

MESURES, ERREURS & INCERTITUDES - TABLEAU SYNOPTIQUE

Principe du processus de mesure et classification des sources d'erreurs

Pour un mesurande X associé à une supposée valeur « vraie » x_0 , le processus de mesure consiste en une estimation $\hat{x}$ de cette valeur vraie ainsi qu'en une estimation de l'incertitude associée à $\hat{x}$, c'est-à-dire de l'écart possible entre $\hat{x}$ et x_0 du fait des erreurs expérimentales.

Afin d'estimer l'incertitude, il faut donc analyser les sources d'erreurs possibles ; pour cela, une approche systématique consiste à écrire :

$$\hat{x} = x_0 + \delta x_{\text{résolution}} + \delta x_{\text{fiabilité}} + \delta x_{\text{appréciation}} + \delta x_{\text{perturbations}} + \delta x_{\text{biais}}$$

Erreurs liées à la **résolution** de l'instrument de mesure

Erreurs liées à la **fiabilité** de l'instrument de mesure

Erreurs liées à une **appréciation** subjective de l'expérimentateur

Erreurs liées à l'**environnement**, à la sensibilité du dispositif expérimental aux **perturbations**

Erreurs liées à un **biais** expérimental

Description de la source d'erreurs

Définition de la **résolution r** :

- Pour un **appareil à affichage numérique**, r est la valeur unitaire du dernier chiffre ou digit affiché
- Pour un **instrument gradué** (règle, vernier, thermomètre à alcool, burette, voltmètre à aiguille), r est la **plus petite graduation** de l'instrument

Cette limite de résolution équivaut à l'introduction d'une erreur dans la mesure

La valeur lue sur un instrument n'est jamais parfaitement exacte, du fait des défauts inhérents à l'instrument.

Une indication sur la fiabilité est donnée par le constructeur via :

- Une **précision p** inscrite dans la notice de l'appareil, pour un appareil à **affichage numérique à forte résolution** (multimètre numérique par exemple)
- Une **tolérance absolue t** inscrite sur l'instrument, pour un **instrument calibré** comme une fiole jaugée ou un composant électronique (par exemple résistance « de 10 k Ω »)

Cette source d'erreur est **négligée** s'il n'existe aucune information de précision ou de tolérance ; par ex : **règle graduée** ; appareil à **affichage numérique à faible résolution**, type balance numérique limitée à 0,1 g, ou thermomètre numérique limité à 1°C

Concerne les mesures qui mettent en jeu une **appréciation subjective** : netteté d'une image optique, virage d'un indicateur coloré...

Quand il fixe la position de l'écran où se forme l'image, ou qu'il arrête le dosage après virage de l'indicateur, l'expérimentateur peut commettre une erreur

Concerne des dispositifs :

- Sensibles au « **bruit** » i.e. influencés par des **facteurs extérieurs** difficiles à contrôler et susceptibles de **fluctuer**

Exemples : vibrations d'une table, fluctuations de la température, légères variations des conditions initiales lorsqu'on répète une expérience de mécanique...

- Soumis à des **facteurs humains fluctuants**

Exemple : temps de réponse pour déclencher un chronomètre

Si ces erreurs dominent, la **répétition du processus de mesure** ne donne jamais exactement le même résultat

En pratique, cela concerne essentiellement les expériences de **mécanique**

Exemples :

- Défaut d'horizontalité dans une expérience de mécanique
- Parallaxe
- Mauvais positionnement d'un capteur
- Existence d'une résistance parasite non négligeable dans un circuit

...

Estimation $\hat{x}$ du mesurande et d'un intervalle de confiance associé à la source d'erreurs considérée seule				
Estimation par mesure unique : $\hat{x} = x_m$		L'expérimentateur définit des valeurs extrêmes $(x_{MIN}; x_{MAX})$ telles que : $x_0 \in [x_{MIN}; x_{MAX}]$ avec 100% de confiance Ceci revient à une mesure unique avec $\hat{x} = x_m = (x_{MAX} + x_{MIN})/2$	Estimation à partir d'une série de mesures : $\{x_i\}_{i=1..n}$ $\hat{x}$ est la moyenne empirique $\bar{x}_n$ de la série des mesures : $\hat{x} = \bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ Un intervalle de confiance pourra être défini à partir de l' écart-type expérimental : $\sigma_{\text{exp},n} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2} \quad (*)$	Evaluation quantitative très variable selon les situations ...
$x_0 \in [x_m - r/2; x_m + r/2]$ avec 100% de confiance Car si on avait $x_0 > x_m + r/2$, on mesurerait $x_m + r$ et non x_m et si on avait $x_0 < x_m - r/2$, on mesurerait $x_m - r$ et non x_m	- Si appareil avec précision p : $x_0 \in [x_m - p; x_m + p]$ avec 100% de confiance par déf. de p - Si instrument avec tolérance t : $x_0 \in [x_m - t; x_m + t]$ avec 100% de confiance par déf. de t			
$x_0 \in [x_m - a; x_m + a]$ à 100% avec $a = r/2$ ou $a = p$ ou $a = t$ ou $a = (x_{MAX} - x_{MIN})/2$				
Nature des erreurs				
Aléatoires	Aléatoires (**)	Aléatoires	Aléatoires	Aléatoires ou Systématiques
Loi de probabilité associée à la variable aléatoire X utilisée pour modéliser le processus de mesure (source d'erreurs considérée seule)				
Uniforme dans $x_0 \in [x_m - a; x_m + a]$			Gaussienne / Normale	-
Incertitude-type $u(x)$ associée à la source d'erreurs considérée seule				
Par définition, l'incertitude-type $u(x)$ est l'écart type σ_x associé à la loi de probabilité modélisant X				-
$u(x) = \sigma_x = a/\sqrt{3}$ avec $a = r/2$ ou $a = p$ ou $a = t$ ou $a = (x_{MAX} - x_{MIN})/2$			$u(x) = \sigma_{\bar{x}_n} \approx \sigma_{\text{exp},n} / \sqrt{n} \quad (*)$	
Probabilité de trouver x_0 dans l'intervalle $[\hat{x} - u(x); \hat{x} + u(x)]$, appelé intervalle de confiance à ... %				
Loi uniforme $\rightarrow 1/\sqrt{3} \approx 58\%$ (non exigible)			Loi gaussienne $\rightarrow \approx 68\%$	-

