

DM2 5/2 Correction

Problème 1 : expérience du palais de la découverte

1) La personne et son environnement vont se comporter comme un condensateur si l'on impose une différence de potentiel entre eux. Les charges vont s'accumuler au niveau des pointes des cheveux (qui font office d'armature du condensateur). Etant toutes de même signe, celles-ci vont se repousser les unes par rapport aux autres de sorte que chaque cheveu va subir une résultante des forces électrostatiques tendant à l'éloigner des autres. Si cette force de répulsion est supérieure au poids, les cheveux vont se dresser sur la tête.

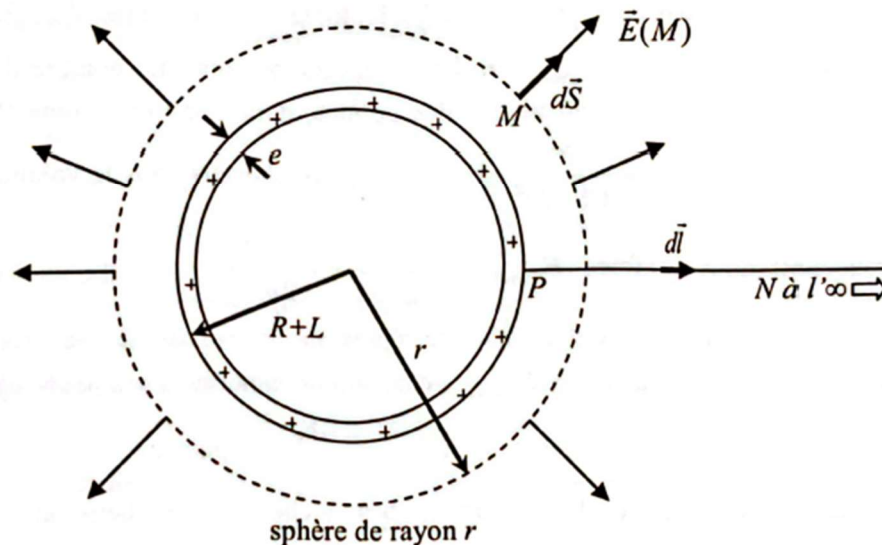
2) La densité des cheveux étant grande, on peut considérer que les charges électriques réparties sur les pointes des cheveux forment une distribution volumique de charges. Par ailleurs, les cheveux se dressant dans toutes les directions, cette distribution de charges peut être considérée comme invariante par toute rotation autour du centre O de la tête de la personne. Ainsi, en prenant un point M quelconque de l'espace, tout plan contenant la droite OM est plan de symétrie, donc le champ électrique $\vec{E}(M)$ appartient à l'intersection de ces plans : il est donc radial. L'invariance des charges par rotation autour de O entraîne que $\vec{E}(M)$ ne dépend que de la distance $OM = r$ au point O. Au final, on a donc

$$\boxed{\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r}$$

3) On applique le théorème de Gauss à une sphère (S) de rayon r : $\oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$, où

Q_{int} représente la charge totale contenue à l'intérieur de (S). Si $r > R + L$, la sphère (S) englobe l'ensemble des charges Q_{tot} contenues dans la chevelure. Par ailleurs, le vecteur surface $d\vec{S}$ à la surface de la sphère (S) est colinéaire au champ électrique (puisque tous deux radiaux), d'où $\oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{(S)} E dS = E(r)4\pi r^2$ puisque le champ électrique est uniforme

sur la sphère de rayon r . On a donc $\vec{E}(M) = \frac{Q_{tot}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$.



On pourrait exprimer la charge de la chevelure Q_{tot} en fonction de la charge d'un cheveu q , mais l'énoncé demande une expression faisant intervenir V_0 mais pas q . On calcule donc la circulation du champ électrique le long d'un segment qui relie P, situé aux bords de la chevelure, à N, situé à l'infini (voir schéma).

$\int_P^N \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{R+L}^{+\infty} E(r) dr = V_P - V_N = V_0 - 0$. On a

donc $V_0 = \int_{R+L}^{+\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{R+L}^{+\infty} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(R+L)}$. Au final, $\boxed{\vec{E}(M) = \frac{(R+L)V_0}{r^2} \vec{u}_r}$.

