

Confinement d'une particule chargée dans un champ magnétique.

(Centrale MP 2016)

Remarque préliminaire : le sujet commence par un long texte sur la magnétosphère ; ce texte peut « faire peur » car il est long et aborde des notions complexes, mais en réalité il ne fait que donner le contexte et fournir quelques éléments pour répondre aux 3 questions de la partie A. C'est pour cela qu'il faut lire un peu l'ensemble de l'énoncé pour savoir à l'avance s'il est utile de lire ce type de document en profondeur ou s'il suffit de le lire en diagonale !

I.A.1 Le vent solaire excite les particules de l'ionosphère. En se désexcitant, ces mêmes particules retournent dans leur état de repos et **rayonnent dans le visible**.

La transition entre deux niveaux d'énergie électroniques, de l'ordre de quelques eV, correspond effectivement à l'émission d'un photon dans le domaine visible.

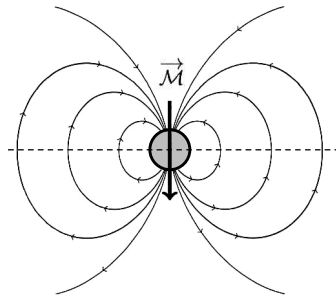
Rq : une partie de la réponse à cette question se trouve à la fin du texte introductif : « les particules accélérées dans la queue de la magnétosphère [dernière couche de l'atmosphère avant le milieu interplanétaire] arrivent le long du champ sur les couches denses de l'atmosphère et produisent des aurores ». Il reste à imaginer le mécanisme qui, lors de la collision entre les particules du vent solaire et les molécules de l'atmosphère, produit un rayonnement visible. De plus, quand le texte parle des « couches denses de l'atmosphère », il s'agit en fait de l'ionosphère car l'énoncé de la question I.A. mentionne des altitudes allant de 80 à 400 km (cf. cours sur la propagation des ondes dans l'ionosphère). Notez que l'ionosphère est « dense » par rapport aux couches supérieures mais évidemment beaucoup moins dense que la troposphère (partie basse et respirable de l'atmosphère, allant de 0 à 10-12 km) ; heureusement le vent solaire ne descend pas jusqu'à la troposphère, ce serait très préjudiciable à la vie !

I.A.2 L'axe magnétique de la Terre étant quasiment orthogonal au vent solaire, si le phénomène se produit dans l'hémisphère Nord, par symétrie, il va aussi se produire dans l'hémisphère Sud. (cf. figure 1)

I.A.3 Représentons les lignes de champ que l'on obtiendrait en modélisant par un unique dipôle. Attention à bien représenter le vecteur moment vertical (et vers le bas) afin de mieux effectuer la comparaison demandée.

Ces lignes de champ sont invariantes par révolution autour de l'axe du moment magnétique et sont antisymétriques par rapport au plan Π normal au moment, passant par le centre de la Terre (-----).

La figure 1 montre que les lignes de champ de la magnétosphère sont comme « repoussées » par le vent



solaire : la carte de champ ne présente plus

l'invariance par révolution mais conserve l'antisymétrie par rapport au plan Π .

Explication possible (*non explicitement demandé*) : le vent solaire est un ensemble de particules chargées et constitue donc un courant ; or, la figure 1 montre que ce courant arrive quasi orthogonalement à l'axe du moment puis s'écoule autour de la Terre quasiment symétriquement par rapport à Π : il brise donc la symétrie de révolution du champ, mais conserve quasiment son antisymétrie par rapport à Π .

I.B.1 Calculons le rapport des normes du poids mg et de la force de Lorentz magnétique $e v B$ avec B la valeur du champ magnétique terrestre, v la vitesse de l'électron. Estimons v pour une énergie cinétique de 1 keV :

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = 2 \cdot 10^7 \text{ m.s}^{-1}$$

Ainsi

$$\frac{mg}{e v B} = 6 \cdot 10^{-14}$$

De fait,

Le poids est négligeable devant la force magnétique.

