

Amortissement des vibrations mécaniques.

(X MP 2004)

Ce problème ne comporte pas de réelles difficultés au niveau de la physique, les raisonnements restant relativement simples. En revanche, il est calculatoire : une grande importance est attribuée aux applications numériques, qui forment plus d'un tiers du problème. Il constitue un bon entraînement pour apprendre à mener des calculs (proprement) en temps limité.

En plus des 3 parties proposées ici, il y avait une 4^{ème} partie portant sur l'induction électromagnétique. J'ai très légèrement modifié l'énoncé de certaines questions mal posées.

I. MOUVEMENT SANS SUSPENSION

I.1.a Nous travaillons dans le référentiel terrestre $\mathfrak{R}_0$ galiléen par rapport auquel le sol oscille avec la cote $z_s(t)$. Si nous supposons que la masse M reste en contact avec le sol lors des oscillations, alors sa cote $z(t)$ est à tout instant égale à $z_s(t)$. Comme les 2 seules forces appliquées sont le poids et la réaction $\vec{R}(t)$ du sol, le principe fondamental de la dynamique appliqué dans $\mathfrak{R}_0$ donne :

$$M \ddot{z}_s(t) \vec{u}_z = -Mg \vec{u}_z + \vec{R}(t)$$

$$\text{soit : } \vec{R}(t) = R_z(t) \vec{u}_z \quad \text{avec : } \boxed{R_z(t) = M \left(\ddot{z}_s(t) + g \right) = M \left(z_0 \omega^2 \cos(\omega t) + g \right)}$$

qui est bien l'équation dynamique caractérisant le mouvement de M .

En revanche, si M décolle du sol, sa cote $z(t)$ devient une inconnue dynamique ; mais alors il n'y a plus de réaction du sol et l'équation dynamique découlant du principe fondamental appliqué dans $\mathfrak{R}_0$ devient :

$$M \ddot{z}(t) \vec{u}_z = -Mg \vec{u}_z \quad \text{soit : } \boxed{\ddot{z}(t) = -g}$$

I.1.b La masse M reste en contact avec le sol à tout instant si et seulement si la composante R_z de la réaction du sol reste toujours positive (ou, à la limite, nulle...). En utilisant la notation $a_s(t)$ de l'énoncé, on a :

$$a_s(t) = \ddot{z}_s(t) = z_0 \omega^2 \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad R_z(t) = m(a_s(t) + g)$$

d'où une condition de contact permanent qui s'écrit : $\boxed{\forall t \quad a_s(t) > a_M = -g}$

En d'autres termes :

* Si $z_0 \omega^2 < g$ alors $\forall t \quad a_M = -g < a_s(t) = z_0 \omega^2 \cos(\omega t) < g = a_M$ donc $\forall t \quad R_z(t) > 0$ et il y contact permanent avec le sol * Si $z_0 \omega^2 > g$ alors M décolle du sol à un instant t_D tel que : $R_z(t_D) = 0$ i.e. tel que : $a_s(t_D) = z_0 \omega^2 \cos(\omega t_D) = a_M = -g$
--

Rq : cette condition de contact permanent $a_s(t) > -g$ est bien logique et correspond physiquement à 2 situations possibles, selon que le mouvement du sol est descendant ($v_s(t) < 0$) ou ascendant ($v_s(t) > 0$) :

- si le sol est en mouvement descendant, son accélération vers le bas doit rester inférieure à celle de la pesanteur, i.e. à celle qu'aurait la masse en chute libre (sinon, en quelque sorte, le sol « tombe plus vite que la masse en chute libre ») ;
- si le sol est en mouvement ascendant mais décélère, il ne doit pas freiner plus vite que ne le ferait la masse lancée vers le haut dans le champ de pesanteur (sinon l'inertie de la masse vers le haut produit le décollage) ; c'est cette 2^{ème} configuration qui est observée ici (cf. questions suivantes).