A l'intérieur de la chevelure, pour $r < R$, la sphère (S) ne contient aucune charge (celle-ci étant répartie à la pointe des cheveux). Donc le champ électrique y est nul.

4) La tranche située entre z et $z + dz$ contient une charge totale $dq = \rho(z)Sdz$. Elle subit donc une force $d\vec{F} = (dq)\vec{E} = \rho(z)E(z)Sdz\vec{u}_z$. La force totale subie par les charges situées dans (V) vaut donc $\boxed{\vec{F} = \int_0^e \rho(z)E(z)Sdz\vec{u}_z}$.

5) L'équation de Maxwell-Gauss s'écrit $\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$. Ici, le problème étant unidimensionnel et le champ étant selon Oz, elle se note $\frac{dE}{dz} = \frac{\rho(z)}{\epsilon_0}$. On en déduit

$$\vec{F} = \epsilon_0 S \int_0^e E(z) \frac{dE}{dz} dz \vec{u}_z = \epsilon_0 S \int_{E_{\text{surface}}}^{E_{\text{intérieur}}} E dE \vec{u}_z = \epsilon_0 S \left[\frac{E^2}{2} \right]_{E_{\text{surface}}}^{E_{\text{intérieur}}} \vec{u}_z.$$

Or on a vu que le champ électrique à l'intérieur de la chevelure était nul : $E_{\text{intérieur}} = 0$. On aboutit bien à l'expression de l'énoncé pour $\vec{F}$.

6) Calculons dans un premier temps la force électrostatique $\vec{F}_{\text{cheveu}}$ que subit un cheveu. La tête contient $N_{\text{cheveux}} = n_c 4\pi R^2$ cheveux au total. Le nombre de cheveux par unité de surface au niveau des pointes, donc dans le volume (V), vaut donc $n_{c,\text{pointe}} = \frac{N_{\text{cheveux}}}{4\pi(R+L)^2} = n_c \frac{R^2}{(R+L)^2}$. Il y a $n_{c,\text{pointe}}S$ cheveux dans le volume (V). Chaque

cheveu subit donc la force $\vec{F}_{\text{cheveu}} = \frac{\vec{F}}{n_{c,\text{pointe}}S} = -\frac{1}{2n_{c,\text{pointe}}} \epsilon_0 E_{\text{surface}}^2 \vec{e}_z$. Cette force est dirigée vers le haut : il s'agit bien d'une répulsion électrostatique entre les cheveux. Un cheveu reste dressé sur la tête si $\vec{F}_{\text{cheveu}}$ est supérieur en norme à son poids, égal à μLg . Or,

d'après le résultat de la question 3, $E_{\text{surface}} = \frac{V_0}{(R+L)}$, puisque $r = R+L$ à proximité immédiate des cheveux. La condition des « cheveux en hérissés » s'écrit donc

$$\frac{1}{2n_{c,\text{pointe}}} \epsilon_0 \frac{V_0^2}{(R+L)^2} > \mu Lg, \text{ c'est-à-dire } \boxed{V_0 > R \sqrt{\frac{2n_c \mu Lg}{\epsilon_0}}}$$

AN : $n_c = 200 \text{ cm}^{-2} = 2.10^6 \text{ m}^{-2}$, $R = 7 \text{ cm}$, $L = 30 \text{ cm}$ (longs cheveux). Il reste à estimer la masse linéique des cheveux : on

peut écrire $\mu = \mu_{\text{vol}} r_{\text{cheveu}}^2$, où μ_{vol} désigne la masse volumique des cheveux et r_{cheveu} leur rayon. Avec $r_{\text{cheveu}} = 0,07 \text{ mm}$, on trouve $\mu = 2.10^{-5} \text{ kg.m}^{-1}$. La valeur seuil théorique de la tension vaut alors $\boxed{360 \text{ kV}}$. On obtient l'ordre de grandeur de la tension que peut délivrer la machine électrostatique du Palais de la Découverte. A noter qu'en pratique, dans une chevelure, de nombreux cheveux sont emmêlés et collés (cela se voit sur la photo du début d'énoncé où les cheveux forment des paquets par endroit) de sorte que le nombre de cheveux « libres » est moins important, baissant de manière significative la tension seuil nécessaire pour hérissés les cheveux.