

Problème 1

Étude d'une suspension d'Argile dans l'eau.

A. Approche qualitative

1a. Chaque plaquette porte la même charge surfacique sur ses 2 faces et est entourée du même électrolyte de chaque côté.
 De plus on étudie une zone où de nombreuses plaquettes sont présentes entre elles et régulièrement espacées de la distance D dans la direction (Ox) .
 Donc si on néglige les effets de bord, tout se passe comme si chaque plaquette était au centre d'un réseau infini périodique de plaquettes espacées de $D+h$ (période spatiale).
 On peut donc affirmer la symétrie gauche/droite.

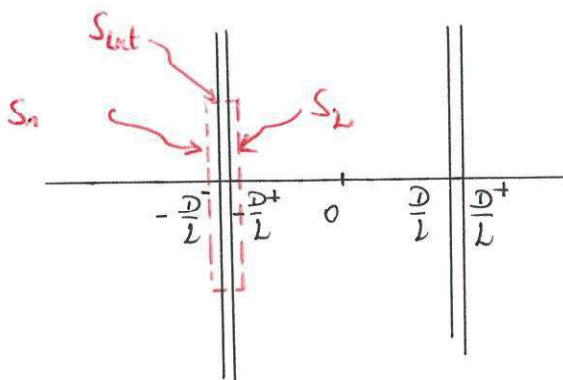
Les plaquettes étant conductrices infinies on pourra considérer que l'on a affaire dans un cas de symétrie plane : $\vec{E} = E_x(x) \vec{u}_x$
 De plus la distribution de charge est périodique de période $D+h$ donc
 $E_x(x + D+h) = E_x(x)$.

Le plan (Oyz) est également plan de symétrie de D donc.

$$E_x(-x) = -E_x(x)$$

$$\text{et } \underline{E_x(0) = 0}.$$

1b -



Par périodicité $E_x\left(\frac{D}{2}^-\right) = E_x\left(-\frac{D}{2}^-\right)$

Par antisymétrie $E_x\left(-\frac{D}{2}^+\right) = -E_x\left(+\frac{D}{2}^-\right) = -E_x\left(-\frac{D}{2}^-\right)$

Appliquons le théorème de Gauss en choisissant comme surface fermée de Gauss le cylindre fermé par les sections S_1 et S_2 très proches et de part et d'autre de la plaque en $-\frac{D}{2}$.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S}_{\text{ext}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \oint \vec{E} d\vec{S}_{\text{ext}} &= \iint_{PES_1} E_x(x_P) \vec{u}_x \cdot dS(-\vec{u}_x) + \iint_{PES_2} E_x(x_P) \vec{u}_x \cdot dS \cdot \vec{u}_x + 0 \\ &\quad \begin{array}{c} \downarrow \\ E_x\left(-\frac{D}{2}^-\right) \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ E_x\left(-\frac{D}{2}^+\right) \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ \vec{u}_x \cdot \vec{m} = 0 \\ \text{sur } S_{\text{lat}} \end{array} \\ &= S_2 \left(E_x\left(-\frac{D}{2}^+\right) - E_x\left(-\frac{D}{2}^-\right) \right) \\ &= 2S_2 E_x\left(-\frac{D}{2}^+\right) \end{aligned}$$

$$\frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{2\sigma S_2}{\epsilon_0 \epsilon} \quad \text{on pose } \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$$

$$\text{Donc } \vec{E}\left(-\frac{D}{2}^+\right) = \frac{\sigma}{\epsilon} \vec{u}_x \quad \text{et} \quad \vec{E}\left(+\frac{D}{2}^-\right) = -\frac{\sigma}{\epsilon} \vec{u}_x$$

1c. Première approche :

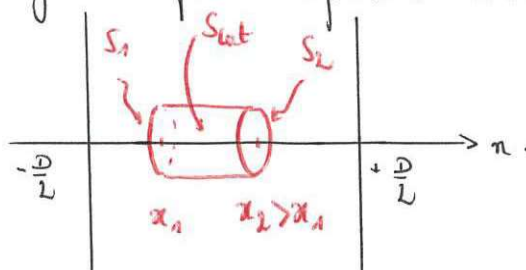
$$E_x \quad x = -\frac{D}{2}^+ \quad E_x = \frac{\sigma}{\epsilon} < 0$$

$$x = 0 \quad E_x = 0$$

$$x = +\frac{D}{2}^- \quad E_x = -\frac{\sigma}{\epsilon} > 0.$$

On peut donc supposer E_x croissant entre $-\frac{D}{2}^+$ et $+\frac{D}{2}^-$.