I.2.a

Puisque la condition de décollage est : $a_s(t_D) = z_0 \omega^2 \cos(\omega t_D) = a_M = -g$, soit $\cos(\omega t_D) = -g/z_0 \omega^2$ et que la vibration du sol s'écrit : $z_s(t) = z_0(1 - \cos(\omega t))$, le décollage a donc lieu à l'altitude :

$$z_D = z_s(t_D) = z_0(1 - \cos(\omega t_D)) = z_0 \left(1 + \frac{g}{z_0 \omega^2} \right) \quad \text{soit : } \boxed{z_D = z_0 + \frac{g}{\omega^2}}$$

I.2.b

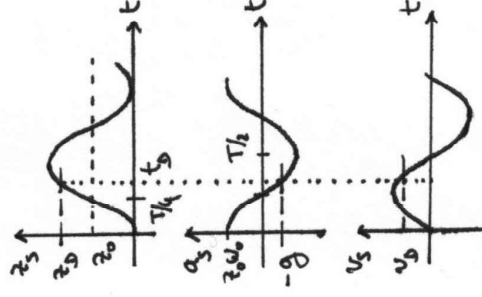
Ce décollage correspond nécessairement au premier instant positif où la condition $\cos(\omega t_D) = -g/z_0 \omega^2$ est réalisée, donc à :

$$t_D = \arccos(-g/z_0 \omega^2) / \omega$$

La vitesse est alors positive (mouvement ascendant) et vaut : $v_D = \dot{z}_s(t_D) = z_0 \omega \sin(\omega t_D)$, soit :

$$v_D = z_0 \omega \sqrt{1 - \left(\frac{g}{z_0 \omega^2} \right)^2} = \sqrt{z_0^2 \omega^2 - \frac{g^2}{\omega^2}}$$

Rq : Il est intéressant pour bien fixer les idées de tracer les graphes de $z_s(t)$, $v_s(t)$ et $a_s(t)$ en début de mouvement ; on constate bien que, conformément à son expression, $t_D \in [\pi/2\omega; \pi/\omega]$ i.e. $t_D \in [T/4; T/2]$ où T est la période d'oscillation du sol (voir ci-contre).



Etudions maintenant le mouvement de chute libre, avec vitesse initiale ascendante, qui succède au décollage. En appelant t' le temps mesuré à partir de l'instant de décollage et en intégrant $\ddot{z}(t') = -g$ avec : $z(t'=0) = z_s(t_D) = z_D$ et $\dot{z}(t'=0) = \dot{z}_s(t_D) = v_D$ pour conditions initiales, il vient :

$$z(t') = -gt'^2/2 + v_D t' + z_D$$

Par simple dérivation, on trouve que l'altitude maximale est atteinte pour : $t'_M = v_D/g$.

$$\text{Donc } z_M = -\frac{v_D^2}{2g} + \frac{v_D^2}{g} + z_D = \frac{v_D^2}{2g} + z_D = \frac{1}{2g} \left(z_0^2 \omega^2 - \frac{g^2}{\omega^2} \right) + z_0 + \frac{g}{\omega^2}$$

Finalement,

$$z_M = \frac{1}{2} \left(\frac{z_0^2 \omega^2}{g} + \frac{g}{\omega^2} \right) + z_0$$

Rq : Ce résultat s'obtient encore plus rapidement par la conservation de l'énergie (mais il faudra intégrer le PFD pour la question suivante, d'où le choix de la méthode ci-dessus) :

$$1/2 m v_D^2 + m g z_D = 0 + m g z_M \rightarrow z_M = v_D^2 / 2g + z_D$$

I.2.c

A partir de l'équation du mouvement établie plus haut, on voit que M repasse en $z = z_D$ lorsque : $-g t^2 / 2 + v_D t = 0$, soit à $t' = 2v_D / g$ qui donne le temps de vol cherché. En fonction des données on obtient :

$$t_{\text{vol libre}} = 2 \frac{z_0 \omega}{g} \sqrt{1 - \left(\frac{g}{z_0 \omega^2} \right)^2}$$

Il faut bien voir qu'il s'agit d'une approximation : la durée du vol libre est a priori différente de la durée au bout de laquelle la masse revient à son altitude de départ. En revanche, les équations menant à la durée réelle de vol libre ne sont pas solubles analytiquement, ce qui explique les hypothèses de l'énoncé.

I.3.a

Dans le référentiel ayant le même mouvement horizontal que la voiture et en translation uniforme par rapport au référentiel terrestre, l'effet de la route d'allure sinusoïdale est le même que si le sol était animé du même mouvement que dans les questions précédentes, avec

$$2z_0 = 5 \text{ cm} \quad \text{et} \quad \omega = 2\pi \frac{v}{\Lambda}$$

où $\Lambda = 2 \text{ m}$ est la période spatiale des bosses. En utilisant la question I.1.b, la condition de non-décollement s'écrit

$$z_0 \left(\frac{2\pi v}{\Lambda} \right)^2 < g$$

c'est-à-dire

$$v < \frac{\Lambda}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{z_0}} = 6,3 \text{ m.s}^{-1} = 23 \text{ km.h}^{-1}$$

