Problème 2 : *A rendre mardi 16 septembre 2025*

Comme vous êtes 5/2, nous allons profiter de ce début d'année pour aborder deux énoncés « originaux » posés aux Mines ces dernières années, les Mines ayant en effet la particularité de poser des épreuves parfois assez originales et déroutantes… Ce problème correspond à peu près à une épreuve des Mines complète ; les deux parties (en réalité tirées de deux problèmes différentes) sont indépendantes et les données numériques relatives à la partie II se trouvent en fin d'énoncé.

PARTIE I : Echo de la grande pyramide de Chichén Itzá.

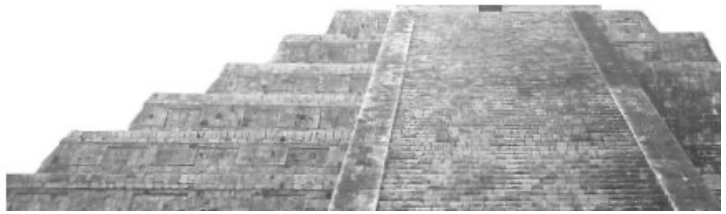
Calculatrice interdite

• Valeurs numériques : lorsqu'une valeur numérique non nulle est demandée, l'écart relatif de la réponse par rapport à la valeur exacte ne doit pas excéder 20%.

Sur le site archéologique de Chichén Itzá, situé dans le Yucatán à 200 km à l'ouest de Cancún, se trouve le temple Maya Cuculcán, en forme de pyramide à base carrée (Fig. 6). Sur chaque face de la pyramide, se trouve un grand escalier central comportant 91 marches qui culmine à $H = 24\,\text{m}$ au-dessus du sol (Fig. 7).
Ce monument, érigé autour du X^e siècle de notre ère, est classé au patrimoine mondial de l'UNESCO. Une de ses particularités a fait l'objet d'études archéoacoustiques : un clap produit en frappant dans ses mains face à l'escalier retourne un écho qui imite, de manière stupéfiante, le chant de l'oiseau sacré endémique quetzal (pharomachrus mocinno).
La question se pose alors de savoir si ce monument a été érigé en respectant les contraintes acoustiques de reproduction du gazouillement de l'oiseau, ou bien s'il s'agit d'une simple coïncidence.

Si la question reste ouverte, l'analyse physique apporte à l'archéologie quelques éléments notamment en permettant de comprendre l'origine de ce phénomène. Cette partie s'appuie sur les fondamentaux des phénomènes ondulatoires. Aucune connaissance spécifique d'acoustique n'est requise.

FIGURE 6 – Vue d'une arête de la grande pyramide Maya de



A. — Sonogramme

On enregistre, à l'aide d'un microphone, le son d'une note de musique tenue produite en sifflant avec la bouche.

On note $s_a(t)$ le signal obtenu. Le spectre d'amplitude du signal en sortie du microphone est donné sur la figure 8, l'échelle verticale étant graduée en décibels. L'amplitude du pic 1 vaut $a_1 = 100\,\text{mV}$.

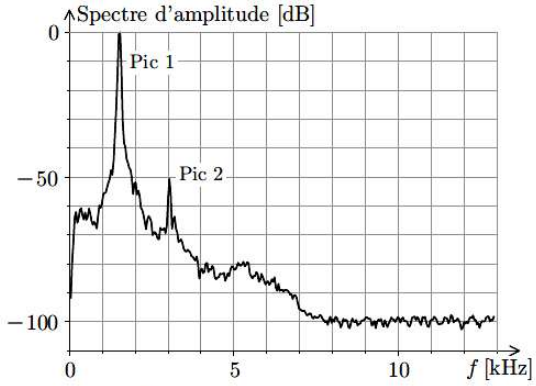


FIGURE 8 – Spectre d'amplitude d'un son sifflé tenu.

❑ **16** — Déterminer la fréquence f_1 du fondamental (pic 1) de cette note ainsi que l'amplitude a_2 du pic 2. On donne $10^{0,5} \approx 3{,}16$.

