

Analyse vectorielle - Bilan

	DIVERGENCE	ROTATIONNEL
DEFINITION / THEOREME ASSOCIE	Pour une surface fermée infinitésimale $\delta\Sigma_M$ autour de M : $d\Phi_{\delta\Sigma_M \text{ fermée}} = \text{div}\vec{G}_{(M)} \cdot d\tau_{\text{intérieur à } \delta\Sigma_M}$ Théorème d'OSTROGRADSKI : $\oiint_{\Sigma} \vec{G} \cdot d\vec{S} = \iiint_{V \text{ intérieur à } \Sigma} \text{div}\vec{G} \cdot d\tau$	Pour un contour fermé infinitésimal $\delta\Gamma_M$ autour de M : $dC_{\delta\Gamma_M \text{ fermé}} = \overrightarrow{\text{rot}}\vec{G}_{(M)} \cdot d\vec{S}_{\text{s'appuyant sur } \delta\Gamma_M}$ Théorème de STOKES : $\oint_{\Gamma} \vec{G} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma \text{ s'appuyant sur } \Gamma} \overrightarrow{\text{rot}}\vec{G} \cdot d\vec{S}$
EXPRESSION ANALYTIQUE EN COORDONNEES CARTESIENNES <i>A connaître</i>	$\text{div}\vec{G} = \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{G} \quad \vec{\nabla} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$	$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{G} = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z} \\ \frac{\partial G_x}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial x} \\ \frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y} \end{bmatrix} = \vec{\nabla} \wedge \vec{G}$
AUTRES COORDONNEES <i>Donné si nécessaire</i>	CYLINDRIQUE : $\text{div}\vec{G} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rG_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial G_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial G_z}{\partial z}$ SPHERIQUE : $\text{div}\vec{G} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 G_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta G_{\theta})}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial G_{\varphi}}{\partial \varphi}$	CYLINDRIQUE : $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{G} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial G_z}{\partial \theta} - \frac{\partial G_{\theta}}{\partial z} \\ \frac{\partial G_r}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rG_{\theta})}{\partial r} - \frac{\partial G_r}{\partial \theta} \right) \end{bmatrix}$ SPHERIQUE : $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{G} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(G_{\varphi} \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial G_{\theta}}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial G_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(rG_{\varphi})}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rG_{\theta})}{\partial r} - \frac{\partial G_r}{\partial \theta} \right) \end{bmatrix}$
CARACTERE CONSERVATIF	Flux conservatif $\Leftrightarrow \text{div}\vec{G} = 0$ $\Leftrightarrow \exists \vec{A} / \vec{G} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \quad \left(\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}) \equiv 0 \right)$	Circulation conservative $\Leftrightarrow \overrightarrow{\text{rot}}\vec{G} = 0$ $\Leftrightarrow \exists f / \vec{G} = -\overrightarrow{\text{grad}} f \quad \left(\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}) \equiv 0 \right)$

	LAPLACIEN	LAPLACIEN VECTEUR
DEFINITION	$\Delta f = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} f)$	$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{G}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{G}) - \Delta \vec{G}$
EXPRESSION ANALYTIQUE EN COORDONNEES CARTESIENNES <i>A connaître</i>	$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f \equiv \nabla^2 f$	$\Delta \vec{G} = \begin{bmatrix} \Delta G_x \\ \Delta G_y \\ \Delta G_z \end{bmatrix}$
AUTRES COORDONNEES <i>Donné si nécessaire</i>	CYLINDRIQUE : $\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ SPHERIQUE : $\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$ $= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rf)}{\partial r^2} + \dots$	Monstrueux donc non tabulé. Attention, la formule des coordonnées cartésiennes ne se généralise pas : En sphérique par exemple, $\Delta \vec{G}$ N'EST PAS $\begin{bmatrix} \Delta G_r \\ \Delta G_\theta \\ \Delta G_\varphi \end{bmatrix}$