I.3.b

En appliquant le résultat de la question I.2.b avec la valeur de ω correspondant à la vitesse 60 km.h^{-1} , on aboutit à

$$z_M = 11 \text{ cm}$$

I.3.c

Tant que les roues ne touchent pas le sol, le véhicule est incontrôlable. En assimilant le temps de vol libre trouvé à la question I.2.c au temps où les roues ne touchent pas le sol, on obtient, avec la fréquence correspondant à la vitesse de 60 km.h^{-1} ,

$$t_{\text{sans contrôle}} = 0,26 \text{ s}$$

pour une bosse. Cette valeur peut paraître assez faible, mais si l'on compare avec le temps nécessaire pour traverser une bosse $-0,12 \text{ s}$ - on voit que le contrôle est de fait presque totalement perdu !

II. SUSPENSION SANS AMORTISSEUR

II.1.a Dans le référentiel terrestre, galiléen, les forces qui s'appliquent à M sont :

- le poids $\vec{P} = -M g \vec{u}_z$;
- la force du ressort $\vec{F} = -k \Delta L \vec{u}_z$, avec $\Delta L = z_M - z_m - \ell_0 = z_M - z_s - \ell_0$.

Si ΔL est positif, cela signifie que le système s'est éloigné vers les z croissants de sa position d'équilibre ; la force de rappel doit donc être orientée vers les z négatifs. On vérifie que c'est effectivement le cas dans la formule précédente.

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit, puisque $z_m = z_s$,

$$M \ddot{z}_M = -Mg - k(z_M - z_s - \ell_0)$$

Ceci peut se mettre sous la forme

$$\ddot{z}_M + \omega_0^2 (z_M - \ell_1) = a(1 - \cos \omega t)$$

avec

$$\begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}} \\ a = z_0 \omega_0^2 \\ \ell_1 = \ell_0 - \frac{g}{\omega_0^2} \end{cases}$$

II.1.b En posant $z' = z_M - \ell_1 - \frac{a}{\omega_0^2}$, on aboutit à :

$$\ddot{z}' + \omega_0^2 z' = -a \cos \omega t$$

On cherche la solution particulière de cette équation différentielle linéaire à coefficients constants sous la forme $z' = \text{Re}(z' e^{i\omega t})$. On aboutit à :

$$(\omega_0^2 - \omega^2) \underline{z'} = -a$$

d'où

$$z'(t) = \frac{a}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos \omega t$$

Par ailleurs, la solution de l'équation homogène est :

$$z'(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

On obtient alors une forme générale de z_M :

$$z_M(t) = \ell_1 + \frac{a}{\omega_0^2} + \frac{a}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos \omega t + A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

La condition $z_M(t=0) = \ell_1$ impose :

$$A + \frac{a}{\omega^2 - \omega_0^2} + \frac{a}{\omega_0^2} = 0 \quad \text{donc} \quad A = -a \frac{\omega^2}{\omega_0^2 (\omega^2 - \omega_0^2)}$$

Puis, la condition $\dot{z}_M(t=0) = 0$ impose $B = 0$. Finalement,

$$z_M(t) = \ell_1 + \frac{a}{\omega_0^2} + \frac{a}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos \omega t - a \frac{\omega^2}{\omega_0^2 (\omega^2 - \omega_0^2)} \cos \omega_0 t \quad \left(\frac{a}{\omega_0^2} = z_0 \right)$$

II.1.c Pour répondre à cette question, on se place dans un cadre où les deux termes $\cos \omega t$ et $\cos \omega_b t$ présents dans l'expression de $z_m(t)$ oscillent entre 0 et 1 avec des périodes a priori différentes et sans aucun lien l'une avec l'autre.

Imaginer des cas particuliers « mathématiques » où les valeurs numériques de ω_b et ω seraient rigoureusement multiples l'un de l'autre (cas auxquels l'énoncé fait allusion en parlant de « valeurs particulières de la pulsation ω ») n'a pas de sens dans le contexte de ce problème car : 1) ces valeurs sont fixées par des paramètres physiques indépendants et sont donc décorréées (en d'autres termes, elles ne sont pas multiples « par construction » comme le seraient par exemple les valeurs des pulsations des composantes de Fourier d'un signal périodique) ; 2) elles ne sont pas définies avec une précision infinie et donc leur rapport ne l'est pas non plus (se demander s'il est entier, rationnel ou irrationnel n'a donc aucun sens !).

