DEVOIR SURVEILLÉ n°9
Correction

Problème 2

A- Moment cinétique - énergie - vecteur excentricité

1- Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel s'applique le **principe d'inertie** : c'est-à-dire un référentiel dans lequel un point matériel isolé est en mouvement rectiligne uniforme (ou au repos)

2- Théorème du moment cinétique en O, centre de force (O fixe dans R galiléen) :

$$\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right)_R = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = r\overrightarrow{u_r} \wedge -\frac{k}{r^2}\overrightarrow{u_r} = \vec{0} \qquad \vec{L}_O = L_o\overrightarrow{u_z} \text{ vecteur constant de R.}$$

$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m.\vec{v} = L_o\overrightarrow{u_z}$ $\quad \forall t$ $\overrightarrow{OM}$ vecteur position est orthogonal à $\overrightarrow{u_z}$ vecteur fixe de R.

Le point M est donc contenu dans le plan perpendiculaire à $\overrightarrow{u_z}$ $\left(\text{ou à } \vec{L}_O\right)$ passant par O :

mouvement plan.

Dans le plan du mouvement, la position du mobile étant repérée par ses coordonnées polaires (r,θ) : $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r}$ $\quad \vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$ $\quad \vec{L}_O = r\overrightarrow{u_r} \wedge m\left(\dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}\right) = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{u_z} = L_o\overrightarrow{u_z}$

On en déduit $\boxed{r^2\dot{\theta} = \frac{L_o}{m} = cst}$ désignée par constante des aires.

3- $-\delta W = -\vec{F}.d\overrightarrow{OM} = \frac{k}{r^2}\overrightarrow{u_r}.d\left(r\overrightarrow{u_r}\right) = \frac{k}{r^2}\overrightarrow{u_r}.\left(\overrightarrow{u_r}.dr + r.d\overrightarrow{u_r}\right) = \frac{k}{r^2}dr$ $\quad$ car $\overrightarrow{u_r}.d\left(\overrightarrow{u_r}\right) = 0$ $\quad \left\|\overrightarrow{u_r}\right\| = 1$

Ainsi $-\delta W = d\left(-\frac{k}{r}\right)$

La force newtonienne est conservative :

$E_p = -\frac{k}{r} + E_o = -\frac{k}{r}$ $\quad$ ayant fait le choix $E_p = 0$ pour $r \to \infty$.

L'énergie mécanique est donc constante, le système n'étant soumis qu'à des forces conservatives $\boxed{E_m = \frac{1}{2}.m.v^2 - \frac{k}{r} = cste}$

4a- Si $\vec{e}$ est un vecteur constant de R, sa dérivée par rapport à t dans R doit être nulle $\forall t$.

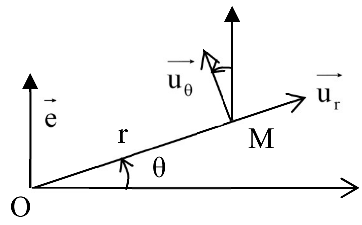
$$\vec{e} = \overrightarrow{u_\theta} - \frac{L_o}{k}.\vec{v} \qquad \left(\frac{d\vec{e}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt}\right)_R - \frac{L_o}{k}\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_R \qquad \text{car } L_o = cste$$

$$\left(\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt}\right)_R = -\dot{\theta}\overrightarrow{u_r} \qquad \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_R = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{k}{m.r^2}\overrightarrow{u_r}$$

D'après **2-** $m.r^2\dot{\theta} = L_o$ $\left(\frac{d\vec{e}}{dt}\right)_R = -\dot{\theta}.\overrightarrow{u_r} + \frac{m.r^2.\dot{\theta}}{k}.\frac{k}{m.r^2}.\overrightarrow{u_r} = \vec{0}$

$\vec{e} = \overrightarrow{u_\theta} - \frac{L_o}{k}.\vec{v}$ est donc une constante du mouvement de M dans R.

