

DM de PHYSIQUE n° 2

Mardi 7 octobre

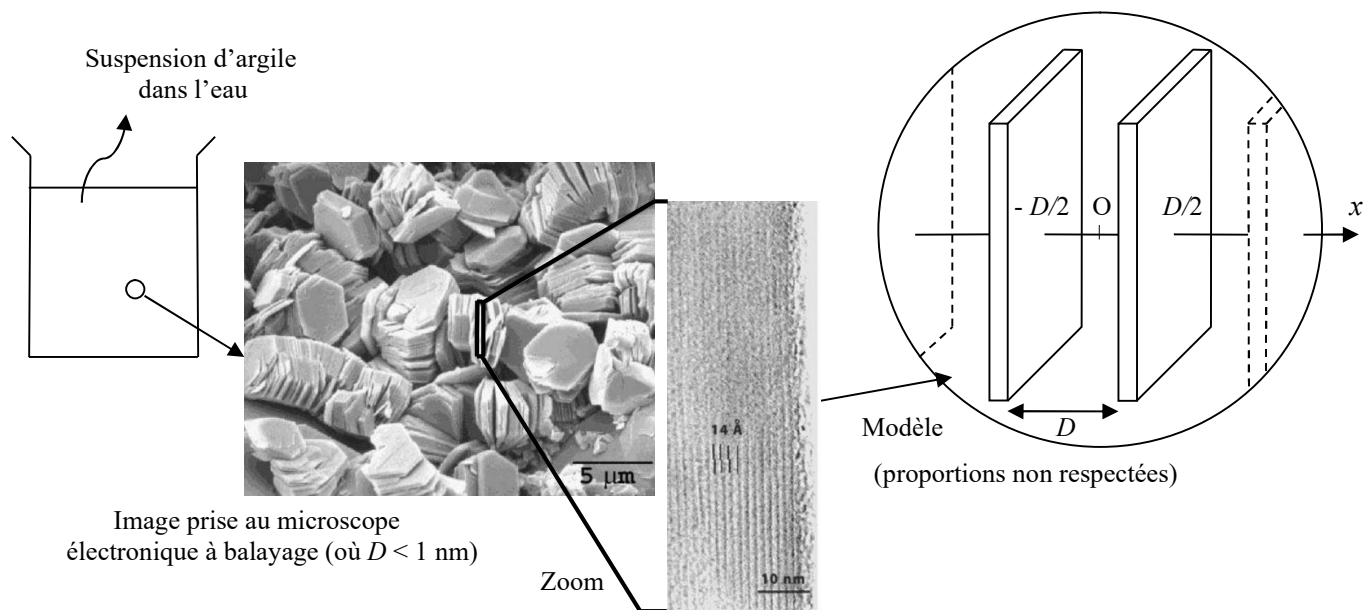
Le problème 1 est à traiter en priorité.

PROBLEME 1 : Etude d'une suspension d'argile dans l'eau.

(Problème original créé par M Komilikis, type Mines ou 1^{ère} partie X-ENS)

A l'échelle microscopique, une suspension d'argile dans l'eau se présente sous la forme de minces plaquettes d'argile plongées dans une solution aqueuse. Elles possèdent des propriétés électrostatiques intéressantes car les plaquettes sont ionisées négativement, tandis que la solution contient des cations (aux dimensions atomiques) et est chargée positivement. Ces plaquettes, dont l'épaisseur h est de l'ordre de 1 à 1,4 nm selon les argiles, s'étendent latéralement sur quelques centaines à quelques milliers de nm, ce qui permet de les assimiler, pour les calculs de champ dans leur voisinage, à des parallélépipèdes **infinis** dans deux directions.

Dans tout ce problème, on s'intéresse à une zone de la suspension où les plaquettes peuvent être supposées toutes parallèles entre elles et régulièrement espacées d'une distance D pouvant varier de 0,1 à 10 nm en fonction des conditions expérimentales (voir la figure ci-dessous ; $1 \text{ \AA} = 0,1 \text{ nm}$).



