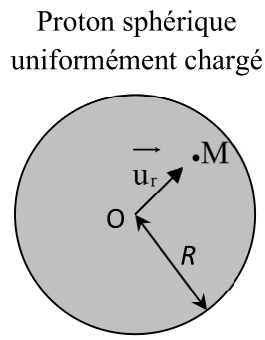
Electrostatique (1)

Exercice 1 : modèle de Thomson de l'atome d'hydrogène



L'anglais J.J.Thomson (*Sir Joseph-John Thomson (1856-1940), prix Nobel 1906*) proposa en 1902 de représenter la charge positive de l'atome d'hydrogène (le « noyau ») comme une sphère finie de centre O, de rayon *R*, chargée avec une densité uniforme de charge volumique ρ. La charge totale de la sphère est celle du proton : + *e*.

Dans ce modèle, l'électron de masse m_e est supposé ponctuel en un point M et **reste à l'intérieur du « noyau »** ; il n'est soumis qu'à la force d'attraction du noyau dans le repère galiléen lié à ce dernier.

1- Démontrer que la position de l'électron suit l'équation différentielle : $\dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} + \omega_0^2\overrightarrow{OM} = \vec{0}$

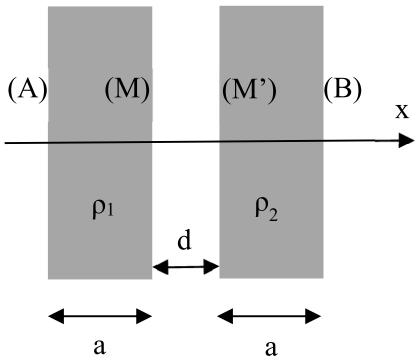
Exprimer la fréquence f_0 de cet oscillateur harmonique en fonction uniquement de *e, R,* ε_0 et m_e. Décrire les trajectoires possibles pour l'électron.

2- La plus petite fréquence observée à l'époque dans le spectre de l'hydrogène atomique était $f_{min} = 460\text{ THz} = 460.10^{12}\text{ Hz}$. En déduire une valeur numérique R_{max} majorant *R*. C'est l'ordre de grandeur du rayon du noyau dans ce modèle.

3- Quelle expérience a permis d'infirmer ce modèle ? A quelle date approximativement ? Quelle est l'estimation actuelle du rayon du noyau d'hydrogène ? Comment s'appelle le modèle de l'atome d'hydrogène ayant succédé à celui de Thomson ?

Données : $\varepsilon_0 = 8{,}8.10^{-12}$ F.m^{-1} $\quad e = 1{,}6.10^{-19}$ C $\quad m_e = 9{,}1.10^{-31}$ kg

Exercice 2 : modèle de membrane cellulaire



Le dispositif ci-contre peut modéliser l'environnement d'une membrane cellulaire d'épaisseur *d*. Une première répartition uniforme de charges, caractérisée par une densité volumique ρ_1, est comprise entre deux plans infinis (A) et (M) perpendiculaires à un même axe XX' et distants de *a*. Une seconde répartition, de même nature que la précédente mais de charge volumique ρ_2, occupe tout l'espace entre les plans (M') et (B). L'ensemble est plongé dans un milieu assimilable au vide.

1- Exprimer la différence de potentiel entre les parois (M) et (M') de la membrane **(*)**.

2- Effectuer l'application numérique sachant que les zones (1) et (2) contiennent des cations monovalents aux concentrations respectives : $c_1 = 5.10^{-5}$ mol.L^{-1} et $c_2 = 3.10^{-5}$ mol.L^{-1} ; on donne également : $a = 3.10^{-8}$ m, $d = 6.10^{-9}$ m, ainsi que les valeurs des constantes suivantes :

- Valeur absolue de la charge de l'électron : $e = 1{,}6.10^{-19}$ C
- Nombre d'Avogadro : $N_a = 6{,}02.10^{23}$
- Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 1 / (36\pi.10^9)$ F.m^{-1}