On peut confirmer cela en appliquant le théorème de Gauss au cylindre fermé représenté ci-dessous.



Comme au 1b on aura

$$S_2 (E_n(x_2) - E_n(x_1)) = \frac{S_2}{\epsilon_0} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) dx$$

Or la solution électrolytique contient des cations positifs et $\rho(x) > 0$.

Donc si $x_2 > x_1$ $\int_{x_1}^{x_2} \rho(x) dx > 0$ et $E_n(x_2) > E_n(x_1)$

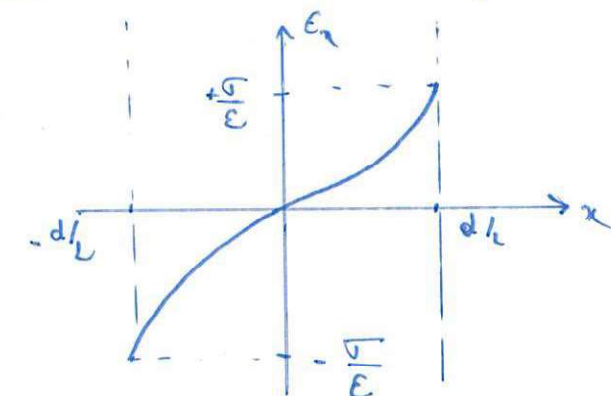
On retrouve bien que E_n est croissant.

Remarque on aurait pu utiliser l'équation locale de Poisson

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} < 0$$

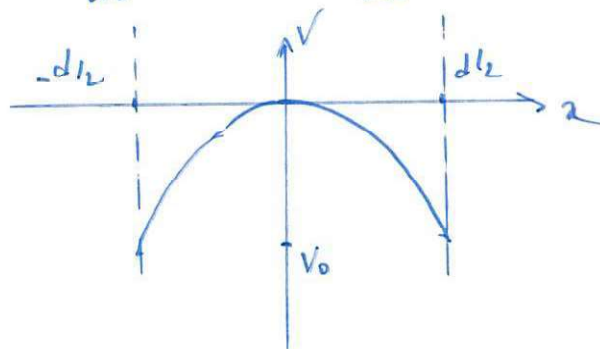
$$\frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{dE_n}{dx} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{dE_n}{dx} > 0.$$

On a donc l'allure suivante pour E_n et V .



$$\frac{dV}{dx} = -E_n > 0$$

$$\frac{dV}{dx} = -E_n < 0$$



$V(x) < V(0) = 0.$

2a. Pour un cation de charge $+e$, $\mathcal{E}_p = eV(x) < 0$.

$$n(x) = n_0 \exp\left(-\frac{E_p(x)}{k_B T}\right) = n_0 \exp\left(\frac{e|V(x)|}{k_B T}\right)$$

* A haute température si $k_B T \gg e|V_0| > e|V(x)|$
alors $n \approx n_0$

L'agitation thermique tend à uniformiser la distribution.

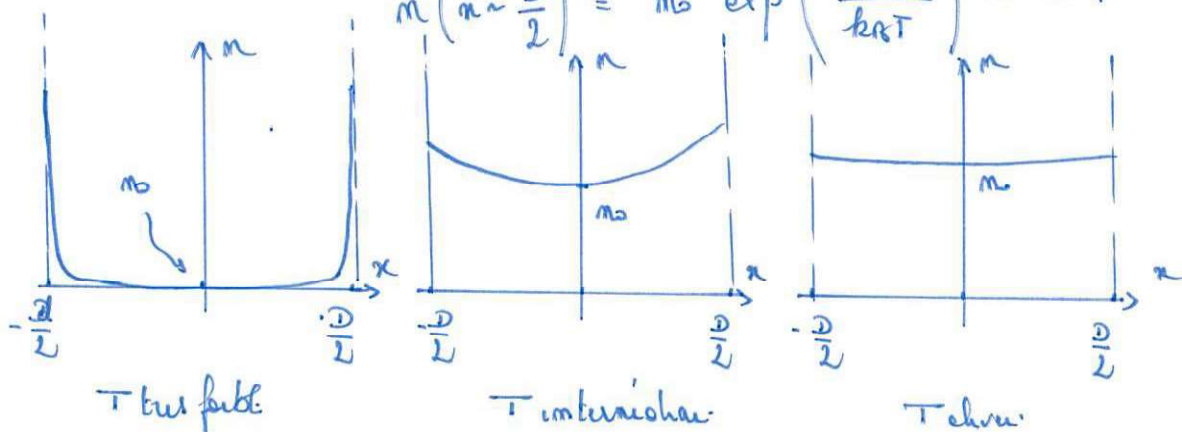
* A température "intermédiaire".