Pour étudier la façon dont les cations sont distribués entre deux de ces plaquettes, éloignées de D . On définit un axe (Ox) normal aux 2 plaquettes et centré en leur milieu. L'étude porte sur le domaine $-D/2 < x < D/2$ et on note :

- * $\rho(x)$ la densité volumique de charge dans l'électrolyte (la solution) à l'abscisse x entre les deux plaquettes.
- * $\vec{E}(x)$ et $V(x)$ le champ et le potentiel électrostatiques créés à l'abscisse x entre les deux plaquettes par **l'ensemble des charges (plaquettes + ions)**, avec comme choix d'origine des potentiels : $V(x=0) = 0$.

Données :

- Chaque plaquette est chargée en surface avec une densité surfacique uniforme $\sigma = -0,3 \text{ C.m}^{-2}$ **sur chaque face**. On ne s'intéresse pas au domaine intérieur aux plaquettes, supposé électriquement neutre.
- L'électrolyte contient uniquement des cations de charges $+e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ (hypothèse simplificatrice sans incidence sur la forme des champs étudiés) ; on note $n(x)$ leur densité particulière.
- Comme l'ensemble n'est pas plongé dans le vide mais dans l'eau, on multipliera systématiquement la permittivité du vide ϵ_0 par un coefficient sans dimension appelé **permittivité relative de l'eau et noté ϵ_r** . On donne : $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$ et $\epsilon_r = 78$.

Les différentes parties du problème sont quasi-indépendantes.

Certaines questions peuvent toutefois faire appel à des notions ou relations définies dans une partie antérieure.

A- Approche qualitative.

1. On suppose que l'environnement électrostatique est le même de part et d'autre de chaque plaquette.
 - a) Justifier brièvement cette hypothèse. Quelle est alors la valeur du champ en $x = 0$?
 - b) Montrer que, grâce à cette hypothèse et bien que l'on ne connaisse pas la répartition des ions entre les plaquettes, on peut déterminer le champ électrostatique total « à leur surface », c'est-à-dire en $x = D/2^-$ et $x = -D/2^+$.
 - c) Comment le champ évolue-t-il qualitativement entre les 2 plaquettes et pourquoi ? Tracer l'allure du graphe de la fonction $E_x(x)$ pour $-D/2 < x < D/2$. Quel est le signe du potentiel entre les deux plaquettes ?
2. Entre les 2 plaquettes, la répartition des cations n'est pas uniforme, ceux-ci étant attirés par les charges négatives des plaquettes. Néanmoins, ils ne sont pas non plus collés aux plaquettes du fait de l'agitation thermique qui tend à homogénéiser la répartition. On admet que la densité particulaire résultant de ces deux effets est donnée par la loi de Boltzmann :

$$n(x) = n_0 \exp\left(\frac{-E_p(x)}{k_B T}\right)$$

$E_p(x)$ désigne l'énergie potentielle électrostatique d'un cation situé à l'abscisse x ; T désigne la température absolue ; k_B est la constante de Boltzmann.

On donne : $T = 298 \text{ K}$ (25°C) et $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ unités S.I.

- a) Expliquer en quoi la loi de Boltzmann rend compte des phénomènes physiques cités ci-dessus. On pourra s'intéresser aux limites prises par $n(x)$ à très basse et très haute température.
 - b) Donner la dimension du produit $k_B T$ et l'unité de la constante de Boltzmann.
 - c) Que représente n_0 ? Vers quelle valeur limite n_0 tend-il lorsque les plaquettes sont très éloignées ?
On notera bien que n_0 n'est pas une donnée du problème et devra donc être déterminé lors de la résolution.
3. Avant même de chercher les équations du problème, on se propose de déterminer, à partir d'une simple analyse dimensionnelle, une distance d **susceptible de caractériser les variations des grandeurs électrostatiques** $E_x(x)$, $V(x)$ et $n(x)$ au voisinage des plaquettes.
 - a) Montrer qu'à partir des données du problème : σ , e , ϵ_0 , ϵ_r , k_B et T , on peut construire une telle distance, indépendante de la distance D entre les plaquettes (cette distance doit faire intervenir tous les paramètres mentionnés).
 - b) Commenter la dépendance de cette distance avec la température, puis avec la densité surfacique de charge des plaquettes.
4. Applications numériques : calculer les grandeurs suivantes et commenter les ordres de grandeur obtenus :
 - a) Le nombre de charges élémentaires par nm^2 porté par chaque face d'une plaquette.
 - b) L'intensité E_s du champ à la surface des plaquettes.
 - c) La distance caractéristique d .