Les pics 1 et 2 sont assimilés à des composantes harmoniques et on néglige tout autre contenu spectral. On note T_a la durée totale de l'enregistrement et f_e la fréquence d'échantillonnage. La méthode d'analyse spectrale employée génère un spectre dont la résolution spectrale, notée δf, est l'inverse de la durée d'acquisition du signal.

❑ **17** — Calculer numériquement la plus petite valeur de f_e respectant la condition de Nyquist-Shannon, et la durée d'acquisition T_a donnant une résolution spectrale de 100 Hz.

Un sonogramme est une représentation graphique permettant de visualiser l'évolution des composantes harmoniques d'un son au cours du temps. Dans sa version simplifiée, c'est un diagramme à deux dimensions ayant en abscisse le temps et en ordonnée les fréquences. À un instant t donné, une composante harmonique de fréquence f est représentée par un point de coordonnées $(t,\ f)$.
Le sonogramme simplifié de $s_a(t)$ est représenté sur la figure 9a. Dans un sonogramme complet, on ajoute l'information sur l'amplitude des composantes harmoniques en grisant les points du diagramme à l'aide d'une échelle allant du blanc pour les faibles amplitudes ($< -50\,\text{dB}$), au noir pour les fortes ($> 0\,\text{dB}$). Le sonogramme complet de $s_a(t)$ est donné sur la figure 9b.
Pour construire un sonogramme, on calcule les spectres successifs du signal entre les dates nT_a et $(n+1)T_a$, n étant un entier positif ou nul et T_a, la durée des intervalles temporels d'acquisition.

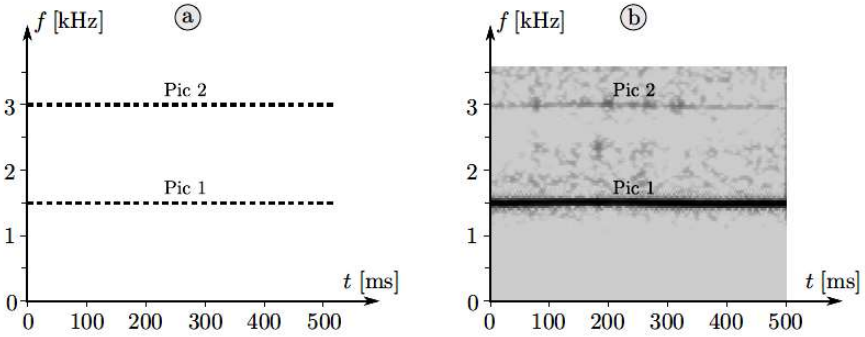


FIGURE 9 – Sonogramme d'un son sifflé tenu a) simplifié b) complet.

❑ **18** — On note τ la durée totale de l'enregistrement sonore. La résolution spectrale δf du sonogramme dépend-elle de T_a ou de τ ? Combien de pixels (rectangles élémentaires composant le sonogramme) comporte un sonogramme de fréquence maximale f_M et de durée τ ? Effectuer l'application numérique lorsque $f_M = 3{,}5\,\text{kHz}$ et $\tau = 500\,\text{ms}$.

On produit un nouveau son sifflé, $s_b(t)$, mais cette fois, de hauteur décroissante (donc vers les sons graves). Ce son possède encore deux composantes harmoniques, mais la fréquence f_1' du fondamental décroît au cours du temps de manière affine : $f_1'(t) = f_1 \times (1 - t/\tau_d)$, $\tau_d > 0$ étant une constante temporelle.

❑ **19** — Quelle condition doit vérifier τ_d afin que l'on puisse suivre l'évolution temporelle de la fréquence du fondamental sur le sonogramme ? Construire le sonogramme simplifié de $s_b(t)$ dans l'intervalle temporel $[0;\ 0{,}5\,\tau_d]$. On prendra soin de mentionner sur le graphique toutes les informations connues.

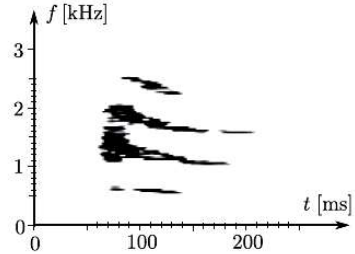


FIGURE 10 – Sonogramme du quetzal

Le chant d'un oiseau est plus riche en harmoniques que le sifflement précédent.