Ainsi, même si d'un point de vue mathématique rigoureux la recherche du max et du min d'une fonction trigonométrique comme $z_m(t)$ n'est pas simple, on peut affirmer ici qu'il existera des instants où l'on pourra quasiment considérer $\cos \omega t$ et $-\cos \omega_b t$ simultanément maximaux / minimaux. On en déduit ainsi que :

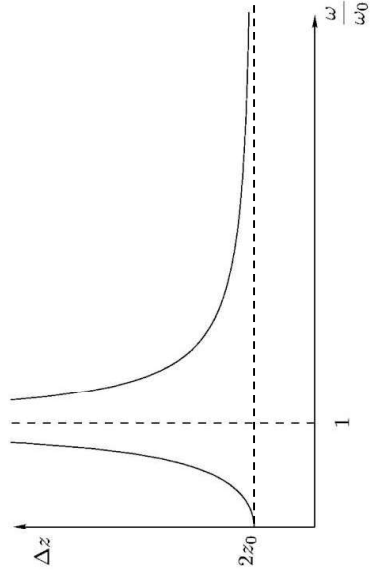
$$z_{M\max} = \ell_1 + \frac{a}{\omega_0^2} + \left| \frac{a}{\omega^2 - \omega_0^2} + a \frac{\omega^2}{\omega_0^2 (\omega^2 - \omega_0^2)} \right|$$

$$\text{et} \quad z_{M\min} = \ell_1 + \frac{a}{\omega_0^2} - \left| \frac{a}{\omega^2 - \omega_0^2} - a \frac{\omega^2}{\omega_0^2 (\omega^2 - \omega_0^2)} \right|$$

$$\text{Ainsi} \quad z_{M\max} - z_{M\min} = 2 \left(\frac{a}{|\omega^2 - \omega_0^2|} + a \frac{\omega^2}{|\omega_0^2 (\omega^2 - \omega_0^2)|} \right) = \frac{2a}{\omega_0^2} \frac{\omega^2 + \omega_0^2}{|\omega^2 - \omega_0^2|}$$

$$z_{M\max} - z_{M\min} = 2 \frac{\omega^2 + \omega_0^2}{|\omega^2 - \omega_0^2|} z_0$$

Le facteur 2 est facile à prévoir, puisque dans le cas où ω est très faible devant ω_0 , le système suit le sol. Ainsi, l'amplitude est celle du sol, soit $2z_0$.



II.2.a La masse m subit, dans le référentiel terrestre :

- la force du ressort $\vec{F} = k(z_M - z_m - \ell_0) \vec{u}_z$;
- la réaction du sol $\vec{R} = R \vec{u}_z$, avec $R \geq 0$;
- son poids $\vec{P} = -mg \vec{u}_z$;

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit

$$m \ddot{z}_m = k(z_M - z_m - \ell_0) + R - mg$$

II.2.b Si la masse ne décolle pas du sol, on a en permanence $x_m = x_s$ et $R > 0$. En reportant ceci dans l'équation précédente, la condition de non-décollement s'écrit

$$m \ddot{z}_s + mg - k(z_M - z_s - \ell_0) > 0$$

On retrouve bien, en l'absence de ressort, la condition $\ddot{z}_s + g > 0$ vue en I.1.b.

II.2.c Pour répondre à cette question (en suivant la logique de l'énoncé), il suffit d'injecter dans la condition précédente les expressions de z_s et de z_M respectivement fournies par l'énoncé et la réponse à la question II.1.b. Cela donne :

$$m \omega^2 z_0 \cos \omega t + mg - k \left(\ell_1 + \frac{a}{\omega_0^2} + \frac{a}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos \omega t - \frac{a \omega^2}{\omega_0^2 (\omega^2 - \omega_0^2)} \cos \omega_b t - z_0 (1 - \cos \omega t) - \ell_0 \right) > 0$$

En écrivant que : $\ell_1 - \ell_0 = -g/\omega_0^2$, $k = M \omega_0^2$ et $a = z_0 \omega_0^2$, il vient :

$$m \omega^2 z_0 \cos \omega t + (m + M) g - M \omega_0^2 \left(z_0 + \frac{z_0 \omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos \omega t - \frac{z_0 \omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos \omega_b t - z_0 (1 - \cos \omega t) \right) > 0$$

Puis, en divisant par $M \omega_0^2 z_0$ pour faire apparaître le terme K introduit par l'énoncé :

$$\frac{m \omega^2}{M \omega_0^2} \cos \omega t + \underbrace{\left(\frac{m}{M} + 1 \right) \frac{g}{\omega_0^2 z_0}}_{=K} - \left(1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos \omega t - \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos \omega_b t - (1 - \cos \omega t) \right) > 0$$

Et enfin en regroupant les termes : $-\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos \omega_b t + \left(\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2} - \frac{m}{M} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) \cos \omega t < K$

Ceci devant être vrai $\forall t$, on obtient bien la formule proposée par l'énoncé, avec :

$$A = -\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad \text{et} \quad B = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2} - \frac{m}{M} \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$$

et $f(\omega) = |A| + |B|$ pour le maximum de la fonction temporelle (cf. qu. II.1.c).