$|V(x)|$ est maximum sur les bords, au niveau des plaques
 $n(x)$ est maximum au voisinage des plaques comme
l'indique le texte.

* A très basse température $k_B T \ll e|V_0|$.

$$n(x=0) = n_0$$

$$n\left(x \sim \frac{D}{2}\right) = n_0 \exp\left(\frac{e|V_0|}{k_B T}\right) \gg n_0$$



2b. par homogénéité de l'expression proposée pour $n(x)$,
 $k_B T$ est une énergie.

k_B s'exprime ds le système SI en $J \cdot K^{-1}$

2c - $n_0 = n(x=0)$ - dépend de T et de D .

lorsque $D \rightarrow \infty$ (plaquette s'éloigne) manifeste $n_0 \rightarrow 0$
par électroneutralité de la solution.

3a - Première approche : "classique".

On cherche d sous la forme

$$d = \tau^a e^b \epsilon^c (k_B T)^d \quad \text{où } \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$$

↑ Il semble "naturel" de ne pas
dissocier ϵ_0 et ϵ_r (de toute façon
 ϵ_r est sans dimension)

$$\dim \tau = \text{I T L}^{-2}$$

$$\dim e = \text{I T}$$

$$\dim \epsilon = \dim \frac{q^2}{\lambda^2 F} = \text{I}^2 \text{T}^{+2} \text{L}^{-2} \text{I}^{-1} \text{L}^{-1} \text{T}^{+2}$$

$$= \text{I}^{-1} \text{L}^{-3} \text{T}^4 \text{I}^2$$

$$\dim (k_B T) = \text{I L}^2 \text{T}^{-2}$$

$$\text{Donc } L = (\text{I T L}^{-2})^a (\text{I T})^b (\text{I}^{-1} \text{L}^{-3} \text{T}^4 \text{I}^2)^c (\text{I L}^2 \text{T}^{-2})^d$$

$$= \text{I}^{a+b+2c} \text{I}^{-c+d} \text{L}^{-2a-3c+2d} \text{T}^{a+b+4c-2d}$$

$$\text{Soit } \begin{cases} a+b+2c=0 \\ d-c=0 \\ -2a-3c+2d=1 \\ a+b+4c-2d=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c=d \\ a+b+2c=0 \\ -2a-c=1 \\ a+b+2c=0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{Ces 2 équations sont} \\ \text{identiques.} \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c=d \\ a+b+2c=0 \\ +2a+c=-1. \end{cases}$$

(6)

Système de 3 équations à 4 inconnues : on n'a pas une solution (on pourrait s'en douter : $\sqrt{\frac{e}{\sigma}}$ est homogène à une longueur mais ne convient pas au problème).

D'après ce que l'on a vu à la question 3e, d doit augmenter à T .

On peut donc fixer $d = +1$.

Donc $c = +1$

$a = -1$

$b = -a - 2c = -1.$

Soit $d = \frac{\epsilon k_B T}{e |\sigma|}.$

3b. On a déjà commenté la dépendance en T .

d diminue si $|\sigma|$ augmente : c'est normal l'effet des plaques sera alors plus "interne" : l'agencement spatial provoqué par les plaquettes sera plus important et d diminuera.

4a. $\sigma = -e n^*$

$n^* = \frac{\sigma}{-e} = \frac{0,3}{1,6 \cdot 10^{-19}} \sim 2 \cdot 10^{18} \text{ m}^{-3}$
 $\sim 2 \text{ mm}^{-3}$

Cette valeur est réaliste puisque les charges $-e$ sont "fixées" à la surface des plaquettes et sont dues à l'existence d'ions négatifs dans la structure de l'apile.

La taille d'ions est de l'ordre de $1 \text{ \AA}$ à 1 nm .