Le sonogramme d'un quetzal *jeune* est représenté sur la figure 10 extraite de Lubman, D., J. Acoust. Soc. Am. 112 (5), 2008.

❑ **20** — Déterminer la durée approximative τ_q du chant du quetzal puis mesurer, à la date $t = 140\,\text{ms}$, la fréquence $f_{q,1}$ du fondamental du chant ainsi que celles $f_{q,i}$ (i entier) des autres harmoniques visibles sur le sonogramme.

B. — Diffraction du son par une marche de l'escalier

Lorsque l'on frappe dans ses mains en face de l'escalier, depuis une position S que l'on supposera voisine du sol (Fig. 11), le clap produit se propage dans l'air en direction des marches. Ces dernières sont modélisées par des obstacles de petite dimension, qu'on localise arbitrairement en S_n (les arêtes des marches), n allant de 0 à $N = 91$. On note $a = 20\,\text{m}$ la distance entre S et le bas S_0 des marches de la pyramide. La hauteur $b = 26{,}3\,\text{cm}$ des marches est égale à leur profondeur de sorte que les arêtes S_n soient contenues dans un plan formant un angle de 45° par rapport au plan horizontal.

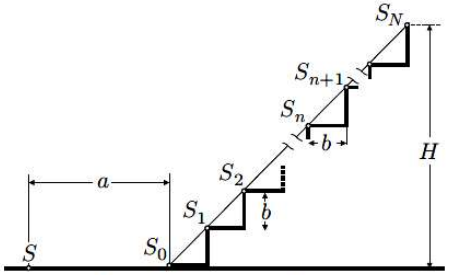


FIGURE 11 – Les marches de la pyramide

L'hypothèse testée est que l'écho entendu par l'auteur du clap, ressemblant à s'y méprendre au chant du quetzal, résulte de la diffraction du son sur les marches de l'escalier.

Le clap émis en S, à un instant pris comme origine temporelle, est un signal bref, noté $s(t)$ au point d'émission S. La distance entre S et l'arête de la $n-$ième marche est appelée $d_n = SS_n$. Pour modéliser la propagation du son, on note $\Psi(M,t)$ la fonction qui décrit l'onde sonore en un point M de l'espace à l'instant t : par exemple ici $\Psi(S,t) = s(t)$. On note $c_s \approx 340\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ la célérité du son dans l'air. On assimilera la propagation de l'onde le long de l'axe SS_n à une propagation unidimensionnelle linéaire non dispersive ; ainsi, on ignore toute variation d'amplitude au cours de la propagation. Lorsque l'onde atteint une arête S_n, elle est « renvoyée » dans toutes les directions (par diffraction), et en particulier, dans la direction S_nS. On suppose qu'après diffraction, la fonction décrivant l'onde retour, notée $\Psi'(M,t)$, dont la propagation est encore supposée unidimensionnelle (modélisation identique à celle de l'onde incidente), s'écrit en S_n : $\Psi'(S_n,t) = \kappa\Psi(S_n,t)$ où κ est un facteur (nombre sans dimension) indépendant de n.

❑ **21** — Exprimer $\Psi(S_n,t)$ puis $\Psi'(S,t)$ en fonction notamment de la fonction s.

Le spectre du clap $s(t)$ dans le domaine audible est continu : toutes les fréquences y sont présentes. On supposera par ailleurs qu'elles ont toutes la même amplitude. On considère une composante harmonique $s_\omega(t)$ du clap, de pulsation ω, dont on suppose la phase $\phi(t)$ nulle à l'origine temporelle soit $s_\omega(t) = s_m\cos[\phi(t)]$. On prendra $\phi(t) = \omega t$ et on considère que s_m ne varie pas dans le temps.

❑ **22** — Exprimer la phase $\phi_n'(t)$ à l'instant t de la composante harmonique de pulsation ω de l'onde retour en S diffractée en S_n, en fonction notamment de d_n.