(*) *Si la notion de potentiel n'a pas encore été abordée au moment où vous cherchez cet exo, contentez-vous de calculer le champ électrostatique en tout point de la zone comprise entre (M) et (M').*

Exercice 3 : du modèle volumique au modèle surfacique

On considère une distribution de charges vérifiant :

$$\rho(M) = \rho_o.\exp\left(-\frac{x}{a}\right) \quad \text{pour} \quad x > 0 \quad \text{et} \quad \rho(M) = 0 \quad \text{pour } x < 0$$

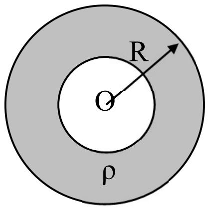
1- Montrer que $\vec{E}(M) = E(x).\vec{e_x}$ et déterminer E(x) à une constante additive près.

2- Vue de M, tel que $|x|$ >> a, cette distribution est équivalente à une distribution surfacique. Déterminer la constante indéterminée précédemment.

3- Déterminer la densité surfacique de charge σ correspondante.

4- On fait tendre a vers 0 en gardant σ constante. L'expression de la discontinuité du champ électrique vous semble-t-elle familière ?

Exercice 4 :



Une distribution de charges est à symétrie sphérique de centre O. Les charges sont réparties en volume avec la densité ρ(r), r désignant la distance au point O. La densité ρ n'est non nulle qu'entre r = R/2 et r = R. Elle est nulle ailleurs et la charge totale de la distribution est Q.
Le champ électrostatique créé en M par cette distribution vaut $\vec{E} = k(\alpha.r - R)\vec{e_r}$ dans l'intervalle [R/2, R] avec $\overrightarrow{OM} = r.\vec{e_r}$

1- Donner le domaine de définition du champ $\vec{E}$. Est-il continu partout ? Que vaut-il en O ?

2- Déterminer $\vec{E}$ pour r < R/2. En déduire la valeur de α.

3a- Etablir la loi ρ(r).

3b- Calculer la charge totale et en déduire la valeur de k.

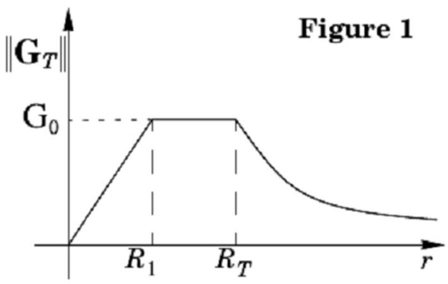
4- Déterminer le champ $\vec{E}$ pour r > R.

Exercice 5 : Champ gravitationnel terrestre. (*Extrait de Centrale MP 2008*)

Dans un premier temps, on assimile la Terre à une sphère de centre O, de rayon R_T, de masse M_T uniformément répartie dans tout le volume.

1- Déterminer le champ gravitationnel terrestre $\overrightarrow{\mathcal{G}_T}$ en tout point M de l'espace et représenter graphiquement $\left\|\overrightarrow{\mathcal{G}_T}\right\|$ en fonction de $r = OM$

2- Calculer $\mathcal{G}_0 = \left\|\overrightarrow{\mathcal{G}_T}(r = R_T)\right\|$ à la surface de la Terre



En réalité, la M_T n'est pas uniformément répartie. Dans un modèle plus élaboré dans lequel on conserve la symétrie sphérique, les variations de $\left\|\overrightarrow{\mathcal{G}_T}\right\|$ sont représentées sur la figure 1 avec $R_1 = 3{,}50.10^3$ km

3- Justifier que le champ gravitationnel à la surface de la Terre n'est pas modifié.

4- Justifier que dans ce modèle, on considère le noyau terrestre $(0 \le r \le R_1)$ comme homogène et calculer sa masse volumique (moyenne)

5- Dans le manteau terrestre $(R_1 \le r \le R_T)$, la masse volumique est-elle supposée fonction croissante ou décroissante de r ? Justifier.