4b. $E_s = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{0,3}{78 \times 8,85 \cdot 10^{-12}} \sim 4 \cdot 10^8 \text{ V m}^{-1}.$

On peut comparer ce champ à champ à $99 \text{ \AA}$ d'un ion de charge $-e$.

$$|E| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{\lambda^2} = \frac{1}{4 \times \pi \times 8,85 \times 10^{-12} \times 78} \frac{1,6 \times 10^{-19}}{10^{-20}} = 2 \cdot 10^9 \text{ V m}^{-1}.$$

La valeur précédemment trouvée est bien cohérente

$$\text{Lc. } d = \frac{\epsilon k_B T}{e|E|} = \frac{78 \times 8,85 \times 10^{-12} \times 1,38 \times 10^{-23} \times 298}{1,6 \times 10^{-19} \times 0,3} = \underline{\underline{6 \times 10^{-11} \text{ m}}}$$

On retrouve un ordre de grandeur atomique, ce qui est satisfaisant et $d < D$.

B. Obtention des équations caractérisant la suspension

5. Réutilisons l'expression du théorème de Gauss donné à la question 4. avec $x_2 = x$ et $x_1 = 0$.

$$E_x(x) - E_x(0) = \frac{1}{\epsilon} \int_0^x \rho(u) du.$$

$$\text{Soit } \frac{dE_x}{dx} = - \frac{d^2V}{dx^2} = \frac{\rho(x)}{\epsilon}$$

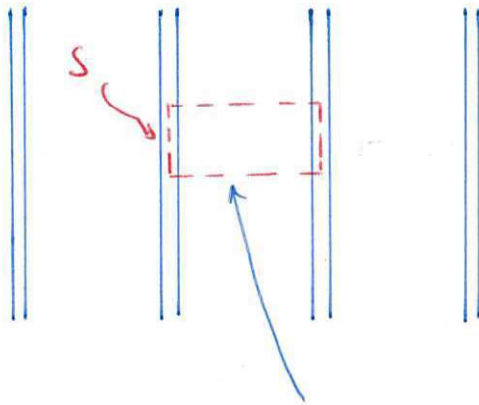
$$\underline{\underline{\frac{d^2V}{dx^2} = - \frac{e}{\epsilon} n(x)}}.$$

On peut alors utiliser directement l'éq. de Poisson.

$$6- \quad \frac{d^2V}{dx^2} = - \frac{e}{\epsilon} n_0 \exp\left(- \frac{E_p(x)}{k_B T}\right) \quad \text{avec } E_p(x) = eV(x)$$

$$\underline{\underline{\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{e}{\epsilon} n_0 \exp\left(- \frac{eV(x)}{k_B T}\right) = 0}}$$

7 -



Cette portion doit être nulle.

$$2VS + \int_{n=-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} p(n) dn = 0$$

$$V + e \int_0^{\frac{D}{2L}} n(n) dn = 0.$$

C - Etude de la solution de l'équation [PB]

8. Injectons la forme proposée dans l'équation [PB].

$$v(n) = \frac{2k_B T}{e} \ln \left(\cos \left(\frac{n}{L} \right) \right)$$

$$\rightarrow \exp \left(-\frac{e}{k_B T} v \right) = \exp \left(-2 \ln \left(\cos \frac{n}{L} \right) \right) = \frac{1}{\cos^2 \frac{n}{L}}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{dv}{dn} &= \frac{2k_B T}{e} \frac{1}{\cos \frac{n}{L}} \left(-\frac{1}{L} \right) \sin \frac{n}{L} \\ &= -\frac{2k_B T}{eL} \tan \frac{n}{L} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \frac{d^2 v}{dn^2} = -\frac{2k_B T}{eL^2} \frac{1}{\cos^2 \frac{n}{L}}$$

Donc $-\frac{2k_B T}{eL^2} \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{L}} + \frac{e m_0}{\epsilon} \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{L}} = 0.$

Soit $\frac{2k_B T}{eL^2} = \frac{e m_0}{\epsilon}.$

$$L^2 = \frac{2\epsilon k_B T}{e^2 m_0}.$$

$$L = \sqrt{\frac{2\epsilon k_B T}{m_0 e^2}}$$

Rq * C'est donc cette longueur L qui détermine les variations spatiales des grandeurs du pp. et non d .
Toutefois la question 10 montre que L est lié à d et D à qui est ressortant compte tenu du rôle que l'on a fait jouer à d dans l'analyse qualitative.