C. — Superposition constructive en S

Le clap étant bref, on suppose seules deux marches consécutives diffractent le son incident. On note la différence de phase en S entre les deux ondes retour diffractées $\Delta\phi_n' = \phi_n'(t) - \phi_{n+1}'(t)$.

❑ **23** — Exprimer $\Delta\phi_n'$ en fonction notamment des distances d_n et d_{n+1}.

On fait l'hypothèse que les seules fréquences audibles sont celles pour lesquelles les ondes diffractées se superposent constructivement.

❑ **24** — Déduire de cette hypothèse l'ensemble des fréquences $\{\nu_m,\ m \in \mathbb{N}\}$ entendues lors du retour du son diffracté par les marches S_n et S_{n+1}, en fonction notamment des distances d_n et d_{n+1}.

❑ **25** — Exprimer d_n en fonction de a, b et n. Calculer l'expression exacte de $d_{n+1}^2 - d_n^2$. On admet que la condition de l'expérience $a \gg b$ permet d'écrire $d_n + d_{n+1} \simeq 2d_n$: en déduire l'expression approchée suivante $\nu_1 \simeq \dfrac{c_s}{2ab}\,g(n)d_n$ où $g(n)$ est une fonction que l'on explicitera.

La figure 12 donne la représentation graphique de $g(n)d_n$ en fonction de d_n pour les 91 valeurs de n. Elle permet d'éviter des calculs fastidieux à la main...

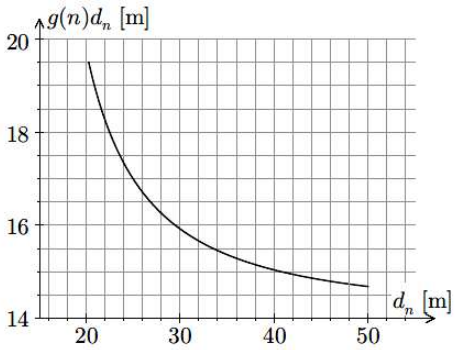


FIGURE 12 – $g(n)d_n$ en fonction de d_n

❑ **26** — En exploitant la figure 12 déterminer la distance d_N entre le sommet de l'escalier et S. On fixe l'origine temporelle à l'instant du clap. Calculer numériquement la date t_1 d'arrivée du début de l'écho en S, puis celle t_N de fin de l'écho. Combien de temps l'écho dure-t-il ?

❑ **27** — Calculer numériquement les fréquences $\nu_1(t_1)$ et $\nu_1(t_N)$.

❑ **28** — Sur la feuille réponse, tracer l'allure du sonogramme simplifié de l'écho comportant le fondamental du son ainsi que les trois harmoniques qui le suivent. On marquera d'une croix bien visible les points du sonogramme d'abscisses t_1 et t_N.

❑ **29** — Comparer le sonogramme construit à la question précédente, au sonogramme du quetzal (Fig. 10). L'écart fréquentiel est-il négligeable ? L'écart se réduirait-il si l'enregistrement était celui d'un oiseau adulte ?

FIN DE LA PARTIE I

PARTIE II : Détection et transmission des signaux bruités.
Calculatrice autorisée.

II. — Détection d'un signal faible

II.A. — Extraction d'un signal faible du bruit par effet de moyenne

Un détecteur enregistre un spectre en le décomposant sur plusieurs canaux numérotés de 1 à N. Chacun de ces canaux représente une bande de fréquence très étroite.
Lors d'une séquence d'acquisition, le détecteur enregistre une série de valeurs $x_k = s_k + b_k$ pour k variant de 1 à N. L'éventuel signal s_k est celui dont la détection est souhaitée. Le signal b_k est un parasite appelé bruit ; différents phénomènes physiques sont à l'origine du bruit, à commencer par l'agitation thermique des porteurs de charges.
Le bruit considéré, b_k, prend une valeur aléatoire de moyenne b indépendante de k. La dispersion autour cette moyenne est supposée gaussienne d'écart-type σ ; c'est-à-dire que pour un grand nombre n d'acquisitions indépendantes dont les résultats sont ajoutés canal par canal, la valeur moyenne du signal sommé sera nb et l'ordre de grandeur de la dispersion de chaque coté de cette valeur moyenne sera $\sqrt{n}\,\sigma$.