Données : $G = 6{,}67.10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2} ; $M_T = 5{,}98.10^{24}$ kg ; $R_T = 6{,}38.10^3$ km

Electrostatique (2)

Exercice 1 : piègeage d'une particule chargée

Dans un plan (Oxy), quatre charges ponctuelles $q > 0$ identiques sont placées aux points (a,0), (–a,0), (0,a) et (0,–a). Le potentiel électrostatique au voisinage de l'origine O, dans le plan (Oxy), est de la forme : $V(x,\ y) = k_0 + k_1.x + k_2.y + k_3.x^2 + k_4.y^2 + k_5.xy$

1- Que peut-on dire sans calcul des constantes k_0, k_1, k_2, k_3, k_4 et k_5 ? Calculer k_3.

2- On admet que le potentiel suit dans le vide l'équation locale dite de Laplace :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Proposer une expression approchée du potentiel en tout point de l'espace au voisinage de O.

3- L'origine O peut-elle constituer une position d'équilibre pour une particule de charge q' ? Cet équilibre est-il stable vis-à-vis d'un petit déplacement dans le plan (O*xy*) ? Même question, dans la direction (O*z*) orthogonale à ce plan ? On discutera selon le signe de la charge.
L'ajout d'un champ magnétique peut-il améliorer le piégeage ? Si oui, comment choisir ce champ ?

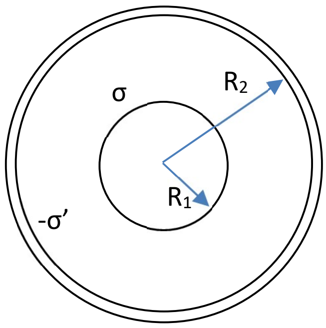
4- Aucun champ magnétique n'ayant été ajouté, on place une particule de masse *m* et de charge $q' > 0$ au point (x_0; 0), avec $0 < x_0 \ll a$, et on lui confère une vitesse initiale de norme v_0 dirigée selon l'axe (O*y*).
Donner l'expression des coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ de cette particule. À quelle condition sur v_0 a-t-on une trajectoire circulaire ?

Exercice 2 : Conducteurs sphériques.

On considère une sphère conductrice de centre *O* et de rayon *R* ; on admettra qu'un conducteur ne porte de charges que sur sa surface et on considèrera sa densité superficielle de charge σ ($\sigma > 0$) comme uniforme.
En outre, l'intérieur de la sphère conductrice est assimilable au vide du point de vue électrostatique.

1- Calculer le champ et le potentiel électrostatique créés par la sphère en tout point *M* de l'espace. Quelles particularités présentent le champ et le potentiel à la traversée de la surface du conducteur ?

2- On considère maintenant un condensateur sphérique constitué par deux armatures métalliques sphériques de même centre (*figure* ci-contre) ; l'armature intérieure, de rayon R_1, est portée au potentiel V_1 ; l'armature extérieure creuse et très mince, de rayon R_2, est portée au potentiel V_2 ($V_2 < V_1$). Il apparaît alors deux charges opposées sur les deux armatures et on note σ et -σ' les densités superficielles de charge, considérées uniformes, respectivement portées par l'armature intérieure et la face interne de l'armature extérieure.



2a- Calculer le champ électrostatique en tout point de l'espace.

2b- En déduire les expressions de σ et σ' en fonction de V_1, V_2, R_1, R_2 et ε_0, puis l'expression de la capacité *C* du condensateur, en fonction de R_1, R_2 et ε_0. Calculer numériquement *C* pour $R_1 = 5$ mm et $R_2 = 2R_1$.

3- On utilise enfin la sphère conductrice décrite à la question 1 afin de modéliser un cation X^+ ; on adopte pour cela la valeur numérique : $R = 1$ Å $= 10^{-10}$ m.

