

Filtrage et analyse de Fourier

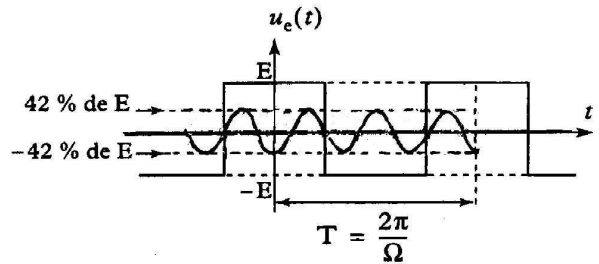
Exercice 1 : Action d'un filtre sur une tension carrée.

On considère un filtre passe-bande du second ordre de transmittance maximale H_0 égale à 1, et de pulsation propre ω_0 et de facteur de qualité Q inconnus. On applique un créneau $u_e(t)$, représenté ci-dessous, en entrée du filtre et on analyse le signal de sortie $u_s(t)$ grâce à un analyseur de spectre.

La tension $u_e(t)$ est représentée ci-contre. On a également représenté, en concordance de temps, **un des harmoniques** de la tension de sortie $u_s(t)$.

On donne la décomposition de Fourier de $u_e(t)$, en se limitant à ses trois premiers harmoniques :

$$u_e(t) = \frac{4E}{\pi} \left(\cos(\Omega t) - \frac{1}{3} \cos(3\Omega t) + \frac{1}{5} \cos(5\Omega t) - \dots \right)$$



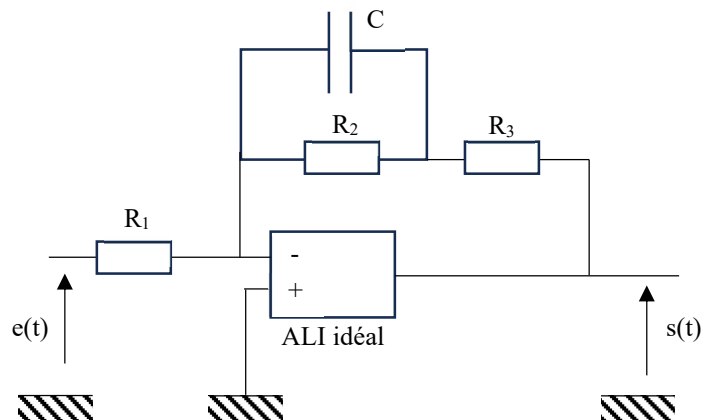
- 1- Tracer le spectre de $u_e(t)$ et le gain $G(\omega)$ du filtre sur un même graphique. Déterminer le rapport Ω/ω_0 , ainsi que les expressions, en fonction de E et Q , des amplitudes des autres harmoniques de $u_s(t)$. On se limitera aux trois premiers harmoniques non nuls.
- 2- Pouvaient-on répondre à la question précédente sans savoir que $H_0 = 1$?
- 3- Ce montage peut-il servir d'intégrateur, et si oui, à quelles conditions ? Donner alors l'allure de la tension de sortie, si la tension d'entrée est un créneau.
- 4- Mêmes questions pour un fonctionnement en dérivateur.

Exercice 2 : Identification de filtres.

- 1- Déterminer la nature et la fréquence de coupure à -3 dB d'un filtre tel qu'un signal d'entrée triangulaire d'amplitude 1 V et de fréquence f donne en sortie un créneau d'amplitude 32 mV pour $f = 50$ Hz, et un signal triangulaire d'amplitude 1 V pour $f > 10$ kHz.
- 2- Déterminer la nature et la fréquence de coupure à -3 dB d'un filtre tel qu'un signal d'entrée en créneau d'amplitude 1 V et de fréquence f donne en sortie un créneau d'amplitude 0,5 V et déphasé de π pour $f < 100$ Hz, et un signal triangulaire d'amplitude 60 mV pour $f = 20$ kHz.

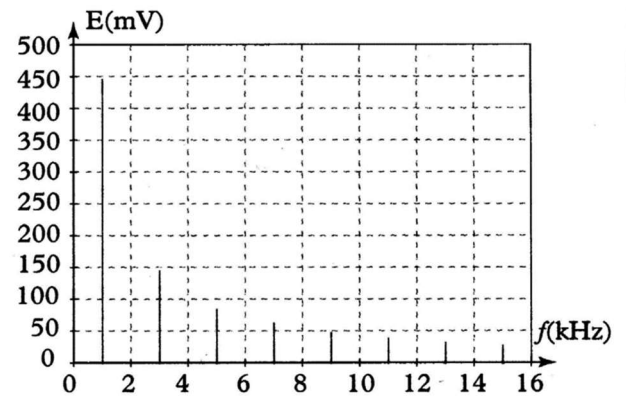
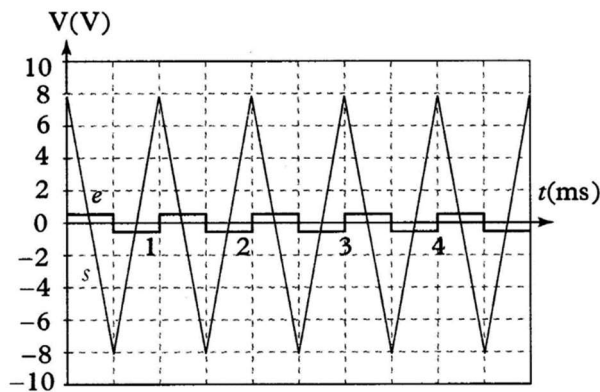
Exercice 3 : Etude d'un filtre d'ordre 1.