B- Obtention des équations caractérisant la suspension.

5. L'équation de Boltzmann est une équation issue de la mécanique et de la thermodynamique, qui décrit la façon dont les cations se répartissent en fonction du potentiel électrique et de la température.
Établir une seconde relation, de nature électrostatique cette fois, permettant de relier la densité particulaire $n(x)$ de cations au potentiel $V(x)$ entre les 2 plaquettes.
6. Dédire des résultats précédents que l'équation différentielle vérifiée par $V(x)$ s'écrit :

$$\frac{d^2 V}{dx^2}(x) + \frac{e n_0}{\epsilon_0 \epsilon_r} \exp\left(\frac{-e V(x)}{k_B T}\right) = 0 \quad \text{Equation notée [PB]}$$

7. Equation d'électroneutralité : en vous appuyant sur les invariances du problème, établir une équation faisant intervenir une intégrale sur $n(x)$, qui traduise l'électroneutralité de la solution.

C- Etude de la solution de l'équation [PB].

8. Montrer que l'équation [PB] admet une solution du type :

$$V(x) = \frac{2k_B T}{e} \ln \left[\cos \left(\frac{x}{L} \right) \right] \quad \text{où } L \text{ est une constante qui dépend de } n_0 \text{ et que l'on exprimera.}$$

9. Donner les expressions de $E_x(x)$ et $n(x)$ qui découlent de cette solution. Tracer l'allure des graphes donnant $V(x)$, $E_x(x)$ et $n(x)$ et les commenter.
10. On souhaite déterminer L (et donc n_0) en fonction des données. Montrer que L vérifie une équation du type :

$$\tan \left(\frac{D}{2L} \right) = \frac{L}{2d} \quad \text{où } d \text{ est la longueur caractéristique du problème obtenue dans la partie A, que l'on exprimera en fonction des données si cela n'a pas encore été fait.}$$

On procédera de deux façons différentes :

- * A partir de l'équation d'électroneutralité du système obtenue à la question B.7.
 - * A partir de la valeur du champ à la surface des plaquettes obtenue à la question A.1.
11. On s'intéresse à deux cas particuliers :
- a) $L \ll d$: exprimer alors L en fonction de D et d et dire à quelle condition sur l'espacement entre les plaquettes cela est possible. Est-ce une situation réaliste compte tenu de la valeur numérique de d ?
 - b) $L \gg d$: répondre aux mêmes questions puis exprimer n_0 en fonction des données. Commenter la dépendance de n_0 vis-à-vis de D .
12. Proposer une méthode graphique pour déterminer L en fonction de D et d dans le cas général.
- Note de JLB : Ce genre de question sous-entend une méthode graphique ne mettant en jeu que des fonctions simples à tracer, ne nécessitant pas l'usage de la calculatrice.*
13. Toujours dans le cas général, déterminer en fonction de n_0 et des données, la valeur de la densité particulière de cations au voisinage des plaquettes : $n_s = n(x = D/2^-) = n(x = -D/2^+)$. Commenter.

D- Approche alternative de la répartition des cations.

