

III- Compositions nulles d'opérateurs

A- Rotationnel du gradient

Propriété : Quel que soit le champ scalaire f : $\boxed{\overrightarrow{\text{rot grad}} f = \vec{0}}$

Preuve : Considérons une surface Σ délimitée par un contour fermé orienté Γ_f et A un point sur Γ_f

$$\iint_{P \in \Sigma} \overrightarrow{\text{rot grad}} f(P) \cdot d\vec{S}_P \cdot \vec{n}(P) = \oint_{M \in \Gamma_f} \overrightarrow{\text{grad}} f(M) \cdot d\vec{l}_M = f(A) - f(A) = 0$$

Ceci est valable pour toute surface fermée

Ex : à titre d'entraînement montrer la nullité de $\overrightarrow{\text{rot grad}} f$ en utilisant les expressions en coordonnées cartésiennes des opérateurs

Réciproque : si un champ vectoriel $\vec{X}$ est tel que $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{X} = \vec{0}$ alors f est à circulation conservative et il existe un potentiel scalaire f tel que $\vec{X} = -\overrightarrow{\text{grad}} f$

remarque : le potentiel scalaire $f(\vec{r}, t)$ est défini à une fonction dépendant du temps (uniquement) prêt.

B- Divergence du rotationnel

Propriété : Quel que soit le champ vectoriel $\vec{G}$: $\boxed{\overrightarrow{\text{div rot}} \vec{G} = 0}$

Preuve : Considérons un volume V délimité par une surface fermée Σ_f et A un point sur Σ_f

$$\iiint_{P \in V} \overrightarrow{\text{div}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{G})(P) \cdot d\vec{\tau}_P = \oiint_{M \in \Sigma_f} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{G}(M) \cdot d\vec{S}_M \cdot \vec{n}_{\text{ext}}(M) = \int_{A \rightarrow A} \vec{G} \cdot d\vec{l} = 0$$

Ceci est valable pour tout volume

Ex : on a déjà montré la nullité de $\overrightarrow{\text{div}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{G})$ en utilisant les expressions en coordonnées cartésiennes des opérateurs

Réciproque : si un champ vectoriel $\vec{X}$ est tel que $\overrightarrow{\text{div}} \vec{X} = 0$ alors f est à flux conservatif et il existe un potentiel vecteur $\vec{G}$ tel que $\vec{X} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{G}$

IV- Laplacien d'un champ scalaire

A- Définition et expression en coordonnées cartésiennes

1- Définition : Soit un champ scalaire scalaire suffisamment régulier.

On appelle laplacien de f noté Δf le champ scalaire défini par

$$\Delta f = \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad} f})$$

Attention à la notation Δf qui ici n'a rien à voir avec une variation de f entre un « état » initial et un « état » final.

2- Dimension : $\dim(\Delta f) = \dim(\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad} f})) = \dim(\overrightarrow{\operatorname{grad} f}) \cdot L^{-1} = \dim(f) \cdot L^{-2}$

3- Expression en coordonnées cartésiennes :

$$\Delta f = \frac{\partial}{\partial x}(\overrightarrow{\operatorname{grad} f})_x + \frac{\partial}{\partial y}(\overrightarrow{\operatorname{grad} f})_y + \frac{\partial}{\partial z}(\overrightarrow{\operatorname{grad} f})_z$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Dans tout autre système de coordonnées : se reporter au formulaire

B- Utilisation du laplacien en électrostatique : équation de Poisson

$$\text{En électrostatique : } \begin{cases} \vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad} V} \\ \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{cases} \Rightarrow \Delta V = \operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad} V} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\text{Conclusion : } \boxed{\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad \text{équation de Poisson de l'électrostatique.}$$

Cette équation est centrale en électrostatique car elle permet une approche simple et rigoureuse de V (et donc de $\vec{E}$)

En effet, il existe un théorème d'unicité (hors programme)

Soit f un champ scalaire, D un domaine de l'espace délimité par Σ fermée.

Si on connaît Δf en tout point de D et f ou $\overrightarrow{\operatorname{grad} f}$ en tout point de la surface Σ , alors f est connu de façon unique sur tout D

Ceci signifie que si on propose dans l'espace D (par exemple l'espace interarmature d'un condensateur) une fonction V :

- vérifiant l'équation de Poisson sur D

- satisfaisant les conditions aux limites (c'est-à-dire les valeurs de potentiels aux limites donc sur les armatures du condensateur ou les valeurs du champ $\vec{E}$ aux limites)

le théorème d'unicité assure que la fonction proposée est l'unique potentiel

C- Application aux condensateurs

1- Position du problème

Les potentiels des deux armatures sont connus : V_1 et V_2 (on montrera que dans un condensateur les deux armatures sont équipotentielles) ; que vaut $V(M)$ dans l'espace interarmature ?

Comment traiter ce problème sans ajouter d'hypothèses sur les charges de type « σ est uniforme » ou « $Q_1 = -Q_2$ » et donc sans pouvoir utiliser le principe de Curie.

2- Principe de la résolution

On va résoudre $\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$ dans l'espace interarmature avec comme condition aux

limites $V = V_1$ sur l'armature 1 et $V = V_2$ sur l'armature 2.

Pour cela on va chercher $V(\vec{r})$ avec des symétries a priori compatible avec les conditions aux limites ; si on trouve une solution ce sera l'unique solution du problème

3- Exemple du condensateur plan

(On peut également refaire ce même raisonnement pour la cellule de conductimétrie du problème 2 du DS2)

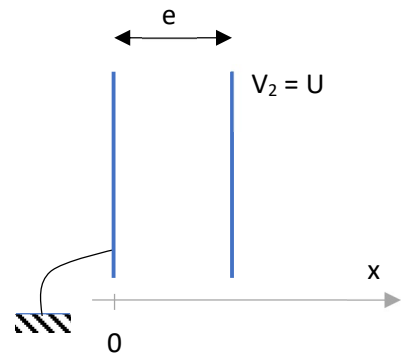
Sur les armatures 1 et 2 le potentiel ne dépend pas de y ou de z , on cherchera donc une solution présentant cette même symétrie plane : $V(x, y, z) = V(x)$

Equation de Poisson dans l'espace interarmature : $\Delta V = \frac{d^2 V}{dx^2} = 0$

Soit $V = ax + b$

Les conditions aux limites : $\begin{cases} V(0) = 0 \\ V(e) = U \end{cases}$

imposent $V = U \frac{x}{e}$ et $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\frac{U}{e} \vec{u}_x$



On verra plus tard dans la suite du cours :

$$\vec{E}(x=0^+) = -\frac{U}{e} \vec{u}_x = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} \vec{u}_x$$

$$\vec{E}(x=e^-) = -\frac{U}{e} \vec{u}_x = -\frac{\sigma_2}{\epsilon_0} \vec{u}_x$$

donc

$$Q_1 = \sigma_1 S = -\epsilon_0 \frac{U}{e} S$$

$$Q_2 = \sigma_2 S = \epsilon_0 \frac{U}{e} S$$

On retrouve $Q_1 = -Q_2$ et

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

Exercice : traiter le cas du condensateur sphérique et du condensateur diédrique