Rq : l'énergie des particules du vent solaire est donnée dans le texte de la question I.A. qui mentionne le keV ; il ne faut pas rater cette info pour répondre à cette question ! Cela dit, on peut également aborder la question en calculant la vitesse v au-delà de laquelle la force de Lorentz devient supérieure au poids : on trouve $v \approx 10^{-6} \text{ m.s}^{-1}$ ce qui est à coup sûr beaucoup plus faible que les vitesses de particules cosmiques ! De fait, un keV correspond à $2 \cdot 10^7 \text{ m.s}^{-1}$!!

I.B.2 Appliquons le principe fondamental de la dynamique à l'électron dans le référentiel terrestre supposé galiléen,

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{v} \wedge \vec{B}_0$$

Projetons cette équation sur $\vec{u}_z$. Le champ magnétique est selon $\vec{u}_z$ donc

$$(\vec{v} \wedge \vec{B}_0) \cdot \vec{u}_z = 0 \quad \text{Ainsi } \underline{v_z(t) = v_{0z}}.$$

Or, Puisque la force magnétique de Lorentz ne travaille pas, l'énergie cinétique de l'électron est conservée au cours du mouvement. Entre l'instant initial et un instant t quelconque,

$$\frac{1}{2} m v_{0z}^2 = \frac{1}{2} m (v_x^2(t) + v_y^2(t) + v_{0z}^2)$$

Cette équation implique $\underline{v_x(t) = v_y(t) = 0}$ à tout instant. La particule ne ressent pas le champ magnétique.

La particule est en mouvement rectiligne uniforme selon $\vec{u}_z$, parallèlement aux lignes de champ magnétique.

Rq : Méditez bien cette démonstration : hormis un calcul explicite de $x(t)$ et $y(t)$, comme à la question B.3.b, montrant à partir des conditions initiales que ceux-ci sont nuls à tout instant, c'est la seule qui démontre sans ambiguïté que le mouvement est rectiligne ! Dire que la force de Lorentz est nulle à $t = 0$ n'est pas tout à fait suffisant...

I.B.3.a Le principe fondamental de la dynamique se met sous la forme

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{eB_0}{m} (\vec{v} \wedge \vec{u}_z)$$

eB_0/m est donc homogène à une pulsation, d'où

$$\omega_c = \frac{eB_0}{m}$$

Évaluons le champ magnétique terrestre à l'altitude d'un satellite géostationnaire en $R = R_g$. Le champ magnétique créé par le dipôle magnétique terrestre est donné dans le formulaire, et peut s'écrire en norme

$$B(r) = \frac{\mu_0 k}{4\pi r^3}$$

où k est une constante directement liée au moment magnétique et ne dépendant pas de r . Or, le champ magnétique à la surface de la Terre ($r = R_T$) vaut $5 \cdot 10^{-5}$ T. Dans ce cas, $B(R_g)$ peut se réécrire

$$B(R_g) = B(R_T) \left(\frac{R_T}{R_g} \right)^3 = 2 \cdot 10^{-7} \text{ T}$$

d'où

$$\omega_c = \frac{eB(R_g)}{m} = 3 \cdot 10^4 \text{ rad.s}^{-1}$$

Rq : le coefficient k introduit ci-dessus dépend de la position angulaire à la surface de la Terre mais compte tenu de la question posée, cette dépendance est sans intérêt ici.

I.B.3.b En calculant le produit vectoriel $\vec{v} \wedge \vec{u}_z$, le principe fondamental de la dynamique se met sous la forme

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix} = -\omega_c \begin{pmatrix} v_y \\ -v_x \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \underline{v_z(t) = v_{0z} = 0 \text{ à tout instant.}}$$

Le système d'équations s'écrit $\begin{cases} \dot{v}_x = -\omega_c v_y \\ \dot{v}_y = \omega_c v_x \end{cases}$

Dérivons la première,

$$\begin{aligned} \ddot{v}_x &= -\omega_c \dot{v}_y \\ &= -\omega_c^2 v_x \end{aligned}$$

On obtient une équation différentielle du deuxième ordre. La solution s'écrit

$$v_x(t) = A \cos \omega_c t + C \sin \omega_c t$$

Or $v_x(0) = v_{0x}$ et $v_y(0) = 0$. D'après le système d'équations, la deuxième condition initiale revient à écrire $\dot{v}_x(0) = 0$. Il vient

$$v_x(t) = v_{0x} \cos \omega_c t \quad \text{et} \quad v_y(t) = v_{0x} \sin \omega_c t$$