14. Le but de cette question est d'exploiter les équations déterminées dans la partie B pour discuter la répartition des cations dans l'électrolyte, sans résoudre complètement l'équation [PB] (donc sans utiliser les résultats de la partie C).
- a) Ecrire une équation reliant $\frac{dn}{dx}$ à $\frac{dV}{dx}$ et $\frac{d^2V}{dx^2}$.
 - b) En déduire par intégration une expression de $n(x)$ en fonction de $E(x)$ et n_0 .
 - c) Appliquer cette relation « à la surface des plaquettes » et en déduire, en fonction de n_0 et des données, la valeur de $n_s = n(x = D/2^-) = n(x = -D/2^+)$. Vérifier la cohérence avec la question 13. Que devient n_s dans la limite où la distance D est élevée ?
 - d) On se place dans le cas où D est élevé et on souhaite évaluer une « densité surfacique équivalente » σ_s , pour les cations accumulés au voisinage des plaquettes. Proposer une définition de cette densité en utilisant les grandeurs pertinentes du problème, puis déterminer le rapport $\sigma_s / |\sigma|$. Commenter.
-

PROBLEME 2 : Confinement d'une particule chargée dans un champ magnétique. (Centrale MP 2016)

Une liste de données numériques et un formulaire sont disponibles à la fin du sujet.

Certaines questions, repérées par une barre en marge, ne sont pas guidées et demandent de l'initiative de la part du candidat. Les pistes de recherche doivent être consignées, si elles sont pertinentes, elles seront valorisées. Le barème tient compte du temps nécessaire pour explorer ces pistes et élaborer un raisonnement.

— La magnétosphère de la Terre —

D'après : Gilbert Pietryk (sous la direction de), Panorama de la physique, Pour la Science, Belin, 2007.

La magnétosphère est la dernière enveloppe d'une planète, avant le milieu interplanétaire. Ce milieu est dominé essentiellement par le vent solaire, constitué de protons et d'électrons très rapides. Comme son nom l'indique, la magnétosphère est caractéristique des planètes qui ont un champ magnétique propre. La magnétosphère terrestre est la mieux connue puisqu'elle est la plus facilement accessible et qu'elle est explorée depuis l'ère des projets spatiaux. Pourtant de nombreux mystères subsistent quant à son fonctionnement, en particulier sur la manière dont elle répond aux modifications de l'activité solaire.

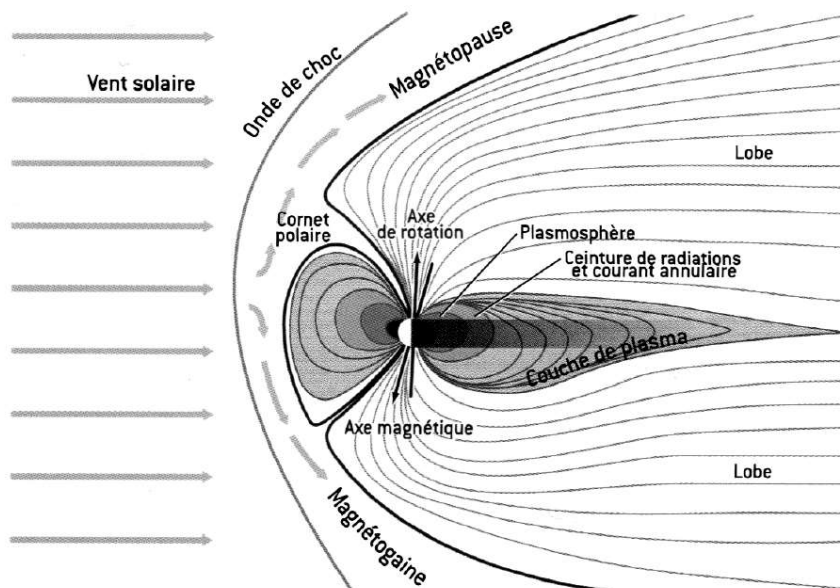


Figure 1 Coupe méridienne de la magnétosphère de la Terre. Le Soleil est loin sur la gauche. Les traits fins symbolisent les lignes de champ magnétique, les flèches jaunes le mouvement du plasma.