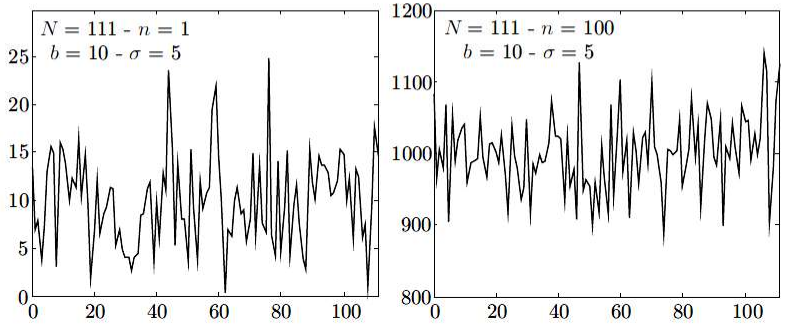


FIGURE 3 – Acquisition d'un bruit ($s_k = 0$ pour tout k) sur $N = 111$ canaux avec $b = 10$ et $\sigma = 5$. La figure de gauche représente 1 acquisition, celle de droite la somme canal par canal de 100 acquisitions indépendantes.

❑ **13** — Représenter l'allure du graphe que l'on pourrait obtenir après 2500 acquisitions, l'axe des ordonnées étant clairement gradué dans sa partie utile.

On considère maintenant qu'en plus du bruit gaussien d'amplitude $b = 10$ et d'écart-type $\sigma = 5$ présent constamment sur chaque canal, un signal utile non nul, constant et d'amplitude 1 est présent uniquement sur les canaux 34 et 67 à chaque acquisition.

❑ **14** — Le signal utile est-il détectable par une seule acquisition ? Représenter l'allure de la somme canal par canal de 2500 acquisitions. Le signal est-il devenu détectable ?

❑ **15** — Dans le cadre d'un bruit de dispersion σ et d'amplitude b, estimer le nombre n d'acquisitions permettant de faire apparaître un signal constant d'amplitude s_p dans le canal p.

Transmission d'un signal bruité

Précisons tout d'abord quelques notations :

- Si P est une puissance, on notera $P^{\text{db}} = 10\log_{10} P$ sa valeur en décibels ;
- Si P désigne la puissance d'un signal et P_B la puissance du bruit B, on notera $\mathscr{R}^{\text{db}}$ le rapport signal sur bruit exprimé en décibels, soit $\mathscr{R}^{\text{db}} = 10\log_{10}\left(\dfrac{P}{P_B}\right)$;
- Lorsqu'un signal traverse un équipement, on note respectivement P_E et P_S les puissances d'entrée et de sortie, et γ le gain défini par $\gamma = \dfrac{P_S}{P_E}$.

Atténuation de $\mathscr{R}$ par un câble de transmission

On considère la propagation d'un signal dans une ligne assimilée à un axe $(O,\widehat{u}_x)$; la puissance de ce signal à l'abscisse x est notée $P(x)$.

❑ **20** — Construire un modèle usuel dans lequel la puissance absorbée par la ligne de transmission dans un élément de longueur dx est localement proportionnelle au produit $P(x)dx$. En déduire qu'après une longueur ℓ entre l'entrée E et la sortie S de la ligne, on a $P_S^{\text{db}} = P_E^{\text{db}} - \lambda$, où le facteur d'atténuation λ s'exprime en fonction des caractéristiques d'absorption et de ℓ.

On introduit dans ce modèle un bruit d'origine thermique de puissance moyenne P_B, présent sur toute la ligne.

❑ **21** — Établir dans ce cas la relation entre λ, $\mathscr{R}_E^{\text{db}}$ et $\mathscr{R}_S^{\text{db}}$. A quelle condition le signal de sortie sera-t-il utilisable ? Que devra-t-on faire pour transmettre des signaux à grande distance avec des lignes de caractéristiques imposées ?