Intégrons ces deux relations pour trouver les lois horaires $x(t)$ et $y(t)$. En prenant l'origine du repère de sorte que $y(0) = x(0) = 0$, il vient

$$x(t) = \frac{v_{0x}}{\omega_c} \sin \omega_c t \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{v_{0x}}{\omega_c} (1 - \cos \omega_c t)$$

Élevons au carré ces deux termes et additionnons-les,

$$x^2 + \left(y - \frac{v_{0x}}{\omega_c} \right)^2 = \left(\frac{v_{0x}}{\omega_c} \right)^2$$

On reconnaît l'équation cartésienne d'un cercle. **La trajectoire de l'électron est circulaire de rayon $R_c = v_{0x}/\omega_c$.**

En prenant comme dans la question I.B.1 une vitesse de l'ordre de $2 \cdot 10^7 \text{ m.s}^{-1}$,

$$R_c = 0,5 \text{ km}$$

I.B.4.a Raisonnons par dimension. La puissance est le rapport d'une énergie sur un temps, d'où

$$[P] = \text{M.L}^2.\text{T}^{-3}$$

Déterminons la dimension de ε_0 . D'après l'expression de la force de Coulomb,

$$[\varepsilon_0] = \left[\frac{q^2}{F r^2} \right] = \left[\frac{e^2}{\text{M.L}^3.\text{T}^{-2}} \right]$$

d'où

$$[\varepsilon_0] = [e]^2.\text{M}^{-1}.\text{L}^{-3}.\text{T}^2$$

Avec $[c] = \text{L.T}^{-1}$ et $[dv/dt] = \text{L.T}^{-2}$, l'équation aux dimensions s'écrit

$$\text{M.L}^2.\text{T}^{-3} = \text{M.L}^3.\text{T}^{-2} [e]^{\alpha-2} (\text{L.T}^{-1})^\beta (\text{L.T}^{-2})^2$$

c'est-à-dire

$$[e]^{\alpha-2} \text{L}^{\beta+3} \text{T}^{-\beta-3} = 1$$

Finalement

$$\alpha = 2 \quad \text{et} \quad \beta = -3$$

Rq : 1) Normalement il faut décomposer les grandeurs sur les dimensions fondamentales M, L, T et I (courant électrique) ; toutefois, ici, la charge joue le rôle de dimension indépendante de {M,L,T} puisqu'elle est la seule à dépendre du courant électrique.

2) Ici on peut également procéder en écrivant :

$$[P] = [E] \times T^{-1} = [F] \times L T^{-1} = \frac{[q]^2}{[\varepsilon_0] \times L^2} \times L T = \frac{[q]^2}{[\varepsilon_0]} \times L^{-1} T^{-1}$$

ce qui permet une identification plus directe avec la formule proposée (ε_0 s'élimine) :

$$[P] = \frac{[q]^2}{[\varepsilon_0]} \times L^{-1} T^{-1} = \left[\frac{e^\alpha c^\beta}{\varepsilon_0} \right] \times \left[\left\| \frac{d\vec{v}}{dt} \right\|^2 \right] = \frac{[e]^\alpha}{[\varepsilon_0]} \times (LT^{-1})^\beta \times (LT^{-2})^2$$

$$= \frac{[e]^\alpha}{[\varepsilon_0]} \times L^{\beta+2} T^{-\beta-4}$$

et donne : $\{\alpha = 2; \beta + 2 = -1; -\beta - 4 = -1\}$ CQFD.