L'avant de la magnétosphère se caractérise par une première frontière nette, le choc. Ce choc est dû au fait que le vent solaire a une vitesse d'ensemble supérieure à toutes les vitesses possibles de propagation des ondes dans le milieu. Derrière le choc se trouve la magnétogaine, région où le plasma du vent solaire est ralenti, chauffé et où l'on observe une turbulence importante. Le champ magnétique est encore celui du vent solaire un peu modifié par la traversée du choc. Cette région intermédiaire est suivie d'une autre frontière nette, la magnétopause. Cette frontière sépare la zone d'influence du champ magnétique terrestre de celle du vent solaire. Cette frontière est une discontinuité mince comme un choc mais ce n'est pas un choc, c'est une frontière qui isole vraiment les deux milieux, l'énorme majorité des particules du vent solaire restant à l'extérieur. On constate donc que ce qui fait obstacle au vent solaire ce n'est pas la planète elle-même, ni son atmosphère, mais son champ magnétique. Le contournement du vent solaire donne à la magnétosphère sa forme caractéristique, avec une queue allongée dans la direction opposée au Soleil et deux immenses « lobes » presque totalement vides. L'ionosphère est une région importante dans la dynamique de la magnétosphère (bien qu'invisible à l'échelle de la figure). Elle résulte de l'ionisation des couches supérieures de l'atmosphère par le rayonnement UV du Soleil qui la rend conductrice, et lui fait jouer un rôle dans la fermeture des courants magnétosphériques.

La magnétosphère et son intense activité électromagnétique ne sont pas visibles du sol sauf dans les régions polaires où elles peuvent se manifester de façon très spectaculaire. Le champ magnétique terrestre est à peu près celui d'un dipôle dont l'axe passe dans les régions polaires. Les lignes de champ qui viennent des régions éloignées de la Terre plongent donc dans l'atmosphère dans les régions polaires. Comme dans la magnétosphère le plasma est peu dense, il n'y a pas de collisions et les particules chargées restent liées aux lignes de champ. Quand une reconfiguration magnétique intervient (ce qu'on appelle un sous-orage magnétique), les particules accélérées dans la queue de la magnétosphère arrivent le long du champ sur les couches denses de l'atmosphère et produisent des aurores. Dans le même temps, ces électrons accélérés émettent un rayonnement radio dont la longueur d'onde est de l'ordre du kilomètre et qui s'échappe de la magnétosphère par les pôles.



Figure 2 Aurore boréale vue du sol sur la Terre. La Lune, visible à côté de l'aurore, donne une idée de la luminosité (Centre d'étude spatiale des rayonnements ©CNRS Photothèque/V. Génot).

I Confinement d'une particule chargée dans un champ magnétique

I.A – Aurores polaires terrestres

Les aurores polaires sont des phénomènes lumineux se produisant entre 80 et 400 km d'altitude causés par la précipitation de particules chargées en provenance de l'espace sur les atomes et les molécules des couches externes de l'atmosphère terrestre. Ces particules sont principalement des électrons dont l'énergie cinétique est de l'ordre du keV pour les aurores les plus spectaculaires.

I.A.1) Expliquer le caractère lumineux d'une aurore polaire.

I.A.2) Pourquoi une aurore boréale (hémisphère nord) apparaît-elle simultanément à une aurore australe (hémisphère sud) ?

I.A.3) Comparer la carte de champ magnétique donnée figure 1 à celle d'un unique dipôle modélisant l'activité magnétique terrestre.

I.B – Mouvement d'un électron dans un champ magnétique stationnaire et uniforme

Afin d'interpréter l'arrivée des particules chargées à l'origine des aurores polaires, on se propose dans la suite de modéliser la dynamique d'un électron dans une zone de champ magnétique stationnaire.

I.B.1) Dans le référentiel géocentrique ($\mathcal{R}$) supposé galiléen, on considère tout d'abord un électron de masse m pénétrant en O dans une zone de champ magnétique $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$ ($B_0 > 0$). La force gravitationnelle terrestre a-t-elle une influence sur la dynamique de cet électron ? On attend un argument qualitatif fondé sur un calcul d'ordre de grandeur.

I.B.2) On suppose que la vitesse initiale de la particule s'écrit $\vec{v}_0 = v_{0z} \vec{u}_z$ ($v_{0z} > 0$). Comment se déplace l'électron vis à vis des lignes de champ magnétique ?