Transmission du bruit par une chaîne d'équipements

On s'intéresse maintenant à un signal traité par une suite d'appareils en cascade : amplificateurs, filtres, etc. Afin de prendre en compte l'action de ces instruments sur le bruit, par analogie avec le phénomène d'atténuation, on définit le facteur de bruit F d'un instrument par la relation $F = \mathscr{R}_E^{\text{db}} - \mathscr{R}_S^{\text{db}}$. On supposera que F est positif.

❑ **22** — Montrer que pour un instrument donné, de facteur de bruit F et de gain γ, recevant en entrée un signal bruité par B_E, on a $P_{B_S} = f\gamma P_{B_E}$. On vérifiera que $f > 1$ et on exprimera f en fonction de F.

Les instruments sont maintenant en série (ou cascade). L'instrument k est caractérisé par un couple (γ_k,f_k). La puissance du bruit entrant dans chaque instrument est supposée indépendante de ces instruments, elle sera noté P_{B_E}. La chaîne est supposée linéaire, c'est-à-dire qu'en notant P_{S_k} la puissance en sortie de l'instrument k on aura $P_{S_k} = \gamma_k(P_{S_{k-1}} - P_{B_E}) + P_{B_{S_k}}$ pour tout entier $k \geq 2$. La chaîne est dite auto-alimentée, cela signifie que $P_{S_1} = P_{B_{S_1}}$. On peut donc schématiser la chaîne de traitement par la figure 4.

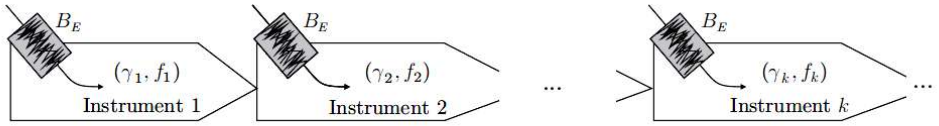


FIGURE 4 – Modélisation d'une chaîne de traitement bruitée

❑ **23** — Déterminer l'expression de P_{S_2}. On pose $\gamma_{12} = \gamma_1\gamma_2$, déterminer l'expression de f_{12} qui permettrait de caractériser l'ensemble des deux premiers instruments par un couple (γ_{12},f_{12}) dans une chaîne auto-alimentée équivalente.

❑ **24** — On pose $\gamma_{13} = \gamma_3\gamma_{12}$, après avoir déterminé f_{13}, démontrer la loi de Friis donnant le facteur de bruit f_{1n} d'un instrument équivalent à l'association en cascade de n instruments. Quel est l'instrument qui va déterminer la qualité de la chaîne dans une association en cascade de n amplificateurs ?

Exemple de bruit thermique élémentaire

Considérons un condensateur idéal de capacité C, chargé sous une tension constante U, en équilibre thermique à la température T avec un circuit électrique. L'agitation thermique provoque des échanges aléatoires de charges entre le condensateur et le circuit, de sorte que la tension instantanée $u(t)$ aux bornes du condensateur peut s'écrire $u(t) = U + b(t)$, où la tension de bruit thermique $b(t)$ est de moyenne nulle.

❑ **25** — Déterminer l'expression de l'énergie électrique moyenne $\langle E_C\rangle$ stockée dans le condensateur, en fonction de C, U et $\sigma_b^2 = \langle b^2\rangle$.

❑ **26** — On admet que le bruit thermique généré dans le circuit au niveau du condensateur est associé à un degré de liberté énergétique quadratique. Déterminer l'expression de σ_b en fonction de T, C et k_B. Commenter le sens de variation de σ_b avec C. Commenter la valeur numérique obtenue pour $C = 47\,\text{nF}$ à température ambiante.

Données numériques :

- Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3{,}00\cdot 10^8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$;
- Constante de Boltzmann : $k_B = 1{,}38\cdot 10^{-23}\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$;
- Nombre d'Avogadro : $N_A = 6{,}02\cdot 10^{23}\,\text{mol}^{-1}$;

FIN DE LA PARTIE II