I.B.4.b Utilisons le théorème de la puissance cinétique appliqué à l'électron,

$$dE_c = -\mathcal{P} dt \quad (\text{la force de Lorentz ne travaille})$$

La particule perd de l'énergie par rayonnement d'où le signe moins. D'après la question I.B.3.b, $v = R_c \omega_c$ donc

$$dE_c = m v dv = m \omega_c^2 R_c dR_c$$

Le mouvement étant supposé circulaire et uniforme à tout instant, l'accélération s'écrit donc $\|\vec{a}\| = R_c \omega_c^2$. La puissance rayonnée devient

$$\mathcal{P} = \frac{e^2 \omega_c^4}{6\pi \varepsilon_0 c^3} R_c^2$$

Le théorème de la puissance cinétique se réécrit

$$\frac{dR_c}{dt} = -\frac{e^2 \omega_c^2}{6\pi \varepsilon_0 c^3 m} R_c$$

Avec $m = e B_0 / \omega_c$, on obtient l'équation différentielle du premier ordre suivante

$$\frac{dR_c}{dt} = -\frac{e \omega_c^3}{6\pi \varepsilon_0 c^3 B_0} R_c$$

Réolvons cette équation avec $R_c(0) = R_{c0}$,

$$R_c(t) = R_{c0} e^{-t/\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{6\pi \varepsilon_0 c^3 B_0}{e \omega_c^3}$$

Calculons numériquement τ grâce aux valeurs trouvées à la question I.B.3.a :

$$\tau = 2 \cdot 10^{14} \text{ s}$$

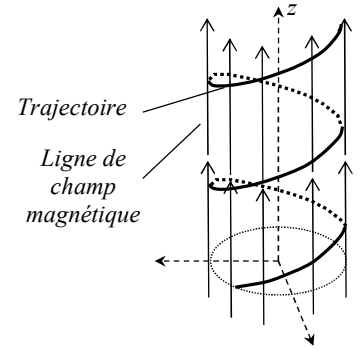
Comparons cette valeur à la période de révolution $2\pi/\omega_c = 2 \cdot 10^{-4} \text{ s}$. Au vu de cette valeur, **le rayonnement de la particule peut être négligé**. Le mouvement peut donc être considéré comme circulaire.

I.B.5 D'après les questions I.B.2 et I.B.3.b, le mouvement de la particule se décompose en un mouvement circulaire dans le plan (Oxy) et un mouvement rectiligne selon (Oz) . **L'électron suit un mouvement hélicoïdal autour des lignes de champ magnétique.**

On peut même dire que **le support de l'hélice parcourue par l'électron est un tube de champ magnétique** (schéma ci-contre).

Pour la suite il est utile de remarquer que, d'après les calculs de la question I.B.3.b, la vitesse orthoradiale de ce mouvement est constante, vaut $v_\theta = v_{0x}$ et détermine le rayon R de l'hélice ; en outre la vitesse axiale est également constante (cf. question I.B.2), vaut $v_z = v_{0z}$ et contribue à déterminer le pas p de l'hélice ; les formules utiles sont :

$$R = \frac{v_\theta}{\omega_c} = \frac{m v_\theta}{e B} \quad \text{et} \quad p = v_z \frac{2\pi}{\omega_c} = 2\pi \frac{v_z}{v_\theta} R$$



I.C.1 L'équation de Maxwell-Thomson s'écrit : $\text{div}(\vec{B}) = 0$

Donc, compte tenu de la structure du champ et d'après le formulaire, on a :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r B_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad \text{ou encore :} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial(r B_r(r, z))}{\partial r} = -\frac{dB_z}{dz}(z)$$

puisque qu'au voisinage de l'axe B_z ne dépend que de z en première approximation. En se plaçant à z fixé et en intégrant sur la variable r entre 0 et une distance r quelconque, il vient :

$$r B_r(r, z) - 0 \times B_r(0, z) = - \int_{r'=0}^r r' \frac{dB_z}{dz}(z) dr' = -\frac{r^2}{2} \frac{dB_z}{dz}(z)$$

d'où finalement :

$$B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dB_z}{dz}(z)$$

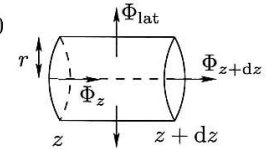
Rq : on peut également procéder en calculant le flux magnétique à travers un cylindre fermé infinitésimal centré sur l'axe, qui est nul puisque $\vec{B}$ est à flux conservatif :