4b- L'axe polaire est choisit tel que $\theta = \left(\vec{e}, \overrightarrow{u_\theta}\right)$: l'axe polaire est orthogonal au vecteur $\vec{e}$, vecteur lié à R.



En effectuant le produit scalaire :

$\vec{e}.\overrightarrow{u_\theta} = e.\cos(\theta) = \left(\overrightarrow{u_\theta} - \frac{L_o}{k}\vec{v}\right).\overrightarrow{u_\theta} = 1 - \frac{L_o}{k}.r.\dot{\theta} = 1 - \frac{L_o^{\ 2}}{k.m.r}$ d'après **2-**

On en déduit : $r.(1 - e.\cos(\theta)) = \frac{L_o^{\ 2}}{k.m} = p$

Soit $\boxed{r = \frac{p}{1 - e.\cos(\theta)}}$ avec $\boxed{p = \frac{L_o^{\ 2}}{k.m}}$

Remarques : 1- $[p] = L$ p homogène à une longueur

2- p est bien positif car k est positif.

L'équation obtenue est, en coordonnées polaires, l'équation d'une conique dont un des foyers est le centre de force O.

La trajectoire est une branche d'hyperbole si e > 1, une parabole si e = 1 et une ellipse si $0 \le e < 1$ (cercle si e = 0).

p représente le paramètre de la conique.

4c- $\vec{e} = \overrightarrow{u_\theta} - \frac{L_O}{k}.\vec{v}$

Donc $e^2 = 1 + \frac{L_O^2}{k^2}v^2 - 2\frac{L_O}{k}.\vec{v}.\overrightarrow{u_\theta} = 1 + \frac{L_O^2}{k^2}v^2 - 2\frac{L_O}{k}.r\dot{\theta} = 1 + 2\frac{L_O^2}{k^2}\left(\frac{1}{2}v^2 - \frac{k}{L_O}.\frac{C}{r}\right)$

$e^2 = 1 + 2\frac{L_O^2}{k^2}\left(\frac{1}{2}v^2 - \frac{k}{m}.\frac{1}{r}\right)$

$\boxed{e^2 = 1 + 2\frac{L_O^2}{mk^2}E_m}$

On retrouve que si $E_m < 0$; $e^2 < 1$ **; la trajectoire est elliptique**

Si $E_m = 0$; $e^2 = 1$ **; la trajectoire est parabolique**

Si $E_m > 0$; $e^2 > 1$ **; la trajectoire est hyperbolique**

B- Satellites terrestres

1- La trajectoire du satellite est un cercle de centre O. Il apparaît clairement sur le document que le plan de l'orbite de GOCE n'est pas équatorial mais au contraire très incliné par rapport à ce plan.
Sur l'axe équatorial, l'écart entre 2 traces consécutives correspond à une période. On compte environ 16 périodes sur 24 heures. Soit une période : $\boxed{T = \frac{24.3600}{16} = 5400\,s = 1h30\,min}$

2- On utilisera la 2ème loi de Newton pour retrouver les résultats propres à la trajectoire circulaire :

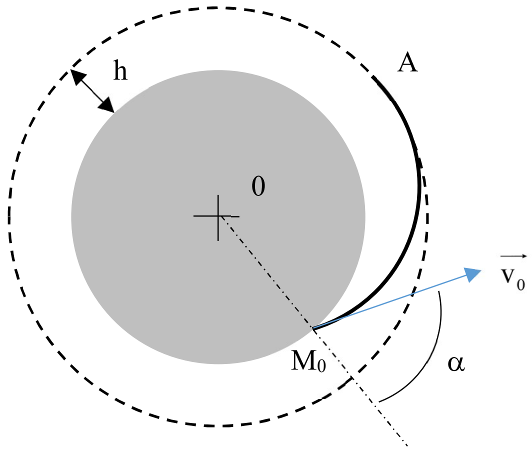
$$m\vec{a} = m\left(-r\dot{\theta}^2\,\vec{e_r} + r\ddot{\theta}\vec{e_\theta}\right) = -\frac{GmM}{r^2}\vec{e_r}$$