On étudie le circuit ci-dessous contenant un Amplificateur Linéaire Intégré (A.L.I.) idéal.



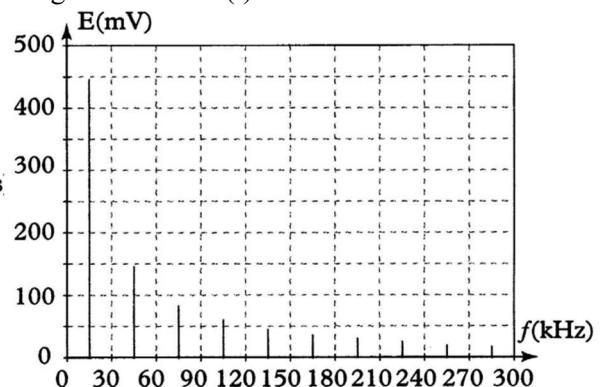
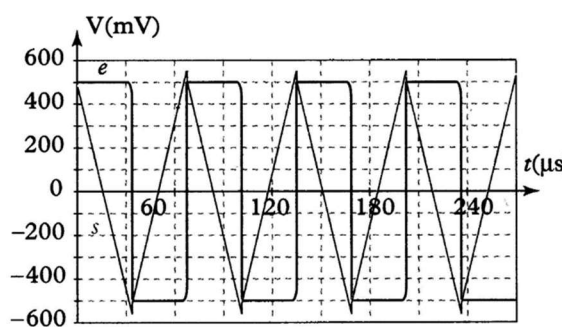
$$\begin{aligned} R_1 &= 1\text{ k}\Omega \\ R_2 &= 220\text{ k}\Omega \\ R_3 &= 47\text{ }\Omega \\ C &= 15\text{ nF} \end{aligned}$$

- 1- Etablir l'expression de la fonction de transfert. Représenter les diagrammes de Bode
- 2- On impose une tension d'entrée $e(t)$ en créneau, de fréquence 1 kHz. On donne ci-dessous les chronogrammes temporels de $e(t)$ et du signal de sortie $s(t)$ ainsi que le spectre (en valeur efficaces) du signal d'entrée :



Justifier l'allure du signal de sortie (fréquence, valeur moyenne, forme triangulaire) ainsi que les valeurs des pentes des droites qui apparaissent.

- 3- On modifie la fréquence du signal d'entrée qui passe à 15 kHz. Les chronogrammes de $e(t)$ et $s(t)$ ainsi que le spectre (en valeurs efficaces) du signal d'entrée $e(t)$ sont à nouveau relevés :



Justifier la nouvelle allure du signal de sortie $s(t)$ et, en particulier, la présence de distorsions au voisinage des instants de basculement de $e(t)$; pouvait-on prévoir l'ordre de grandeur de l'amplitude de ces distorsions, de l'ordre de 50 mV ?

Exercice 4 : Distorsion harmonique d'un amplificateur ; T.D.H.

Un amplificateur imparfaitement linéaire possède la caractéristique statique suivante :

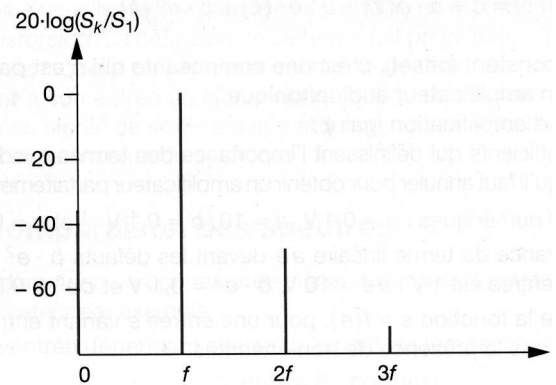
$$s(t) = 2 \times e(t) - \frac{2}{15} \times e^3(t) \quad \text{avec } s \text{ et } e \text{ en Volts.}$$

On alimente l'amplificateur avec une tension $e(t)$ sinusoïdale de pulsation ω .