$$\Phi_{\text{tot}} = \Phi_{z+dz} - \Phi_z + \Phi_{\text{lat}}$$

$$= \pi r^2 B_z(z+dz) - \pi r^2 B_z(z) + 2\pi r dz B_r(r, z) = 0$$

Avec $B_z(z+dz) - B_z(z) = \frac{dB_z}{dz} dz$, on aboutit à

$$B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dB_z}{dz}$$



I.C.2 En ordre de grandeur, $|dB_z/dz| \simeq |B_z|/L$. Dans ce cas,

$$|B_r| \simeq \frac{r}{L} |B_z|$$

d'où

$$|B_r| \ll |B_z| \quad \text{si} \quad r \ll L$$

I.C.3 Localement, c'est-à-dire pour un déplacement électronique se faisant radialement et axialement sur des dimensions très faibles devant L , on peut considérer que $\vec{B}$ est quasiment axial (cf. question précédente) et quasi uniforme (B_z ne varie que sur des distances de l'ordre de L). Dans ce cas, les résultats valables pour un champ uniforme s'appliquent et le mouvement de l'électron est une hélice de rayon R et de pas p vérifiant (cf. I.B.5) :

$$R = \frac{v_\theta}{\omega_c} = \frac{m v_\theta}{e B} \quad \text{et} \quad p = v_z \frac{2\pi}{\omega_c} = 2\pi \frac{v_z}{v_\theta} R$$

mais comme ici B_z dépend de z , l'hélice « se déforme » et possède localement un rayon $R(z)$ et un pas $p(z)$ vérifiant :

$$R(z) = \frac{m v_\theta(z)}{e B_z(z)} \quad \text{et} \quad p = 2\pi \frac{v_z(z)}{v_\theta(z)} R(z) \quad (\text{non demandé})$$

Cette approximation n'a de sens que si on a R et $p \ll L$; toutefois la condition $R \ll L$ suffit car, sauf situation particulière, on a priori v_z et v_θ du même ordre de grandeur donc $R \ll L$ implique $p \ll L$.

I.C.4 Une boucle de courant orientée selon $\vec{u}_z$ possède un moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ tel que

$$\vec{\mathcal{M}} = IS \vec{u}_z$$

où S est la surface s'appuyant sur la boucle et I l'intensité du courant. Sur une période T , le courant devient

$$I = \frac{-e}{T}$$

De plus, $S = \pi R^2(z)$. Le mouvement de la particule est circulaire donc sa vitesse est orthoradiale de norme $v_\theta = 2\pi R(z)/T$. Le moment magnétique projeté sur $\vec{u}_z$ s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_z &= IS \\ &= -\frac{e R(z)}{2} \times \frac{2\pi R(z)}{T} \\ \mathcal{M}_z &= -\frac{e R(z)}{2} v_\theta \end{aligned}$$

D'après la question I.C.3, on arrive à

$$\mathcal{M}_z = -\frac{e^2 R(z)^2 B_z(z)}{2m} \quad \text{ou} \quad \mathcal{M}_z = -\frac{m v_\theta^2(z)}{2 B_z(z)}$$

Calculons le moment cinétique de la particule projeté selon $\vec{u}_z$,

$$\mathcal{L}_z = m (\vec{OM} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{u}_z = m R(z) v_\theta$$

d'où

$$\mathcal{M}_z = \frac{-e}{2m} \mathcal{L}_z$$

I.C.5 Appliquons au dipôle le théorème du moment cinétique projeté selon $\vec{u}_z$,

$$\frac{d\mathcal{L}_z}{dt} = (\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{u}_z$$

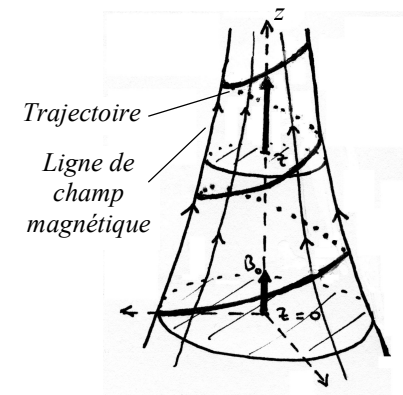
Avec $\vec{B} \simeq B_z \vec{u}_z$,

$$(\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{u}_z = 0$$

$\mathcal{L}_z$ est une constante du mouvement. Avec la question I.C.4, **$\mathcal{M}_z$ est une constante du mouvement.**