I.B.3) On suppose désormais que l'électron pénètre dans cette même zone de champ magnétique en O avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_{0x} \vec{u}_x$ ($v_{0x} > 0$).

a) Mettre en évidence une pulsation ω_c caractéristique du mouvement de l'électron et l'évaluer dans le champ magnétique terrestre régnant à l'altitude d'un satellite géostationnaire.

b) Montrer que la trajectoire de l'électron est circulaire en établissant son équation cartésienne. Évaluer son rayon R_c .

I.B.4) Un électron accéléré non relativiste perd de l'énergie en rayonnant à un instant donné une puissance

$$\text{électromagnétique } \mathcal{P} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} e^2 \alpha c^\beta \left\| \frac{d\vec{v}}{dt} \right\|^2.$$

a) Déterminer les valeurs α et β .

b) Après avoir exprimé la variation de l'énergie cinétique de l'électron dE lorsque R_c varie de dR_c , établir l'expression de la fonction $R_c(t)$ et établir que le temps caractéristique τ mis en évidence s'écrit $\tau = \frac{6\pi\epsilon_0 c^3 B_0}{e\omega_c^3}$.

Conclure.

I.B.5) On suppose désormais que l'électron pénètre dans cette même zone de champ magnétique en O avec la vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_{0x} \vec{u}_x + v_{0z} \vec{u}_z$ ($v_{0x} > 0$ et $v_{0z} > 0$). Comment se déplace l'électron vis à vis des lignes de champ magnétique ?

I.C – Mouvement d'un électron dans un champ magnétique stationnaire et non uniforme

On se limite ici au cas d'un champ magnétique stationnaire $\vec{B} = B_z(r, z)\vec{u}_z + B_r(r, z)\vec{u}_r$ possédant une géométrie cylindrique autour d'une ligne de champ confondue avec l'axe (Oz). On note L l'échelle caractéristique de variation de ce champ magnétique selon l'axe Oz . On supposera en première approximation que B_z ne dépend que de z : $B_z(z)$.

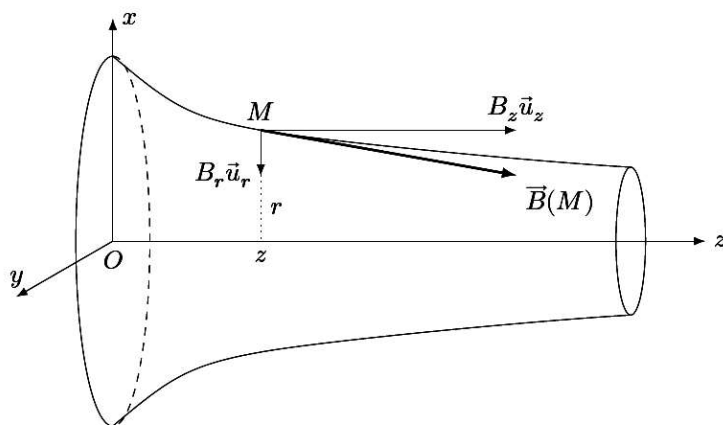


Figure 3

Initialement, l'électron possède la vitesse $\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{u}_x + v_{0z}\vec{u}_z$ ($v_{0x} > 0$, $v_{0z} > 0$) et se situe au point de coordonnées cartésiennes $(0, -R_c(0), 0)$.

* I.C.1) Montrer qu'une propriété structurelle du champ magnétique impose : $B_r(r, z) \simeq -\frac{r}{2} \frac{dB_z}{dz}$.

I.C.2) À quelle condition sur L , la composante radiale $B_r(r, z)$ du champ magnétique pourra-t-elle être traitée comme une perturbation de la composante axiale B_z ?

Dans la suite, on supposera cette condition vérifiée.

I.C.3) Justifier qualitativement l'existence d'un rayon caractéristique $R(z)$, dépendant de z , pour la trajectoire électronique. On donnera l'expression de $R(z)$ en fonction de B_z et de v_θ , composante orthoradiale de la vitesse de l'électron.

