

III- Topologie du champ électrique

A- Invariance, plan de symétrie et d'antisymétrie : principe de Curie

On cherche les éléments de symétrie de la distribution de charge source et on en déduit les symétries du champ électrostatique créé par cette distribution par le principe de Curie :

Les symétries des causes se retrouvent dans les conséquences.

En électrostatique $\vec{E}$ possède les symétries de ses sources.

1- Invariance par une translation $\alpha \vec{u}_z$

Si la distribution de charge est invariante par une translation $\alpha \vec{u}_z$ c'est-à-dire $t_{\alpha \vec{u}_z}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$

$$\text{alors } \underbrace{t_{\alpha \vec{u}_z}(\vec{E}(M))}_{\vec{E}(M)} = \vec{E}(t_{\alpha \vec{u}_z}(M))$$

propriété de
la translation
des vecteurs

Cette propriété se traduit bien en coordonnées cartésiennes et cylindriques

- Cartésiennes : si $\rho(x, y, z + n\alpha) = \rho(x, y, z)$ alors $\vec{E}(x, y, z + n\alpha) = \vec{E}(x, y, z)$. Les

trois composantes de $\vec{E} \begin{pmatrix} E_x(x, y, z) \\ E_y(x, y, z) \\ E_z(x, y, z) \end{pmatrix}$ sont α -périodiques par rapport à z

- Cylindriques : si $\rho(r, \theta, z + n\alpha) = \rho(r, \theta, z)$ alors les trois composantes de

$\vec{E} \begin{pmatrix} E_r(r, \theta, z) \\ E_\theta(r, \theta, z) \\ E_z(r, \theta, z) \end{pmatrix}$ sont α -périodiques par rapport à z

Ex réseau de charges

2- Invariance par une rotation d'un angle ψ autour d'un axe Δ (que l'on choisira pour être l'axe Oz)

$$\mathcal{R}_{\psi, \Delta}(\mathcal{D}) = \mathcal{D} \text{ alors } \mathcal{R}_{\psi, \Delta}(\vec{E}(M)) = \vec{E}(\mathcal{R}_{\psi, \Delta}(M))$$

Cette propriété se traduit bien en coordonnées cylindriques et sphériques

- Cylindriques : si $\rho(r, \theta + n\psi, z) = \rho(r, \theta, z)$ alors
$$\begin{cases} E_r(r, \theta + n\psi, z) = E_r(r, \theta, z) \\ E_\theta(r, \theta + n\psi, z) = E_\theta(r, \theta, z) \\ E_z(r, \theta + n\psi, z) = E_z(r, \theta, z) \end{cases}$$
- Sphériques : si $\rho(r, \theta, \varphi + n\psi) = \rho(r, \theta, \varphi)$ alors
$$\begin{cases} E_r(r, \theta, \varphi + n\psi) = E_r(r, \theta, \varphi) \\ E_\theta(r, \theta, \varphi + n\psi) = E_\theta(r, \theta, \varphi) \\ E_\varphi(r, \theta, \varphi + n\psi) = E_\varphi(r, \theta, \varphi) \end{cases}$$

Exemples : 3 charges aux sommets d'un triangle équilatéral

3- Si la distribution de charge est invariante sous toute translation le long d'un axe Oz

(c'est-à-dire si ρ ne dépend pas de la variable z) alors $\vec{E}$ est également invariant sous toute translation le long d'un axe Oz

$$\text{Donc } \begin{pmatrix} E_x(x, y, z) \\ E_y(x, y, z) \\ E_z(x, y, z) \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} E_r(r, \theta, z) \\ E_\theta(r, \theta, z) \\ E_z(r, \theta, z) \end{pmatrix} \text{ sont indépendants de } z$$

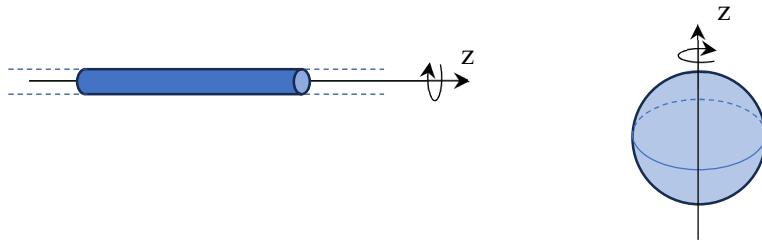
Ex ruban chargé infini ou cylindre chargé infini d'axe Oz



4- Si la distribution de charge est invariante sous toute rotation autour de l'axe Oz (c'est-à-dire si ρ ne dépend pas de la variable θ en coordonnées cylindriques ou φ en coordonnées sphériques) alors $\vec{E}$ est également invariant sous toute rotation autour de Oz

$$\text{Donc } \begin{pmatrix} E_r(r, \theta, z) \\ E_\theta(r, \theta, z) \\ E_z(r, \theta, z) \end{pmatrix} \text{ sont indépendants de } \theta \text{ ou } \begin{pmatrix} E_r(r, \theta, \varphi) \\ E_\theta(r, \theta, \varphi) \\ E_\varphi(r, \theta, \varphi) \end{pmatrix} \text{ sont indépendants de } \varphi$$

Ex cylindre uniformément chargé d'axe Oz, sphère uniformément chargée.

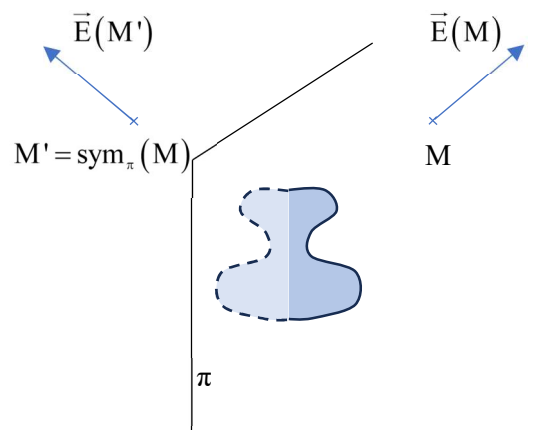


Attention cela ne signifie pas que $\vec{E}$ est indépendant de θ (respectivement de φ) car $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ (respectivement $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_\varphi$) dépendent de θ (respectivement φ)

5- Si D possède un plan de symétrie π : c'est-à-dire $\forall P \in \mathcal{D}, \text{ si } P' = \text{sym}_\pi(P) \text{ alors } \rho(P') = \rho(P)$

$\vec{E}$ est également symétrique par rapport à π : si $M' = \text{sym}_\pi(M)$ alors $\vec{E}(M') = \text{sym}_\pi(\vec{E}(M))$

Cas particulièrement intéressant, si M est sur le plan de symétrie π , alors $\vec{E}(M)$ est contenu dans ce plan.



6- Si D possède un plan d'antisymétrie π^- : c'est-à-dire $\forall P \in \mathcal{D}$, si $P' = \text{sym}_{\pi^-}(P)$

alors $\rho(P') = -\rho(P)$

$\vec{E}$ est également symétrique par rapport à π^- : si
si $M' = \text{sym}_{\pi^-}(M)$ alors $\vec{E}(M') = -\text{sym}_{\pi^-}(\vec{E}(M))$

Cas particulièrement intéressant, si M est sur le plan d'antisymétrie π^- , alors $\vec{E}(M)$ est orthogonal ce plan