Il existe en réalité une approche plus astucieuse pour répondre à cette question. L'idée est d'éviter d'écrire une condition comprenant le terme de force de ressort (qui alourdit le calcul car il dépend à la fois de z_m et de z_M et fait intervenir les constantes ℓ_1, ℓ_0 etc...), en appliquant le théorème du centre d'inertie à l'ensemble du dispositif (masse m + ressort + masse M). La force du ressort devient alors une action intérieure et n'apparaît plus ! Cette approche revient aussi à écrire indépendamment le principe fondamental pour la masse m et pour la masse M , puis à sommer les expressions obtenues. Cela donne :

$$m \ddot{z}_m + M \ddot{z}_M = -(m+M)g + R$$

La condition $R > 0$ conduit alors à :

$$m \ddot{z}_m + M \ddot{z}_M > -(m+M)g$$

i.e. à :
$$-m \ddot{z}_m - M \ddot{z}_M < (m+M)g$$

puis à :
$$-m\omega^2 z_0 \cos \omega t - M \left(-\omega^2 \frac{a}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos \omega t + \omega_0^2 \frac{a \omega^2}{\omega_0^2 (\omega^2 - \omega_0^2)} \cos \omega_0 t \right) < (m+M)g$$

qui, en utilisant $a = z_0 \omega_0^2$ et en divisant par $M \omega_0^2 z_0$, donne immédiatement la réponse.

II.2.d En tenant compte des paramètres adimensionnés introduits par l'énoncé, il vient :

$$|A| + |B| = \left| \frac{X}{X-1} \right| + \left| \frac{X - \beta(X-1)X}{X-1} \right|$$

On distingue alors trois cas :

– si $X < X_0 = 1$, $X - \beta(X-1)X = X[1 + \beta(1-X)] > 0$

d'où

$$|A| + |B| = \frac{2X + \beta(1-X)X}{1-X}$$

– si $X_0 < X < X_1$, où X_1 est tel que $X_1 - \beta(X_1 - 1)X_1 = 0$, c'est-à-dire

$$X_1 = 1 + \frac{1}{\beta}$$

on a alors $X - \beta(X-1)X > 0$ et $X - 1 > 0$

soit

$$|A| + |B| = \frac{2X + \beta(1-X)X}{X-1}$$

– si $X > X_1$, $X - 1 > 0$ et $\beta(X-1)X - X > 0$

ce qui aboutit à

$$|A| + |B| = \beta X$$

II.3.a D'après la question II.1.a,

$$\delta \ell = \ell_0 - \ell_1 = \frac{g}{\omega_0^2} = \frac{gM}{k}$$

On en déduit

$$\frac{g}{\omega_0^2} = 10 \text{ cm} \quad \text{et} \quad K = \frac{\ell_0 - \ell_1}{z_0} \left(1 + \frac{m}{M} \right) = 4,5$$

II.3.b En reprenant les notations de la question I.3.a, on peut exprimer la vitesse en fonction de X :

$$v = \frac{\Lambda \omega}{2\pi} = \frac{\Lambda \omega_0}{2\pi} \sqrt{X}$$

On trouve alors les plages de vitesse suivantes, pour lesquelles les roues restent en contact permanent avec le sol :

$$0 < v < 2,6 \text{ m.s}^{-1} \quad \text{ou} \quad 4,2 \text{ m.s}^{-1} < v < 18,9 \text{ m.s}^{-1}$$

soit

$$0 < v < 9,4 \text{ km.h}^{-1} \quad \text{ou} \quad 15 \text{ km.h}^{-1} < v < 68 \text{ km.h}^{-1}$$

Rq : Voici le calcul qui mène aux plages de valeurs de X fournies dans l'énoncé :

– Pour $X < 1$, la condition se réécrit

$$-\beta X^2 + (2 + K + \beta)X - K < 0$$

Les racines de ce trinôme sont

$$\frac{2 + K + \beta}{2\beta} \pm \frac{1}{2\beta} \sqrt{(2 + K + \beta)^2 - 4\beta K}$$