- 1- Déterminer la décomposition de Fourier du signal de sortie $s(t)$, puis l'amplitude maximale A_m que l'on peut donner à $e(t)$ si on tolère en sortie la présence d'harmoniques dont les amplitudes n'excèdent pas 1% de celle du fondamental.
- 2- On choisit maintenant l'amplitude A_m pour le signal d'entrée. Le défaut de linéarité est-il visible sur le graphe de la caractéristique statique de l'amplificateur ? Comment ce graphe peut-il être obtenu expérimentalement ?
Le défaut est-il visible sur un spectre de Fourier tracé en échelle linéaire ? sur un spectre de Fourier tracé en échelle logarithmique avec une dynamique de 60 dB pour l'axe des ordonnées ? Comment ce spectre peut-il être obtenu expérimentalement ?

Un second amplificateur possède la caractéristique statique suivante : $s(t) = 0,1 + 10 \times e(t) + 0,1 \times e^2(t) + 0,01 \times e^3(t)$ avec s et e en Volts.

Le spectre de $s(t)$, obtenu pour un signal d'entrée sinusoïdal d'amplitude 1 V, est donné sur la figure ci-contre ; l'amplitude de l'harmonique de rang k est notée S_k .



- 3- Sans effectuer de calculs explicites, expliquer la présence des différents termes de ce spectre.

- 4- On appelle Taux de Distorsion Harmonique du

signal $s(t)$ la quantité notée T.D.H. et définie par $\text{T.D.H.} = \sqrt{\sum_{k>1} (S_k^2 / 2S_{\text{eff}}^2)}$ où S_{eff} est la valeur efficace de $s(t)$.

En utilisant le théorème de Parseval, proposer une interprétation énergétique de cette expression et justifier la dénomination « taux de distorsion harmonique ».

- 5- Il existe une autre quantité appelée taux de distorsion harmonique « par rapport au fondamental », notée T.D.H._f et définie par : $\text{T.D.H.}_f = \sqrt{\sum_{k>1} S_k^2} / S_1$.

Pour quel type de signaux les deux définitions coïncident-elles quasiment ? Calculer numériquement le T.D.H._f du signal $s(t)$ à l'aide des données du spectre ci-dessus ; donner sa valeur en décibels.

Exercice 5 : Limitations usuelles des amplificateurs.

(indication en fin de sujet si nécessaire)

On étudie un quadripôle amplificateur de gain G réglable, alimenté par un générateur de f.é.m.

$e(t) = E \sin(2\pi ft)$, dont la sortie est reliée à une résistance d'utilisation R_u . La notice de

l'amplificateur donne les indications suivantes sur les limitations de fonctionnement du quadripôle :

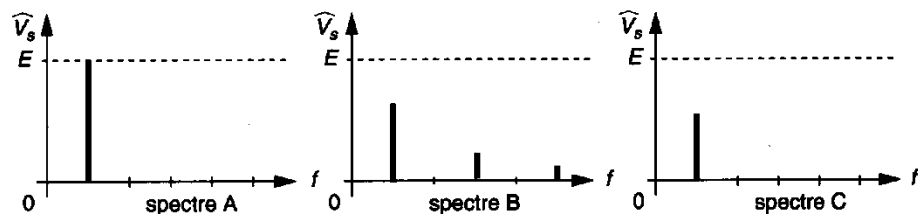
- Saturation de la tension de sortie à partir de ± 15 V.
- Saturation du courant de sortie à partir de ± 20 mA.
- Vitesse limite de variation de la tension de sortie : 10^7 V.s⁻¹.
- Produit *Gain* $\times$ *Bande passante* : 10^6 Hz.
(Il existe une fréquence de coupure haute f_c au fonctionnement amplificateur, telle que $f_c \times G = 10^6$ Hz)

On fixe le gain à la valeur $G = 1$ et on cherche à étudier l'effet de ces défauts sur le spectre de Fourier de la tension de sortie $v_s(t)$ du quadripôle.

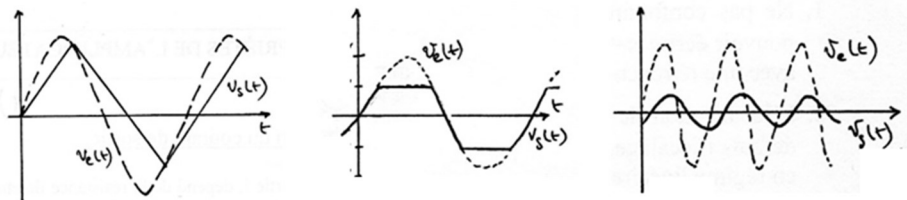
- 1- Que vaut $v_s(t)$ en l'absence de défauts. Quel est son spectre ? Quel peut être l'intérêt d'un tel quadripôle ?
- 2- On détecte la tension $v_s(t)$ aux bornes de R_u , dont on fait l'analyse de Fourier, pour différentes valeurs de f , E et R_u . Avec $R_u = 10$ k Ω , on réalise successivement l'expérience pour :

Expérience 1 : $E = 20$ V ; $f = 1$ kHz	Expérience 2 : $E = 1$ V ; $f = 1$ kHz	Expérience 3 : $E = 1$ V ; $f = 1$ MHz
--	---	---

On obtient les 3 spectres A, B et C de la figure ci-dessous : relier chaque expérience au spectre qui lui correspond et interpréter. Pour le spectre B, interpréter l'absence d'harmoniques de rang pair.