* La solution sera définie si $\cos \frac{\pi}{L} > 0$ pour $\pi \in [-\frac{D}{L}, \frac{D}{L}]$
ce qui impose $|\frac{\pi}{L}| < \frac{\pi}{2}$ pour $\pi \in [-\frac{D}{L}, \frac{D}{L}]$
soit $\frac{D}{L} < \frac{\pi}{2}$ ou $L < \frac{D}{\frac{\pi}{2}}.$

9- $E_n = -\frac{dV}{dn} = + \frac{2k_B T}{eL} \tan \frac{\pi}{L}$

$$n(x) = \frac{m_0}{\cos^2 \frac{\pi}{L}}.$$

(cf calculs au début de la question 8)

Les graphes de E_n , $n(x)$, $v(x)$ sont semblables à ceux tracés dans la partie 4.

10 - A partir de l'électrostatique.

$$\begin{aligned}
 0 &= \sigma + e \int_0^{D/L} n(x) dx \\
 &= \sigma + e \int_0^{D/L} \frac{n_0}{\cos^2 \frac{\pi}{L} x} dx \\
 &= \sigma + e n_0 L \left[\tan \frac{\pi}{L} x \right]_0^{D/L} \\
 &= \sigma + e n_0 L \tan \frac{D}{2L}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tan \frac{D}{2L} &= \frac{-\sigma}{e n_0 L} = L \left(\frac{-\sigma}{e n_0 L^2} \right) \\
 &= L \left(\frac{-\sigma}{n_0 e L^2 \epsilon k_B T} \right) \\
 &= L \left(\frac{-\sigma e}{L \epsilon k_B T} \right) \\
 &= \frac{L}{2d}.
 \end{aligned}$$

Donc $\tan \frac{D}{2L} = \frac{L}{2d}.$

A partir de la valeur du champ à la surface des plaques

$$E_x \left(\frac{D}{L} \right) = \frac{-\sigma}{\epsilon} = \frac{2k_B T}{eL} \tan \frac{D}{2L}.$$

$$\tan \frac{D}{2L} = L \left(\frac{-e\sigma}{\epsilon 2k_B T} \right) = \frac{L}{2d}.$$

11-a- $L \ll d$.

Alors $\tan \frac{D}{2L} = \frac{L}{2d} \ll 1$ donc $\tan \frac{D}{2L} \sim \frac{D}{2L}$.

Ainsi $\frac{D}{2L} = \frac{L}{2d}$.

$$L = \sqrt{Dd}$$

Cette expression est correcte si $L \ll d$ soit $D \ll d$.

Or $d = 6 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ (question A4)

Alors que $D \sim 0,1$ à 10 mm .

Cette hypothèse $L \ll d$ et l'expression associée ne sont donc pas plausibles.

b- $L \gg d$.

Alors $\tan \frac{D}{2L} = \frac{L}{2d} \gg 1$ donc $\frac{D}{2L} \approx \frac{\pi}{2}$

$$L = \frac{D}{\pi}$$

Cette solution est correcte si $L = \frac{D}{\pi} \gg d$ soit $D \gg d$ ce qui est le cas pour les valeurs élevées de $D \sim 10 \text{ mm}$ (mais pas pour $D \sim 0,1 \text{ mm}$).

On a alors $m_0 = \frac{2k_B T E}{e^2} \frac{1}{L^2}$ soit $m_0 = \frac{2k_B T E}{e^2} \frac{\pi^2}{D^2}$.

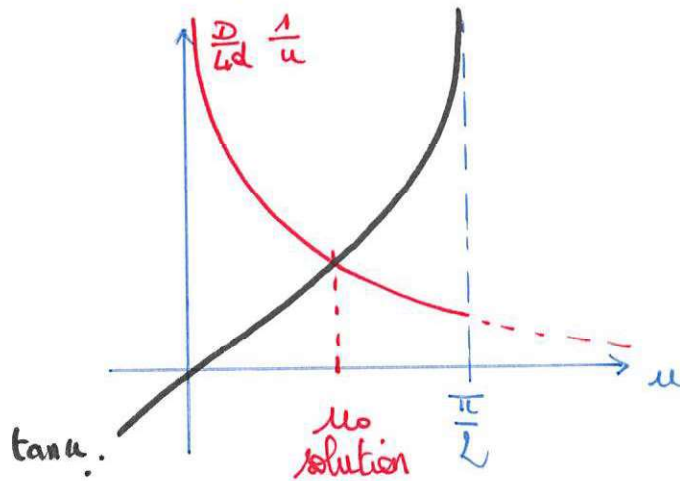
m_0 décroît en $1/D^2$ et tend vers 0 si $D \rightarrow +\infty$.

$$12 - \tan \frac{D}{2L} = \frac{L}{4d} = \frac{2L}{D} \frac{D}{4d}.$$

On trace les fonctions $u \mapsto \tan u$.