Ce trinôme prend des valeurs positives entre ses deux racines. Ceci donne, en tenant compte du fait que $0 < X < 1$ et que $K > 0$,

$$0 < X < X_{\text{lim1}} = \frac{1}{2\beta} \left(2 + K + \beta - \sqrt{(2 + K + \beta)^2 - 4\beta K} \right) = 0,69$$

– Pour $1 < X < X_1 = 9,0$ la condition s'écrit

$$-\beta X^2 + (2 - K + \beta)X + K < 0$$

Ses racines sont

$$\frac{2 - K + \beta}{2\beta} \pm \frac{1}{2\beta} \sqrt{(2 - K + \beta)^2 + 4\beta K}$$

De la même manière que dans le cas précédent, on aboutit à

$$X_1 > X > X_{\text{lim2}} = \frac{1}{2\beta} \left(2 + \beta - K + \sqrt{(2 - K + \beta)^2 + 4\beta K} \right) = 1,7$$

– Enfin, pour $X > X_1$, la condition se simplifie en

$$X < X_{\text{lim}3} = \frac{K}{\beta} = 36$$

En résumé, la condition est vérifiée pour

$$0 < X < 0,69 \quad \text{ou} \quad 1,7 < X < 36$$

II.4.a À partir de $\delta\ell$, on peut facilement trouver la valeur de ω_0 , puis celle de la fréquence f_0 correspondante :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\delta\ell}} \quad \text{donc} \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 1,6 \text{ Hz}$$

Les valeurs données correspondent donc bien au critère avancé par l'énoncé. Cette fréquence correspond à la fréquence moyenne de l'oscillation verticale au cours de la marche.

II.4.b Pour m tendant vers 0 (traduction de « m est fortement diminuée », les expressions de $f(\omega)$ et de K se résument à :

$$f(\omega) = \frac{2X}{|X-1|} \quad \text{et} \quad K = \frac{g}{\omega_0^2 z_0}$$

ce qui, avec les valeurs numériques proposées $\left(\frac{g}{\omega_0^2} = 10 \text{ cm} ; z_0 = 2,5 \text{ cm}\right)$, donne $\underline{K = 4,0}$.

Les plages de valeurs de X pour lesquelles la condition de non-décollement des roues est vérifiée est donc

$$2X < K |X-1|$$

c'est-à-dire

$$0 < X < \frac{K}{K+2} = 0,67 \quad \text{ou} \quad X > \frac{K}{K-2} = 2,0$$

On voit clairement qu'il y a un certain avantage à vouloir diminuer la masse non suspendue, puisque la réduction de la plage de fréquences intermédiaires utilisables est en pratique négligeable, alors que l'élargissement aux grandes valeurs de la fréquence est important.

Pour alléger la masse non suspendue, on peut par exemple employer des alliages légers, à base d'aluminium, à la place de l'acier.

III. SUSPENSION AVEC AMORTISSEUR

III.1.a Au bilan des forces établi à la question II.1.a il faut maintenant ajouter la force de frottements fluides

$$\vec{F} = -\gamma \frac{d\ell}{dt} \vec{u}_z$$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse M donne alors

$$M\ddot{z}_M = k(z_m + \ell_1 - z_M) + \gamma(\dot{z}_m - \dot{z}_M)$$

$$\text{d'où} \quad \ddot{z}_M + \frac{1}{\tau}(\dot{z}_M - \dot{z}_m) + \omega_0^2(z_M - z_m - \ell_1) = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{M}{\gamma}$$

III.1.b Dans l'écriture de la solution $z_M(t)$ de cette équation différentielle, figure un terme correspondant à la solution générale de l'équation sans second membre ; c'est ce terme qui caractérise le régime transitoire et qui s'atténue au cours du temps (sans quoi on ne parlerait pas de régime transitoire !). Par soucis de clarté, et parce que cela sera également utile pour la suite, réécrivons l'équation différentielle en mettant en évidence les différents termes excitateurs et donnons la forme de la solution en mettant en évidence les différents termes qui la composent ; sachant que m ne décolle pas, on a :

$$\ddot{z}_M + \frac{1}{\tau}\dot{z}_M + \omega_0^2 z_M = \underbrace{\omega_0^2 \ell_1 + \omega_0^2 z_0}_{\text{Excitation continue}} - \underbrace{\omega_0^2 z_0 \cos \omega t + \frac{\omega z_0}{\tau} \sin \omega t}_{\text{Excitation sinusoïdale à } \omega}$$

$$\Rightarrow z_M(t) = z_{tr}(t) + (\ell_1 + z_0) + Z_M \cos(\omega t + \varphi)$$