3a- Le milieu étant supposé gazeux, un électron de masse m est lâché sans vitesse à une distance $l = 2$ Å du centre de l'ion. Déterminer littéralement en fonction de R, l, ε_0, σ, m et e (charge élémentaire) la vitesse maximale atteinte par l'électron. Effectuer l'application numérique

3b- Le cation est maintenant supposé en solution aqueuse et les molécules d'eau sont assimilées à des dipôles électrostatiques de moment dipolaire 1,82 D (on rappelle que 1 D = $1/3.10^{-29}$ C.m). On s'intéresse à une molécule d'eau située à une distance $r = 5$ Å du centre du cation : déterminer son orientation stable puis exprimer et calculer la force subie par la molécule dans cette orientation. Commenter.

Données numériques : Nombre d'Avogadro : $6{,}02\ 10^{23}$ $\quad \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9$ SI

Masse de l'électron *:* $9{,}1.10^{-31}$ kg. Charge élémentaire *:* $1{,}6.10^{-19}$ C.

Exercice 3 : Environnement électrostatique d''un colloïde.

Une solution colloïdale est une suspension dans l'eau de particules chargées de même signe, microscopiques mais très grandes à l'échelle atomique, entourées d'ions positifs et négatifs (aux dimensions atomiques). On étudie la façon dont les ions sont distribués au voisinage d'une de ces particules, appelée colloïde, ainsi qu'au champ et au potentiel électrostatiques associés à cette distribution (particule + ions qui l'entourent). On considère que :

- La solution est suffisamment diluée en colloïdes pour que le champ et le potentiel électrostatiques au voisinage du colloïde étudié soient dus uniquement à cette particule et aux ions qui l'entourent. Comme l'ensemble n'est pas plongé dans le vide mais dans l'eau, on n'omettra pas de prendre en compte la permittivité relative ε_r de l'eau lors de tout calcul électrostatique.
- Le colloïde est sphérique, de rayon r_0, et chargé positivement ; sa charge vaut pe (p est un entier positif, $-e$ la charge de l'électron) et est répartie uniformément sur sa surface. Le problème possède donc la symétrie sphérique.
- L'électrolyte est formé de deux types d'ions de charges $\pm e$. Les densités particulaires de chaque espèce d'ions à une distance $r > r_0$ du centre de la particule sont données par la loi de Boltzmann : $\quad n^+(r) = n_0 \exp\left(\dfrac{-E_p^+(r)}{k_B T}\right)$, $\quad n^-(r) = n_0 \exp\left(\dfrac{-E_p^-(r)}{k_B T}\right)$

  où $E_p^+(r)$ et $E_p^-(r)$ désignent les énergies potentielles électrostatiques des cations et des anions à la distance r ; T est la température absolue et k_B la constante de Boltzmann. n_0 est identique pour les ions positifs et négatifs afin de garantir la neutralité électrique de la solution à grande distance de la particule. On suppose en outre que la température est suffisamment élevée pour pouvoir linéariser le facteur de Boltzmann pour les deux types d'ions :

$$\exp\left(\frac{-E_p}{k_B T}\right) \approx 1 - \frac{E_p}{k_B T}$$

1- Déterminer le champ électrostatique à la surface du colloïde en $r = r_0^+$.

2- Exprimer la densité volumique de charge $\rho(r)$ en fonction du potentiel électrostatique $V(r)$ et des constantes du problème.

3- En appliquant le théorème de Gauss, montrer que la composante radiale E_r du champ électrostatique vérifie, à la distance $r > r_0$ du centre du colloïde, l'équation différentielle :

$$\frac{dE_r}{dr}(r) + 2\frac{E_r(r)}{r} = \frac{\rho(r)}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

En déduire une équation différentielle du second ordre vérifiée par $V(r)$.