* : σ_x est l'écart-type de la v.a. X et caractérise l'erreur commise en estimant X à partir d'une mesure quelconque parmi $\{x_i\}_{i=1..n}$; $\sigma_{exp,n}$ est une estimation (non biaisée) de σ_x

$\sigma_{\bar{x}_n}$ est l'écart-type de la v.a. $\bar{x}_n$ et caractérise l'erreur commise en estimant X à partir d'une moyenne statistique sur n mesures ; $\sigma_{exp,n}/\sqrt{n}$ est une estimation de $\sigma_{\bar{x}_n}$

** : Ces erreurs sont partiellement aléatoires et systématiques pour un instrument donné, mais purement aléatoires dans le contexte d'une collection d'instruments

Incertitude-type dans le cas de plusieurs sources d'erreurs aléatoires de même importance

$$u(x) = \sqrt{u_{\text{résolution}}^2 + u_{\text{fiabilité}}^2 + u_{\text{appréciation}}^2 + u_{\text{perturbations}}^2}$$

-

Incertitude-type sur une grandeur déduite par calcul d'une ou plusieurs mesures

~ Cas d'une relation linéaire : $z = \alpha x + \beta y + \gamma \Rightarrow u(z) = \sqrt{\alpha^2 u(x)^2 + \beta^2 u(y)^2} \quad (dz = \alpha dx + \beta dy)$

~ Cas d'une relation produit-puissances : $z = \alpha x^a y^b \Rightarrow \frac{u(z)}{\hat{z}} = \sqrt{a^2 \left(\frac{u(x)}{\hat{x}} \right)^2 + b^2 \left(\frac{u(y)}{\hat{y}} \right)^2} \quad \left(\frac{dz}{z} = \alpha \frac{dx}{x} + \beta \frac{dy}{y} \right)$

~ Exemples vus en TP :

Comparaison de deux valeurs par leur écart-type normalisé Z ; les deux valeurs sont considérées compatibles si $Z < 2$

~ Comparaison d'une mesure à une valeur tabulée : $Z = |\hat{x} - x_{\text{ref}}| / u(x)$; Comparaison de deux mesures : $Z = |\hat{x}_1 - \hat{x}_2| / \sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2}$

~ Exemples vus en TP :

Exemples usuels de mesures			Quelle(s) source(s) d'erreur domine(nt) ?	
RESOLUTION DE L'INSTRUMENT	FIABILITE DE L'INSTRUMENT	APPRECIATION SUBJECTIVE	PERTURBATIONS	BIAIS EVENTUEL
1. Période T d'un signal oscillant, mesurée à l'oscilloscope (lecture à l'écran).				
Incertitude : Expression du résultat :				
2. Amplitude d'une tension, mesurée à l'oscilloscope (lecture à l'écran).				
Incertitude : Expression du résultat : → Incertitude <u>relative</u> typique lors d'une mesure (même automatique) à l'oscilloscope :				
3. Tension efficace mesurée au multimètre numérique ; affichage : ; calibre : .				
Incertitude et expression du résultat : → Incertitude <u>relative</u> typique lors d'une mesure au multimètre :				

4. Fréquence de résonance d'un passe bande, mesurée à l'oscilloscope en mode XY.

--	--	--	--	--

Incertitude et expression du résultat :

5. Position x , le long d'un banc optique, d'un objet ou d'une lentille (positionnement arbitraire) ; puis distance objet-lentille.
ou Position x le long du banc d'un écran où se forme une image nette, sans difficulté d'appréciation de la netteté, puis distance objet-image.

--	--	--	--	--

Incertitude sur un pointé de position :

Incertitude sur la distance objet lentille :

Expression du résultat :

6. Position x , le long d'un banc optique, d'un écran où se forme une image nette, avec une plage de netteté importante ; puis distance objet-image.

--	--	--	--	--

Incertitude sur le pointé de position de l'image :

Incertitude sur la distance objet image :

Expression du résultat :

7. Volume de 50 mL prélevé à la pipette jaugée de classe A

--	--	--	--	--

Incertitude et expression du résultat :

→ Incertitude relative typique lors d'un prélèvement avec une verrerie jaugée :

8. Volume équivalent lors d'un dosage avec burette 25 mL de classe A graduée au 1/10^e i.e. à 0,10 mL (zéro supposé parfait).

--	--	--	--	--

Incertitude et expression du résultat :

Incertitude relative typique d'un volume équivalent :

9. Durée τ de sédimentation d'une bille dans un fluide, sur une hauteur h fixée (chronomètre avec affichage au 100^{ème} de seconde).

--	--	--	--	--

Incertitude et expression du résultat :

Valeurs mesurées (en s)	5,41	5,39	5,36	5,39	5,34	5,46	5,28	5,18	5,65	5,38
-------------------------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