	ACTION DES OPERATEURS SUR DES PRODUITS DE CHAMPS <i>Donné si nécessaire, peu utile</i>	
2 champs scalaires	$\overrightarrow{\text{grad}}(f \times h) = f \times \overrightarrow{\text{grad}}(h) + h \times \overrightarrow{\text{grad}}(f)$	
1 champ scalaire 1 champ vectoriel	$\text{div}(f \times \vec{G}) = f \times \text{div}(\vec{G}) + \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot \vec{G}$	$\overrightarrow{\text{rot}}(f \times \vec{G}) = f \times \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{G}) + \overrightarrow{\text{grad}}(f) \wedge \vec{G}$
2 champs vectoriels	$\text{div}(\vec{G} \wedge \vec{H}) = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{G}) \cdot \vec{H} - \vec{G} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{H})$ $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{G} \wedge \vec{H}) = (\text{div} \vec{H}) \vec{G} - (\vec{G} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{H} - (\text{div} \vec{G}) \vec{H} + (\vec{H} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{G}$ $\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{G} \cdot \vec{H}) = \vec{G} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} + (\vec{G} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{H} + \vec{H} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{G} + (\vec{H} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{G}$ où l'opérateur $(\vec{G} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{H}$ ne se calcule aisément qu'en coordonnées cartésiennes par : $(\vec{G} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} H_x) \vec{u}_x + (\vec{G} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} H_y) \vec{u}_y + (\vec{G} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} H_z) \vec{u}_z$	

Equations de Maxwell & équations locales - Bilan

EQUATIONS DE MAXWELL	<i>Maxwell – Thomson</i> (<i>Maxwell</i> - « <i>Flux</i> ») $div\big(\vec{B}\big)=0$	<i>Maxwell - Ampère</i> $\overrightarrow{rot}\big(\vec{B}\big)=\mu_0\vec{j}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ $=\mu_0\big(\vec{j}+\vec{j}_d\big)$	<i>Maxwell - Gauss</i> $div\big(\vec{E}\big)=\rho\big/\varepsilon_0$	<i>Maxwell – Faraday</i> $\overrightarrow{rot}\big(\vec{E}\big)=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$
FORMULATION INTEGRALE DES EQUATIONS DE MAXWELL	<i>Le flux magnétique est conservatif</i> $\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\vec{B}\cdot d\vec{S}=0$	<i>Théorème d’Ampère généralisé</i> $\oint\limits_{\Gamma}\vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\left(\iint\limits_{\Sigma\text{ s'appuyant sur }\Gamma}\left(\vec{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}\right)$ $=\mu_0\left(I_{\text{traversant }\Sigma}+\iint\limits_{\Sigma}\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S}\right)$	<i>Théorème de Gauss</i> $\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\vec{E}\cdot d\vec{S}=\iiint\limits_{V\text{ intérieur à }\Sigma}\frac{\rho}{\varepsilon_0}d\tau$ $=\frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$	<i>Loi de Faraday</i> $\oint\limits_{\Gamma}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\iint\limits_{\Sigma\text{ s'appuyant sur }\Gamma}-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$ $=-\frac{d\Phi_{\Sigma}\big(\vec{B}\big)}{dt}$
RELATIONS DE PASSAGE (fournies si nécessaire)	La composante NORMALE de $\vec{B}$ est CONTINUE	La composante TANGENTIELLE de $\vec{B}$ est DISCONTINUE de $\mu_0 j_s$	La composante NORMALE de $\vec{E}$ est DISCONTINUE de $\sigma\big/\varepsilon_0$	La composante TANGENTIELLE de $\vec{E}$ est CONTINUE
	$\vec{B}_2-\vec{B}_1=\mu_0\vec{j}_s\wedge\vec{n}_{1\rightarrow 2}$		$\vec{E}_2-\vec{E}_1=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{1\rightarrow 2}$	
EQUATIONS DE PROPAGATION DES CHAMPS DANS LE VIDE	<i>Equation de d’Alembert :</i> $\Delta\vec{B}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial^2t}=0$ & $\Delta\vec{E}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial^2t}=0$ on pose : $\varepsilon_0\mu_0c^2=1$			
EQUATIONS DE CONSERVATION	CHARGE : $\frac{\partial\rho}{\partial t}+div\big(\vec{j}\big)=0$	ENERGIE ; équation de POYNTING : $\frac{\partial u}{\partial t}+div\big(\vec{\Pi}\big)=-\vec{j}\cdot\vec{E}$ $\left\{\begin{array}{ll}u=\frac{\varepsilon_0E^2}{2}+\frac{B^2}{2\mu_0} : & \text{densité volumique d’énergie du champ électromag.}\\ \vec{\Pi}=\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} : & \text{vecteur densité de courant d’énergie du champ}\\ & \text{= « vecteur de Poynting »}\\ \vec{j}\cdot\vec{E} : & \text{puissance volumique cédée aux charges par le champ}\end{array}\right.$		