

Magnétostatique (1)

Exercice 1 : champs créés par divers câbles

- 1- On considère un câble coaxial rectiligne et infini, dont une section est représentée sur la figure 1 ; les densités de courant sont uniformes dans chaque partie conductrice, toutes deux parcourues par une même intensité totale I , mais en sens inverse. Déterminer le champ magnétique créé dans tout l'espace par ce câble puis tracer le graphe donnant la norme du champ à toute distance r de l'axe de symétrie de révolution du câble. Commenter la valeur du champ au voisinage du câble.
- 2- On considère un cylindre conducteur infiniment long, partiellement évidé selon une cavité cylindrique désaxée et dont une section est représentée sur la figure 2. Le conducteur est parcouru par un courant I uniformément réparti dans la section. Déterminer le champ magnétique créé par ce cylindre dans la cavité.

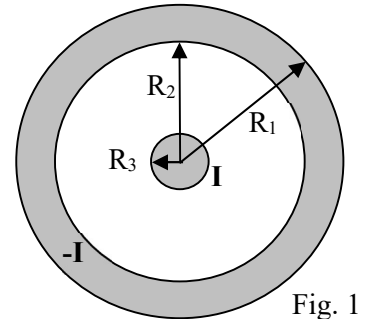


Fig. 1

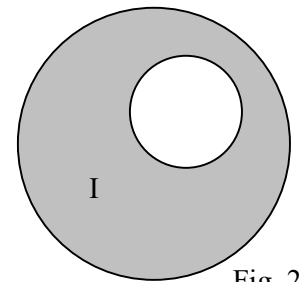
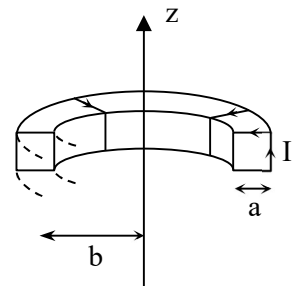


Fig. 2

Exercice 2 : champ créé par un solénoïde torique

Un solénoïde a la forme d'un tore de rayon moyen b . Il est constitué de N spires carrées jointives de côté a .

- 1- Déterminer le champ magnétique créé $\vec{B}$ (M) par ce solénoïde lorsque ses spires sont parcourues par une intensité I .
- 2- Ce résultat serait-il modifié si les spires étaient circulaires ?
- 3- Déterminer l'inductance propre L du solénoïde.
- 4- Un fil infiniment long parcouru par un courant I' est placé sur l'axe $z'z$. I' est orienté dans le sens de l'axe. Déterminer l'inductance mutuelle entre les deux circuits.
- 5- On suppose que i' dépend du temps : $i'(t) = I_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$ et on mesure l'intensité $i(t)$ du courant dans le tore que l'on ferme sur un ampèremètre. La résistance totale du circuit torique est R .
 - 5a- Déterminer la valeur de $i(t)$ qui traverse le circuit torique en régime établi.
 - 5b- A.N. : $N = 1000$; $a = 2 \text{ cm}$; $b = 5 \text{ cm}$; $\omega = 100 \text{ rad.s}^{-1}$ $R = 1 \Omega$ calculer $i(t)$
 - 5c- Que se passe-t-il si $L\omega$ est très grand devant R ?



Exercice 3 : Champ créé par un cylindre en rotation

On considère un cylindre plein, infini, d'axe (Oz) et de rayon R , chargé uniformément avec une densité volumique de charge $\rho > 0$. Ce cylindre est mis en rotation à la vitesse angulaire ω autour de son axe (Oz) ; la répartition des charges dans le référentiel du cylindre n'est pas modifiée par la rotation.

- 1- Montrer que le système est équivalent à une distribution de courants permanents, caractérisée par un vecteur densité de courant qui s'écrit, en coordonnées cylindriques d'axe (Oz) : $\vec{j} = \vec{0}$

pour $r > R$ et $\vec{j} = \lambda r \vec{u}_\theta$ pour $r \leq R$, où λ est une constante que l'on exprimera en fonction des données.

- 2- Quelle est la structure a priori du champ créé dans tout l'espace ?
- 3- On constate que le champ magnétique est nul en tout point extérieur au cylindre. Proposer une justification sans aucun calcul mais en vous référant à des situations vues en cours.
- 4- En déduire, par application du théorème d'Ampère, le champ magnétique en tout point intérieur au cylindre. Ce champ sera exprimé en fonction des données puis uniquement en fonction du rayon R et de la valeur maximale B_m de l'intensité du champ.

Note : pour calculer le courant enlacé, on pourra se servir du vecteur $\vec{j}$ évoqué à la question 1. ou utiliser directement la définition du courant traversant une surface.

- 5- On isole maintenant par la pensée une tranche cylindrique de ce dispositif, comprise entre les rayons r et $r + dr$; en assimilant cette tranche à un solénoïde, déterminer le champ élémentaire créé sur l'axe (Oz) par cette tranche. Retrouver par superposition la valeur du champ total sur l'axe (Oz).
- 6- Expliquer pourquoi il s'exerce des forces magnétiques sur le cylindre ; décrire qualitativement la structure géométrique de ces forces et prévoir leur effet sur le dispositif.