Solution générale de l'équation sans second membre ; caractérise le régime transitoire	↙	solution particulière associée à l'excitation continue considérée seule = moyenne de $z_M(t)$ en régime permanent	↘	solution particulière associée à l'excitation sinusoïdale considérée seule = terme caractéristique du régime sinusoïdal forcé
--	---	---	---	---

Le régime permanent est un régime sinusoïdal forcé avec des oscillations autour d'une valeur moyenne non nulle

Sans tout détailler, on peut affirmer que la forme exacte de la solution $z_r(t)$ dépend du signe du discriminant Δ de l'équation sans second membre, qui s'écrit :

$$\Delta = \frac{1}{\tau^2} - 4\omega_0^2 = \omega_0^2 \left(\frac{1}{\omega_0^2 \tau^2} - 4 \right) = \omega_0^2 (\alpha - 4)$$

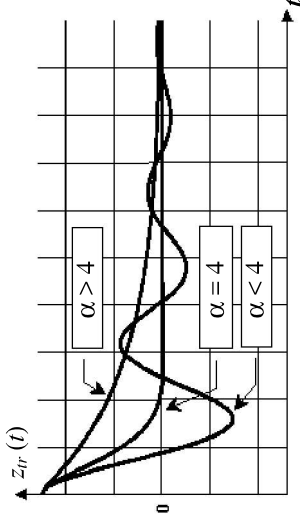
α est lié au facteur de qualité Q de l'oscillateur par : $\alpha = 1/Q^2$.

• Si $\alpha \leq 4$ ($Q > 1/2$), alors $\Delta < 0$ et le régime transitoire est pseudo périodique i.e. oscillant, avec un nombre d'oscillations d'autant plus élevé que α est faible ;

• Si $\alpha \approx 4$ ($Q = 1/2$), alors $\Delta = 0$ et le régime transitoire est critique i.e. de durée très brève et sans oscillations ;

• Si $\alpha > 4$ ($Q < 1/2$), alors $\Delta > 0$ et le régime transitoire est apériodique i.e. non oscillant mais avec une durée plus longue que celle du régime critique et d'autant plus longue que α est élevé.

• Dans tous les cas, le régime transitoire s'atténue au cours du temps car la solution $z_r(t)$ s'atténue exponentiellement sur une durée dépendant de la valeur de α mais typiquement égale, en ordre de grandeur, à la durée τ apparaissant dans l'équation différentielle. A titre d'illustration, on a représenté ci-dessus l'allure de $z_r(t)$ pour les différents régimes.



III.1.c Compte tenu de ce qui a été dit dans la question précédente, Y_M et sa grandeur complexe associée $\underline{Y}_M$ vérifient respectivement les équations différentielles suivantes :

$$\ddot{Y}_M + \frac{1}{\tau} \dot{Y}_M + \omega_0^2 Y_M = -\omega_0^2 z_0 \cos \omega t + \frac{\omega z_0}{\tau} \sin \omega t = -z_0 \times \left(\omega_0^2 \cos \omega t + \frac{1}{\tau} \frac{d}{dt} (\cos \omega t) \right)$$

d'où
$$\ddot{\underline{Y}}_M + \frac{1}{\tau} \underline{\dot{Y}}_M + \omega_0^2 \underline{Y}_M = -\left(\omega_0^2 + \frac{i\omega}{\tau} \right) z_0 \exp(i\omega t)$$

i.e.
$$(-\omega^2 + i\omega/\tau + \omega_0^2) \underline{Y}_M = -(\omega_0^2 + i\omega/\tau) z_0 \exp(i\omega t)$$

et donc :

$$\underline{Y}_M = -z_0 \frac{1 + i\omega/\tau\omega_0^2}{1 - \omega^2/\omega_0^2 + i\omega/\tau\omega_0^2} \exp(i\omega t)$$

$$\frac{|\underline{Y}_M|}{z_0} = \sqrt{\frac{1 + \omega^2/\tau^2\omega_0^4}{(1 - \omega^2/\omega_0^2)^2 + \omega^2/\tau^2\omega_0^4}} = \sqrt{\frac{1 + \alpha X}{(1 - X)^2 + \alpha X}}$$

III.1.c On en déduit :

On voit sans calcul que $\forall \alpha$: $|\underline{Y}_M|/z_0 = 1$ en $X = 0$ et $|\underline{Y}_M|/z_0 \rightarrow 0$ quand $X \rightarrow \infty$.