Mais alors, d'après la question précédente : $\mathcal{M}_z = Cte \Rightarrow \underline{R(z)^2 B_z(z) = Cte}$

Cela signifie que le disque d'aire $\pi R(z)^2$ délimité par la boucle de courant formée par l'électron (hachuré sur le schéma ci-contre) est traversé par le même flux magnétique tout au long du déplacement axial de l'électron. Or, le champ magnétique étant à flux conservatif, on sait que son flux est le même à travers toute section d'un même tube de courant. Ainsi, la juxtaposition de ces 2 propriétés permet de conclure que l'hélice de rayon variable décrite par le mouvement de l'électron s'enroule sur un tube de champ, comme dans le cas d'un champ uniforme (cf. question I.B.5), et d'effectuer le schéma ci-



contre (où le pas de l'hélice a été exagéré par soucis de visibilité).

I.C.6 La question est délicate. On peut proposer 2 approches :

- * La première est s'appuie sur l'hypothèse effectuée à la question I.C.5. selon laquelle l'électron en rotation se comporte comme un dipôle magnétique de moment $\vec{M}_z$ constant se déplaçant à une dimension le long de l'axe (Oz). On n'est pas certain qu'elle soit valable mais c'est ce que semble suggérer l'énoncé...
- * La seconde est rigoureuse et prend en compte le mouvement hélicoïdal réel de l'électron, mais elle est plus subtile.

Dans les deux cas, le champ magnétique est pris en compte de la manière suivante :

$$\vec{B} \approx B_z(r, z) \vec{u}_z \approx B_z(z) \vec{u}_z \approx B_0 \left(1 + z^2/L^2\right) \vec{u}_z$$

Première approche :

a) Le moment magnétique modélisant l'électron en mouvement possède une énergie potentielle magnétique dans le champ extérieur qui s'écrit :

$$E_p = -\vec{M} \cdot \vec{B} \approx -M_z B_z \approx -M_z B_0 \left(1 + z^2/L^2\right)$$

Or, on a vu à la question I.C.4. que : $M_z = -\frac{m v_\theta^2(z)}{2 B_z(z)}$

Comme ce moment est constant on peut le calculer en $z = 0$, ce qui donne :

$$M_z = -\frac{m v_{0x}^2}{2 B_0}$$

On obtient finalement :

$$E_p = \frac{1}{2} m v_{0x}^2 \left(1 + \frac{z^2}{L^2}\right)$$

Dans cette approche, le mouvement est unidimensionnel selon (Oz) avec une position repérée par $z(t)$ et une vitesse purement axiale $\vec{v} = v_z(z) \vec{u}_z$; la conservation de l'énergie mécanique s'écrit donc :

$$\begin{aligned} (E_c + E_p)(t) &= \frac{1}{2} m v_z^2(t) + \frac{1}{2} m v_{0x}^2 \left(1 + \frac{z(t)^2}{L^2}\right) \\ &= (E_c + E_p)(t=0 / z=0) = \frac{1}{2} m v_{0z}^2 + \frac{1}{2} m v_{0x}^2 \\ \text{soit : } \quad \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{1}{2} m v_{0x}^2 \frac{z(t)^2}{L^2} &= \frac{1}{2} m v_{0z}^2 \end{aligned}$$

On constate ainsi que l'électron est confiné au voisinage de O puisqu'il se trouve dans un puits de potentiel centré en $z=0$; on observe une oscillation autour de $z=0$, avec