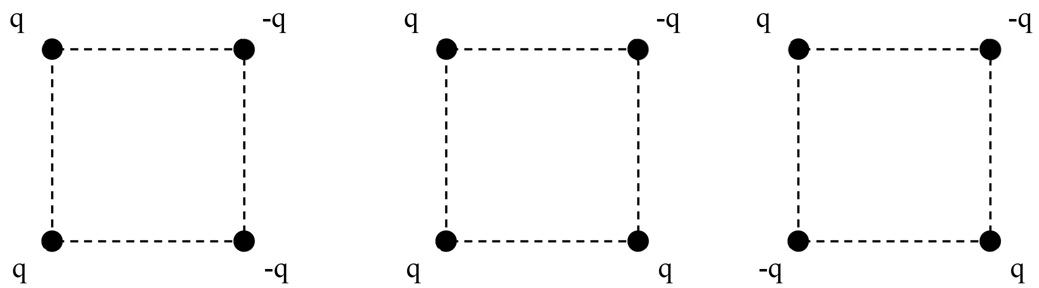
4- On pose $V(r) = \frac{U(r)}{r}$ et $D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r k_B T}{2e^2 n_0}}$; D est appelée longueur de Debye.

Calculer $U(r)$ puis le potentiel électrostatique $V(r)$ pour $r > r_0$. Représenter $V(r)$ et interpréter la longueur D. Pourquoi dit-on que la charge pe du colloïde est « écrantée » ?
Calculer D dans le cas de l'eau pure à pH=7 et commenter.
On donne :
$\varepsilon_0 = 8,85.10^{-12}\,\mathrm{F.m^{-1}}$; $\varepsilon_r = 80$; $e = 1,60.10^{-19}\,\mathrm{C}$; $k_B = 1,38.10^{-23}\,\mathrm{J.K^{-1}}$; $T = 300$ K ;
$N_A = 6,02.10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$.

5- Déterminer la quantité de charge entourant un colloïde. Commenter.

Exercice 4

Dans les situations suivantes, quatre charges se trouvent au sommet d'un carré. Sans calcul, prévoir dans chaque cas la dépendance en r du potentiel à grande distance.



Exercice 5 : Dipôle placé dans un champ électrique uniforme.

Un condensateur plan crée entre ses deux armatures un champ électrique uniforme que nous noterons $\vec{E} = E_0\vec{u}_x$. On place en un point O de cette zone un dipôle électrostatique de moment dipolaire $\vec{p}$ colinéaire à (Ox), et on suppose que ce dipôle ne modifie pas le champ créé par le condensateur.

Calculer, en présence du dipôle, le champ et le potentiel en tout point de l'espace inter-armatures et montrer qu'il existe une équipotentielle sphérique de centre O dont on donnera le rayon et le potentiel. Tracer qualitativement l'allure des lignes de champ et des équipotentielles dans cette situation.

Exercice 6 : Cylindres chargés

1- On considère un cylindre plein, infini, d'axe (Oz) et de rayon R, chargé uniformément avec une densité volumique de charge $\rho > 0$.

- Calculer le potentiel et le champ électrostatique créés par ce cylindre en tout point M de l'espace, puis décrire les lignes de champ et les équipotentielles.
- Dans le cas où M est à l'extérieur du cylindre chargé, exhiber une distribution de charges plus simple qui créerait le même champ.

2- On étudie maintenant un ensemble de deux cylindres C_1 et C_2, identiques à celui décrit à la question 1 et dont les axes sont parallèles, de densités volumiques de charges ρ_1 et ρ_2 opposées. On note $\rho_1 = -\rho$ et $\rho_2 = +\rho > 0$ et on appelle a la distance entre les deux axes des cylindres ($a > 2R$).

- Calculer le potentiel et le champ électrostatique créés, en première approximation, en tout point de l'espace situé à grande distance des cylindres. Préciser ce que l'on entend par « grande distance ».
- Commenter le résultat obtenu en comparant aux résultats de la question 1, puis tracer l'allure de la carte de champ et des surfaces équipotentielles. Ces surfaces sont-elles des cylindres ?

3- Que peuvent bien modéliser de telles distributions ?