Par calcul, les points pour lesquels $|\underline{Y}_M|/z_0 = 1$ vérifient : $1 + \alpha X = (1 - X)^2 + \alpha X$, soit $1 = (1 - X)^2$ ce qui donne, $\forall \alpha$: $X = 0$ et $X = 2$ (il y a donc 2 « points fixes »).

En revanche une étude qualitative des variations n'est pas simple... Les variations de $|\underline{Y}_M|/z_0$ sont les mêmes que celles de son carré, donc de la fonction :

$$G: X \rightarrow (1 + \alpha X) / ((1 - X)^2 + \alpha X)$$

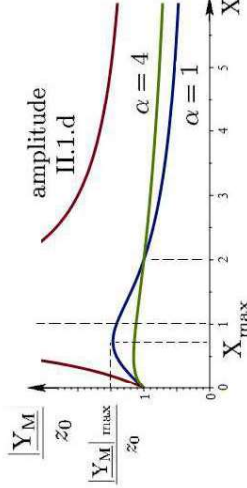
$$\text{Or : } G'(X) = \frac{\alpha [(1 - X)^2 + \alpha X] - (1 + \alpha X) [2(X - 1) + \alpha]}{((1 - X)^2 + \alpha X)^2} = -\frac{\alpha X^2 + 2X - 2}{((1 - X)^2 + \alpha X)^2}$$

L'unique extremum de G pour $X > 0$ est donc

$$X_{\max} = \frac{1}{\alpha} (\sqrt{1 + 2\alpha} - 1)$$

Ainsi, $X_{\max}$ est toujours < 1 , croît si α diminue et tend vers 1 lorsque α tend vers 0.

On trouve alors, pour $\alpha = 1$,



et, pour $\alpha = 4$,

$$X_{\max} = \frac{1}{2} \text{ et } \frac{|\underline{Y}_M|_{\max}}{z_0} = 1,15$$

III.1.e Par rapport à l'amplitude trouvée à la question II.1.d, on peut constater certaines améliorations :

- L'amplitude ne diverge plus au voisinage de la fréquence de résonance. Ceci est une caractéristique de l'amortissement.
- Elle décroît en $1/X$ pour les grandes fréquences, ce qui est un avantage par rapport à la partie II, où l'amplitude tendait vers une constante à grande fréquence. Ainsi, la suspension « encaisse » les variations rapides d'altitude de manière à ne pas secouer les passagers.

Attention : pour comparer quantitativement $|\underline{Y}_M|/z_0$ avec le résultat de II.1.d, il faut se rappeler qu'en II.1.d Δz désignait l'amplitude crête à crête ; il faut donc comparer $|\underline{Y}_M|/z_0$ avec $\Delta z/2z_0 = (1 + X)/|1 - X|$.

Contrairement à ce que l'on pourrait penser, $|\underline{Y}_M|/z_0$ ne tend pas vers $\Delta z/2z_0$ quand $\alpha \rightarrow 0$ ($|\underline{Y}_M|/z_0 \rightarrow 1/|1 - X|$) ; en effet, $|\underline{Y}_M|$ est ici l'amplitude d'une oscillation forcée à ω , une fois le régime transitoire révolu i.e. une fois que l'oscillation propre à ω_0 a été amortie ; alors qu'en l'absence d'amortissement $\Delta z/2$ désigne l'amplitude d'une oscillation due à la fois à un forçage à ω et à une oscillation propre à ω_0 qui ne s'atténue pas !

III.2.a Pour $\alpha = 4$

$$\left| F\left(\frac{X_1}{2}\right) \right| = 3,9 \quad |F(X_1)| = 6,0 \quad \text{et} \quad |F(2X_1)| = 9,1$$

et, pour $\alpha = 1$,

$$\left| F\left(\frac{X_1}{2}\right) \right| = 2,7 \quad |F(X_1)| = 3,6 \quad \text{et} \quad |F(2X_1)| = 5,0$$

III.2.b D'après les valeurs de la question II.3.b, la limite pour X est 36 pour les fréquences hautes, alors qu'on voit que pour $X = 2X_1 = 18$ et $\alpha = 1$, la condition $|F(\omega)| < K$ n'est déjà plus satisfaite.

On observe donc une dégradation de la qualité du contact avec la route dans le cas des fréquences élevées. Il faut voir que, pour des fréquences spatiales élevées, les pneus ont leur rôle à jouer en tant qu'élément nivelant. En particulier, l'état des pneus et leurs propriétés d'adhérence jouent un rôle qui n'a pas été pris en compte.