Exercice 4 : champ sur l'axe et au voisinage l'axe d'une spire de courant

On considère une spire métallique d'axe (Oz) et de rayon R , parcourue par un courant i (figure 1). On repère un point M quelconque de l'espace par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) .

La plupart des résultats qui seront montrés dans cet exercice se généralisent à toute distribution de courant à symétrie de révolution.

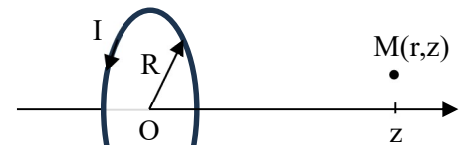


Fig 1

I- Champ magnétique sur l'axe :

- 1- Montrer qu'en tout point de l'axe (Oz) le champ magnétique est de la forme :

$$\vec{B}(M) = B_{\text{axe}}(z) \vec{e}_z.$$
- 2- On pose : $B_{\text{axe}}(z) = B_0 \times f(z/R)$ où B_0 est une valeur typique de l'intensité du champ magnétique sur l'axe. En vous justifiant, représenter l'allure du graphe de la fonction f .
- 3- Proposer une expression de B_0 en fonction des paramètres du problème, par analyse dimensionnelle.

II- Comparaison avec une situation électrostatique :

On considère maintenant une spire chargée d'axe (Oz) de rayon R portant une charge totale Q répartie uniformément (figure 2).

- 1- Montrer qu'en tout point de l'axe (Oz) le champ électrique est de la forme : $\vec{E}(M) = E_{\text{axe}}(z) \vec{e}_z.$

On pose : $E_{\text{axe}}(z) = E_0 \times g(z/R)$ où E_0 est une valeur typique de l'intensité du champ électrique sur l'axe. En vous justifiant, représenter l'allure du graphe de la fonction g .

- 2- Proposer une expression de E_0 en fonction des paramètres du problème, par analyse dimensionnelle.

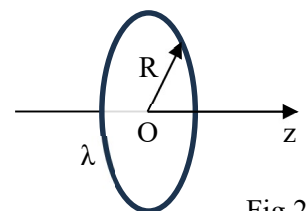


Fig 2

3. Parmi les expressions suivantes, identifier celles qui peuvent respectivement correspondre aux fonctions f et g , la variable étant notée u :

$$(1+u^2)^{-1/2} \quad (1+u^2)^{-3/2} \quad u(1+u^2)^{-3/2} \quad |u|(1+u^2)^{-3/2} \quad u(1+u^2)^{-5/2}$$

4. En adoptant l'une de ces expressions pour la fonction f , trouver la valeur de B_0 qui convient.

III- Champ magnétique au voisinage de l'axe :

L'objectif de cette partie est de montrer que l'on peut déduire le champ magnétique au voisinage immédiat de l'axe de la spire de courant à partir du champ sur l'axe, c'est-à-dire de la fonction

$$B_{\text{axe}}(z)$$

- 1- Montrer par des arguments de symétrie très précis qu'en tout point $M(r, \theta, z)$ hors d'axe, le champ magnétique n'a pas de composante orthoradiale et que sa norme ne dépend que de r et z .
On note donc : $\vec{B}(M) = B_r(r, z)\vec{e}_r + B_z(r, z)\vec{e}_z$. Quel lien existe-t-il entre ces composantes et $B_{\text{axe}}(z)$?

- 2- Donner l'allure des lignes de champ magnétique dans un plan méridien de l'axe puis comparer à la carte de champ électrostatique de la spire chargée de la question 2.

- 3- On cherche à déterminer la composante $B_r(r, z)$ au voisinage de l'axe, c'est-à-dire en supposant r faible à l'échelle des variations de B_r et B_z vis-à-vis de la variable r . Pour cela, on introduit un cylindre fermé élémentaire centré sur l'axe, de rayon r faible et dont les bases sont situées aux abscisses z et $z + dz$ où dz est considéré infinitésimal (figure 3).

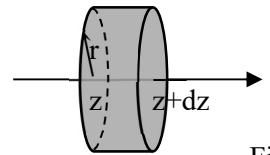


Fig 3

Calculer le flux magnétique à travers chaque face de ce cylindre, à l'ordre le plus bas non nul. En déduire un lien entre $B_r(r, z)$ et la fonction $B_{\text{axe}}(z)$. Calculer explicitement $B_r(r, z)$.

- 4- On cherche enfin à déterminer la composante $B_z(r, z)$ au voisinage de l'axe. En introduisant un contour fermé élémentaire de votre choix, montrer que : $\forall(r, z) \quad \frac{\partial B_z}{\partial r}(r, z) = \frac{\partial B_r}{\partial z}(r, z)$
En déduire une expression approchée de $B_z(r, z)$ au voisinage de l'axe en fonction de $B_{\text{axe}}(z)$.

- 5- Peut-on de la même façon obtenir $E_r(r, z)$ et $E_z(r, z)$ en fonction de $E_{\text{axe}}(z)$ dans le cas de la spire chargée de la question 2 ? Si oui calculer explicitement $E_r(r, z)$ et commenter.

Magnétostatique (2)

Exercice 1 :