$$u \mapsto \frac{D}{4d} \frac{1}{u}.$$

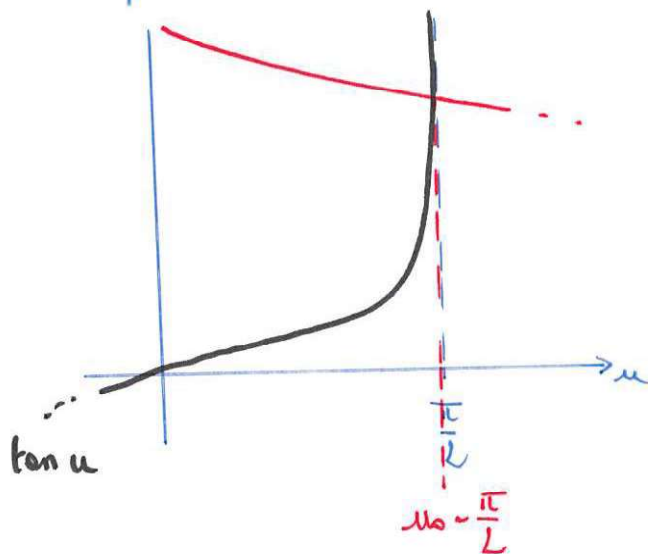
et on s'intéresse à l'intersection de ces 2 courbes.



$$\text{Donc } \frac{D}{2L} = n_0$$

$$L = \frac{D}{2n_0}.$$

Remarque : dans le cas ou $D \gg d$.



On retrouve

$$\frac{D}{2L} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Soit } L = \frac{D}{\pi}$$

$$13 - n_s = \frac{n_0}{\cos^2 \frac{D}{2L}} = n_0 \left(1 + \tan^2 \frac{D}{2L} \right) = n_0 \left(1 + \frac{L^2}{4d^2} \right)$$

$$\text{avec } L^2 = \frac{2k_B T \epsilon}{m_0 e^2} \quad \text{et} \quad d = \frac{k_B T \epsilon}{10 e}$$

$$\text{On a } \boxed{n_s = n_0 + \frac{\sigma^2}{2k_B T \epsilon}}$$

n_s est d'autant plus faible que T est grand et 10 est faible.

D - Approche alternative de la répartition des cations -

$$14a - n(x) = n_0 \exp\left(-\frac{eV(x)}{k_B T}\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dx} &= -\frac{e}{k_B T} \frac{dV}{dx} n_0 \exp\left(-\frac{eV(x)}{k_B T}\right) \\ &= -\frac{e}{k_B T} \frac{dV}{dx} n(x). \end{aligned}$$

$$\left| \frac{dn}{dx} = \frac{e}{k_B T} \frac{dV}{dx} \frac{d^2 V}{dx^2} \right|$$

14b - On peut intégrer cette équation par rapport à x .

$$\begin{aligned} n(x) - n_0 &= \frac{e}{k_B T} \frac{1}{2} \left(\left(\frac{dV}{dx} \right)^2 - \left(\frac{dV}{dx} \right)^2_{(x=0)} \right) \\ &= \frac{e}{2k_B T} \left(E_x^2 - \underbrace{E_x^2}_{=0} \right) \end{aligned}$$

$$\left| n(x) = n_0 + \frac{e}{2k_B T} E_x^2 \right|$$

$$14c - \left| n_s = n_0 + \frac{\Sigma}{2k_B T} \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \right|$$

On retrouve le même expression qu'à la question 13

$$\text{Si } D \rightarrow +\infty, n_0 \rightarrow 0 \text{ donc } \left| n_s \rightarrow \frac{\sigma^2}{2k_B T \epsilon} \right|$$

14d - σ_s doit être de la forme $\sigma_s = \underbrace{(e n_s)}_{\substack{\text{densité volumique au} \\ \text{voisinage des plaques}}} a$
 $\hookrightarrow$ l'épaisseur de la zone chargée (taille atomique)

La seule distance atomique pertinente au pb est d ($\sim 0,6 \text{ \AA}$)

On prendra $\left| \sigma_s = (e n_s) d \right|$.

$$\text{or } d = \frac{k_B T \epsilon}{10/e} \text{ et } n_s = \frac{\sigma^2}{2k_B T \epsilon} \text{ alors } \left| \sigma_s = \frac{10\sigma}{d} \right|$$