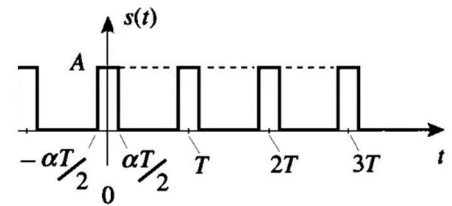
- 3- Avec $E = 10$ V et $f = 1$ kHz, une harmonique apparaît dans le spectre de $v_s(t)$ lorsque R_u devient inférieure à 500 Ω : interpréter.
- 4- Avec $E = 10$ V et $R_u = 10$ k Ω , une harmonique apparaît dans le spectre de $v_s(t)$ lorsque f devient supérieure à 1 MHz : interpréter.



Indication exercice 5 :
Certains des signaux obtenus lors des différentes expériences ont la forme temporelle suivante

Exercice 6 : Peigne de Dirac et échantillonnage d'un signal.

- 1- Déterminer la décomposition en série de Fourier du signal $s(t)$ rectangulaire périodique représenté ci-contre, d'amplitude A et de rapport cyclique α ; α est le rapport de la durée de l'état $s = A$ (durée d'un « impulsion ») sur la période T . On introduira la fonction « sinus cardinal » : $\text{sinc}(x) = \sin(x) / x$.
Représenter le spectre du signal pour les 3 valeurs suivantes de α : $1/2$; $1/6$; $1/20$.

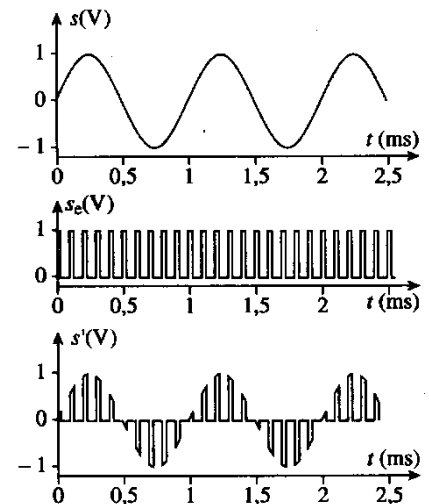


- 2- En déduire la décomposition de Fourier et le spectre d'une suite périodique d'impulsions infiniment brèves, obtenue comme la limite du signal précédent lorsque α tend vers zéro, l'aire $I = \alpha TA$ des impulsions étant maintenue constante ; un tel signal est appelé « peigne de Dirac ».

Afin de numériser un signal analogique $s(t)$, on doit tout d'abord « l'échantillonner », c'est-à-dire accéder à la valeur prise par ce signal à différentes dates périodiquement réparties : $s(0)$, $s(T_e)$, $s(2T_e)$, etc... Ce sont ces valeurs prises par s qui seront converties en suites de 0 et de 1 (codage binaire), transmises puis « décodées » afin de récupérer un signal analogique identique à $s(t)$.

$f_e = 1/T_e$ est appelée fréquence d'échantillonnage.

Pour raisonner, on peut supposer que l'opération d'échantillonnage revient à multiplier analogiquement le signal $s(t)$ par une suite périodique d'impulsions très brèves (idéalement un peigne de Dirac) de fréquence f_e ; le signal produit $s'(t)$ obtenu est appelé signal échantillonné.



- 3- Dans le cas où $s(t)$ est une pure sinusoïde de fréquence f , comme sur le schéma ci-contre, déterminer le spectre de $s'(t)$.
- 4- Que devient ce spectre lorsque $s(t)$ est un signal périodique non sinusoïdal contenant l'essentiel de son poids spectral entre les fréquences 0 et f_m ? Représenter graphiquement.
- 5- Montrer qu'il est possible, sous condition, de récupérer par filtrage le signal original $s(t)$ à partir du signal échantillonné $s'(t)$. On précisera la nature du filtrage à réaliser et on montrera qu'il est nécessaire d'avoir échantillonné le signal avec une fréquence $f_e > 2f_m$.
Ce résultat, tout à fait fondamental en traitement du signal, constitue le THEOREME DE SHANNON.