	$\alpha = \varphi \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$	$\alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$	$\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$
			$\varphi = \alpha + \pi$	$\varphi = \alpha - \pi$

Remarques pratiques :

1. Vérifier l'HOMOGENEITE : se rappeler que $RC\omega$, $\dfrac{L}{R}\omega$, $LC\omega^2$ sont des grandeurs adimensionnées.
2. Ne jamais calculer $\mathrm{Im}\left(\underline{v_s(t)}\right)$ pour avoir $v_s(t)$ mais calculer $\left|\underline{S_0}\right|$ et $\mathrm{Arg}\left(\underline{S_0}\right)$

3. Si l'excitateur st $a\cos(\omega t)$ plutôt que $a\sin(\omega t)$ alors on cherche $v_s(t)$ sous la forme $v_s(t)=S_0\cos(\omega t+\varphi)$ avec $\underline{v_s(t)}=S_0e^{j(\omega t+\varphi)}=\underline{S_0}\,e^{j\omega t}$ et $v_s(t)=\mathrm{Re}\left(\underline{v_s(t)}\right)=\mathrm{Re}\left(\underline{S_0}e^{j\omega t}\right)$ (aucune différence dans le traitement)
4. Cette méthode est généralisable à tout domaine où l'on étudie un système linéaire en RPS
Ex en mécanique : système ponctuel M de masse m astreint à se déplacer sans frottement sur un axe horizontal Ox. M est attaché à une extrémité d'un ressort sans masse de longueur à vide l0 et de constante de raideur k. L'autre extrémité du ressort est mise en mouvement (cf schéma ci-contre) :
$x_A(t)=X_0\sin(\omega t)$.
Déterminer en régime établi (sinusoïdal) le mouvement de M repéré par x(t)

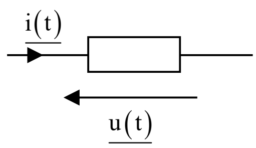


C- Impédance complexe

En électrocinétique, on peut aller plus loin dans l'utilisation de la notation complexe en l'introduisant dès le début de la mise en équation et non plus seulement après l'obtention de l'équation différentielle.

Lois fondamentales : loi de Kirchhoff $\begin{cases}\sum\limits_{1\,\text{maille}} u_k=0\\ \sum\limits_{1\,\text{noeud}} i_k=0\end{cases} \xrightarrow{\text{en complexes}} \begin{cases}\sum\limits_{1\,\text{maille}} \underline{u_k}=0\\ \sum\limits_{1\,\text{noeud}} \underline{i_k}=0\end{cases}$

Caractéristique des dipôles linéaires : impédance $\underline{Z}=\dfrac{\underline{u(t)}}{\underline{i(t)}}=\dfrac{\underline{U_0}}{\underline{I_0}}$

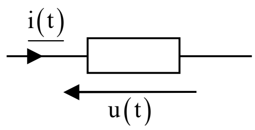


Eléments « purs » : $\underline{Z_R}=R$ $\qquad \underline{Z_L}=jL\omega$ $\qquad \underline{Z_C}=\dfrac{1}{jC\omega}$

Les impédances se manipulent comme les résistances en régime permanent continu. On retrouve en particulier les formules « **ponts diviseurs** » de tension ou de courant.
Exercice reprendre le circuit 1 et trouver la relation entre $\underline{v_s(t)}$ *et* $\underline{v_e(t)}$ *en utilisant les formules ponts diviseurs.*

Que représente $\underline{Z}$?

$$\underline{Z}=\frac{\underline{u(t)}}{\underline{i(t)}}=\frac{\underline{U_0}}{\underline{I_0}} \text{ avec } \underline{U_0}=U_0e^{j\varphi_u} \text{ et } \underline{I_0}=I_0e^{j\varphi_i}$$



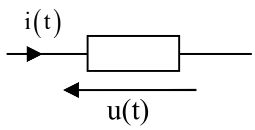
L'impédance est une notion abstraite qui contient de manière commode à manipuler :

$|\underline{Z}|=\dfrac{U_0}{I_0}=\dfrac{U_{eff}}{I_{eff}}$, impédance réelle (en Ω) qui permet de comparer les amplitudes ou valeurs efficaces des oscillations de tension et d'intensité.

$\mathrm{Arg}(\underline{Z})=\mathrm{Arg}(\underline{u})-\mathrm{Arg}(\underline{i})=\varphi_u-\varphi_i$ facteur de phase ; déphasage de u(t) par rapport à i(t)

D- Puissance algébrique reçue par un dipôle en RPS

Rappel : un dipôle traversé par un courant i(t) sous une tension u(t), EN CONVENTION RECEPTEUR reçoit algébriquement une puissance instantanée :
$p(t)=u(t).i(t)$



En RPS : u(t) et i(t) oscillent simultanément à ω ; $\langle u(t)\rangle = 0$ et $\langle i(t)\rangle = 0$ et p(t) oscillera à la pulsation **2ω** et $\langle p(t)\rangle \neq 0$ a priori.

$$\begin{aligned} i(t) &= I_0\cos(\omega t) \\ u(t) &= U_0\cos(\omega t+\varphi) \end{aligned} \qquad p(t) = I_0U_0\cos(\omega t)\cos(\omega t+\varphi)$$

$$p(t) = \underbrace{\frac{1}{2}I_0U_0\cos(\varphi)}_{\langle p\rangle} + \underbrace{\frac{1}{2}I_0U_0\cos(2\omega t+\varphi)}_{\text{oscille à } 2\omega \text{ autour de } \langle p\rangle}$$

Retenir $\boxed{\langle p(t)\rangle = \frac{1}{2}I_0U_0\cos(\varphi)}$

Remarque la relation liant u, i et p n'est pas une relation linéaire. Le produit $\underline{u(t)}.\underline{i(t)}$ ou $\underline{U_0}.\underline{I_0}$ n'a pas de sens.

E- Valeur efficace

La valeur efficace d'une grandeur s(t) (quelle que soit sa forme) est définie par $\boxed{S_{eff} = \sqrt{\langle s^2\rangle}}$

- Si $s(t) = S_0\cos(\omega t+\varphi)$ alors $S_{eff} = \frac{S_0}{\sqrt{2}}$
- Mais si s n'est pas sinusoïdal, ce n'est pas le cas
  Par exemple si s est un signal créneau de moyenne nulle et d'amplitude S_0 : $S_{eff} = S_0$;
  si s est un signal triangulaire de moyenne nulle et d'amplitude S_0 : $S_{eff} = \frac{S_0}{\sqrt{3}}$

Interprétation de U_{eff}
Il s'agit de la valeur d'une tension continue (respectivement courant continu) qui appliquée à une résistance R produirait le même effet joule, donc la même élévation de température que ce que produit en moyenne la tension u(t) (respectivement le courant i(t)) étudiée.

En effet en RPS : $\langle p\rangle = \frac{U_{eff}^2}{R} = RI_{eff}^2$ en continu : $p = \frac{U^2}{R} = RI^2$

Un voltmètre numérique mesure :

- En mode DC : $\langle u\rangle$
- En mode AC : la valeur efficace de $u - \langle u\rangle$
- En mode AC+DC : la valeur efficace de u

Remarque : un voltmètre numérique récent est dut « TRMS » (True Root Mean Square) et donne correctement la tension efficace quelle que soit la forme du signal.
Ceci se fait par mesure thermique en appliquant la tension à une résistance, en mesurant l'élévation de température et en comparant à l'effet d'une tension continue.