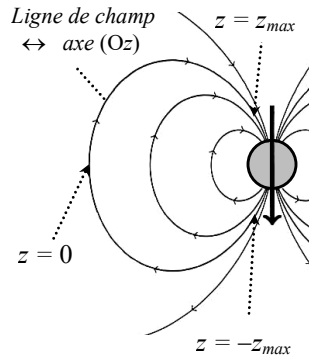
deux positions limites (les fameux « miroirs magnétiques ») situées en $\pm z_{max}$ telles que $\dot{z}=0$, donc telles que :

$$\frac{1}{2} m v_{0x}^2 \frac{z_{max}^2}{L^2} = \frac{1}{2} m v_{0z}^2 \quad \text{soit : } \quad \boxed{z_{max} = \frac{v_{0z}}{v_{0x}} L} \quad \text{CQFD.}$$

b) La pulsation s'obtient en dérivant l'équation précédente et en remarquant un oscillateur harmonique (logique puisque l'énergie potentielle est parabolique) :

$$\ddot{z} + v_{0x}^2 \frac{z(t)}{L^2} = 0 \quad \text{soit} \quad \ddot{z} + \omega_m^2 z = 0 \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_m = \frac{v_{0x}}{L}}$$

Ligne de champ
↔ axe (Oz)



On applique cela à un électron effectuant des aller-retours entre les pôles (ou quasiment), la ligne de champ le long de laquelle l'électron se déplace jouant le rôle d'axe (Oz), la position équatoriale et les pôles jouant respectivement les rôles de position $z=0$ et de positions extrêmes $z=\pm z_{max}$. Il est logique de se placer à l'altitude géostationnaire (cf. question I.B.3) donc de prendre :

$$z_{max} \approx \pi R_g / 2 \approx 6,6.10^7 \text{ m}$$

et pour les vitesses : $v_{0z} \approx v_{0x} \approx 2.10^7 \text{ m.s}^{-1}$

La relation $\boxed{z_{max} = \frac{v_{0z}}{v_{0x}} L}$ donne alors : $L \approx z_{max}$ d'où la période T_m des aller-retours :

$$\boxed{T_m = \frac{2\pi}{\omega_m} = 2\pi \frac{L}{v_{0x}} \approx \frac{\pi^2 R_g}{v_{0x}} \approx 21 \text{ s}}$$

Seconde approche :

a) En réalité l'électron suit un mouvement hélicoïdal sous l'effet de la seule force de Lorentz qui ne travaille pas : son énergie cinétique est donc conservée ! Toutefois, le mouvement est tridimensionnel avec une vitesse qu'il faut décomposer en un terme axial et un terme orthoradial : $\vec{v} = v_z(z) \vec{u}_z + v_\theta(z) \vec{u}_\theta$. La conservation de l'énergie s'écrit donc :

$$E_c(t) = \frac{1}{2} m v_z^2(t) + \frac{1}{2} m v_\theta^2(t) = E_c(t=0) = \frac{1}{2} m v_{0z}^2 + \frac{1}{2} m v_{0x}^2$$

ou encore :

$$\underline{v_z^2(t) + v_\theta^2(t) = v_{0z}^2 + v_{0x}^2}$$

Or, on a vu au I.C.4 que l'on peut écrire :

$$\underline{v_\theta^2(z) = -\frac{2M_z}{m} B_z(z)}$$

avec M_z constant que l'on peut calculer en $z=0$, ce qui donne :

$$M_z = -\frac{m v_{0x}^2}{2B_0} \quad \text{d'où} \quad v_\theta^2(z) = v_{0x}^2 \frac{B_z(z)}{B_0} = v_{0x}^2 \left(1 + \frac{z(t)^2}{L^2}\right)$$

On obtient donc :

$$v_z^2(t) + v_{0x}^2 \left(1 + \frac{z(t)^2}{L^2}\right) = v_{0z}^2 + v_{0x}^2$$

On retrouve donc exactement la même équation énergétique que dans l'approche précédente et la suite du raisonnement (dont la réponse à la question **b**) est donc identique ! Toutefois, l'interprétation de cette équation est ici bien différente : il n'y a pas de variation d'énergie potentielle de l'électron dans son mouvement et l'effet miroir n'est pas dû à une force de rappel vers $z = 0$ mais à un effet subtil :

- * L'électron part de $z = 0$ vers les z croissants avec des vitesses axiale v_{0z} et orthoradiale $v_{\theta 0} = v_{0x}$ du même ordre de grandeur ;
- * A mesure que z augmente, B_z s'intensifie et cela a pour conséquence de diminuer le rayon de l'hélice et surtout d'augmenter la vitesse orthoradiale car :

$$M_z = Cte \Rightarrow R(z)^2 B_z(z) = Cte \quad \& \quad v_\theta^2(z)/B_z(z) = Cte$$

- * Ainsi, par conservation de l'énergie cinétique, la vitesse radiale diminue jusqu'à s'annuler en z_{max} : c'est l'effet de miroir magnétique ! L'électron repart alors vers $z = 0$ et sa vitesse radiale remonte etc...