I.C.4) En assimilant le mouvement de l'électron à une boucle de courant, associer un moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ au mouvement de l'électron et l'exprimer en fonction de $R(z)$ et de la composante du champ magnétique suivant (Oz). Établir que la relation entre $\mathcal{M}_z$, composante de $\vec{\mathcal{M}}$ selon $\vec{u}_z$, et $\mathcal{L}_z$, moment cinétique de l'électron par rapport à l'axe (Oz), s'écrit

$$\mathcal{M}_z = -\frac{e}{2m} \mathcal{L}_z$$

I.C.5) En supposant que l'on puisse utiliser les résultats relatifs à l'action d'un champ magnétique sur un dipôle magnétique, justifier que $\mathcal{M}_z$ est une constante du mouvement. Comment se déplace l'électron vis à vis des lignes de champ magnétique ?

I.C.6) Dans cette question, on suppose un champ axial de la forme $B_z(r, z) \simeq B_0 \left(1 + \frac{z^2}{L^2}\right)$.

a) Pourquoi peut-on dire que cette configuration de champ magnétique assure un confinement de l'électron dans un domaine de l'espace situé entre deux limites appelées miroirs magnétiques ?

Le candidat pourra s'appuyer sur la conservation de l'énergie.

b) Exprimer une pulsation caractéristique ω_m associée à ce confinement et en déduire l'ordre de grandeur du temps mis par un électron confiné pour accomplir un aller-retour entre le pôle Nord et le pôle Sud terrestres.

I.C.7) La Terre émet un rayonnement radio au-dessus de ses régions aurorales (cf. document d'introduction).

a) Expliquer les localisations spatiale et spectrale de ce phénomène.

b) Pourquoi a-t-il fallu attendre l'ère spatiale pour observer ce rayonnement ?

* Le champ magnétique est « à flux conservatif » : le flux de $\vec{B}$ à travers toute surface fermée est nul (propriété vue en MPSI). Appliquer cette propriété à une surface fermée judicieusement choisie.

I.D – Ceintures de Van Allen

La Terre est entourée d'une zone où des particules de haute énergie cinétique, typiquement de quelques 100 MeV au GeV, sont piégées par le champ magnétique. Ces particules sont réparties dans des ceintures autour du plan équatorial dites ceintures de Van Allen ou ceintures de radiation. Ces ceintures sont très stables et contrairement aux autres éléments de la magnétosphère, elles sont peu sensibles aux orages, sous-orages et autres reconfigurations de la magnétosphère. De ce fait, les particules s'en échappent difficilement.

Évaluer la vitesse typique d'un électron dans ces ceintures. La dynamique d'un tel électron peut-elle se déduire des résultats précédents ?

Données numériques

Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
Masse de l'électron	$m = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Charge élémentaire	$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Permittivité diélectrique du vide	$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$
Constante d'Avogadro	$\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$
Constante de Planck	$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$
Constante de Planck réduite	$\hbar = h/(2\pi)$
Rayon de la Terre	$R_T = 6,37 \times 10^3 \text{ km}$
Vitesse angulaire de rotation propre de la Terre	$\Omega_T = 7,29 \times 10^{-5} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$
Rayon de l'orbite géostationnaire	$R_g = 4,22 \times 10^4 \text{ km}$
Intensité du champ de pesanteur à la surface de la Terre	$g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$
Ordre de grandeur du champ magnétique à la surface de la Terre	$5 \times 10^{-5} \text{ T}$

Formulaire

- Impulsion d'une particule relativiste

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

- Énergie cinétique d'une particule relativiste

$$E_c = mc^2(\gamma - 1) \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

- Champ créé au point M par un dipôle de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ placé en O

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left(3 \frac{\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{r}}{r^2} \vec{r} - \vec{\mathcal{M}} \right) \quad \text{avec} \quad \vec{r} = \vec{OM}$$

- Couple subi par un dipôle de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ dans un champ magnétique extérieur $\vec{B}$

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$$

- Opérateur divergence en coordonnées cylindriques au point $M(r, \theta, z)$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

- Energie potentielle d'un dipôle de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ dans un champ $\vec{B}$: $E_p = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}$