*Certains aspects de la question I.C.7 ne sont pas abordables par les
3/2 car ils nécessitent des connaissances sur les ondes
électromagnétiques.*

I.C.7.a Le dernier paragraphe du texte d'introduction affirme que les ondes radios sont principalement émises au niveau des pôles (localisation spatiale) et à des longueurs d'onde de l'ordre du km (localisation spectrale). Expliquons ces deux propriétés :

L'émission a principalement lieu aux pôles parce que c'est là que l'accélération des électrons est la plus grande et que, conformément à la formule fournie dans l'énoncé de la question I.B.4 (c'est la formule de Larmor !) la puissance rayonnée par l'électron est proportionnelle au carré de son accélération. D'après l'étude effectuée à la question précédente, c'est en effet au voisinage des pôles (en $z = \pm z_{max}$ dans le modèle précédent) que l'on a simultanément le rayon $R(z)$ de l'hélice le plus faible et la vitesse orthoradiale $v_\theta(z)$ la plus grande, donc l'accélération radiale $v_\theta^2(z)/R(z)$ la plus grande.

Par ailleurs, une charge accélérée en rotation à la pulsation ω rayonne une onde de pulsation ω ; ainsi la pulsation des ondes émises par les électrons est la pulsation cyclotron $\omega_c = eB/m$ avec pour B la norme du champ à l'altitude où se produit le rayonnement. Puisque les aurores se produisent entre 80 et 400 km d'altitude, on peut

retenir cette gamme d'altitudes ; par exemple, pour $h = 400$ km, en suivant le même raisonnement qu'à la question I.B.3.a on obtient :

$$B(h) = B(R_T) \left(\frac{R_T}{R_T + h} \right)^3 = 4 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

La pulsation ω_c des électrons dans ce champ magnétique vaut

$$\omega_c = \frac{eB(h)}{m} = 7 \cdot 10^6 \text{ rad.s}^{-1}$$

d'où une fréquence $f = \omega_c/2\pi \approx \underline{1 \text{ Mhz}}$ et une longueur d'onde $\lambda = 2\pi c/\omega_c \approx \underline{0,3 \text{ km}}$ ce qui est cohérent avec l'ordre de grandeur kilométrique fourni.

I.C.7.b L'ionosphère est un plasma et joue le rôle de filtre passe-haut pour les ondes électromagnétiques. Pour donner un ordre de grandeur, la pulsation de coupure de ce filtre est de l'ordre de 10 MHz. Les ondes radio ont des fréquences de l'ordre de

$$f = \omega_c/2\pi \approx \underline{1 \text{ Mhz}}$$

Ces ondes radio sont donc réfléchies par l'ionosphère et ne peuvent pas être captées à la surface de la Terre.

Il a fallu attendre l'envoi de détecteurs dans l'espace pour mettre en évidence ce rayonnement radio !

I.D Supposons que la formule non relativiste de l'énergie cinétique puisse s'appliquer. On rappelle que $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$; avec $E_c = 100 \text{ MeV}$,

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = 6 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

Cette vitesse est impossible d'après la théorie de la relativité restreinte car sa valeur est plus grande que la vitesse de la lumière dans le vide. Il faut donc utiliser la formule relativiste donnée dans l'énoncé

$$E_c = (\gamma - 1) mc^2 \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

d'où

$$\gamma = 1 + \frac{E_c}{mc^2}$$

donc

$$v = c \sqrt{1 - \frac{1}{(1 + E_c/mc^2)^2}} = 2,999\,96 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

Le résultat est donné avec autant de chiffres significatifs car il s'agit de comparer la vitesse réelle des électrons à celle de la lumière dans le vide.

Pour étudier la dynamique de l'électron, il faut utiliser les formules relativistes. **Les résultats précédents ne s'appliquent pas pour des particules relativistes.**