On obtient donc $\dot{\theta} = cst = \sqrt{\frac{GM}{r^3}} = \frac{2\pi}{T}$ et $\boxed{r = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}}$

AN : $r = \left(\frac{6,67.10^{-11}6.10^{24}.5400^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} = 6,66.10^6\,m$ $\quad$ $h = r - R = 2,60.10^5\,m = 260\,km$

Cette valeur est cohérente avec l'altitude donnée dans le texte $h = 270\,km$. Cette altitude est très faible.

Lors du lancement du satellite depuis un point M_0 à la surface de la Terre, on communique au lanceur une vitesse initiale $\vec{v_0}$ faisant un angle α avec $\vec{u_r}$ (cf schéma ci-dessous). On souhaite que la trajectoire M_0A amène le satellite au point A de l'orbite circulaire souhaitée (d'altitude h) avec une vitesse en A ayant la même orientation que sur l'orbite circulaire.



3- En A la direction de la vitesse sur l'orbite de transfert est suivant $\vec{e_\theta}$ comme sur l'orbite circulaire. Donc $\dot{r} = 0$. En A le rayon est extrémal. A ne peut être le périgée de la trajectoire de transfert ; **il s'agit donc de son apogée** et la trajectoire est donc **elliptique**

4- $\boxed{\vec{L_0}(M, t=0) = \overrightarrow{OM_0} \wedge m\vec{v_0} = mRv_0 \sin\alpha\,\vec{e_z}}$

5- Pour que le système atteigne le point A, on doit avoir : (conservation de l'énergie mécanique)

$$E_m = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{mM}{R} = \frac{1}{2}mv_A^2 - G\frac{mM}{r_A}$$

Pour que la vitesse en A ait la bonne direction , on doit avoir : (conservation du moment cinétique) : $Rv_0 \sin\alpha = r_A v_A$

Ainsi $\frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{mM}{R} = \frac{1}{2}m\left(v_0 \sin\alpha \frac{R}{r_A}\right)^2 - G\frac{mM}{r_A}$

Soit $\boxed{v_0^2 = 2GM\frac{\frac{1}{R}-\frac{1}{r_A}}{1-\left(\sin\alpha\frac{R}{r_A}\right)^2}}$.

6- Dans le cas où $\alpha = 0$, $\overrightarrow{L_0}(M, t=0) = \vec{0}$; le mouvement sera **rectiligne**.

Vitesse initiale à communiquer $\boxed{v_0^2 = 2GM\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r_A}\right)}$

Vitesse en A : $v_A'^2 = v_0^2 - 2G\frac{M}{R} + 2G\frac{M}{r_A} = 2GM\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r_A}\right) - 2G\frac{M}{R} + 2G\frac{M}{r_A} = 0$

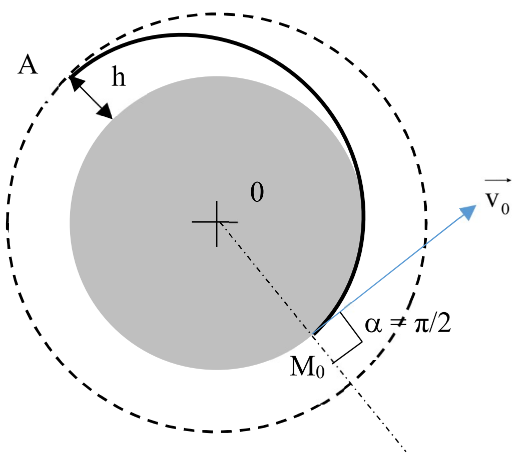
(logique, la vitesse étant toujours colinéaire à $\overrightarrow{e_r}$ la seule façon d'avoir en A une vitesse colinéaire à $\overrightarrow{e_\theta}$ est d'avoir une vitesse nulle)

Energie à communiquer en A $\boxed{\Delta E_m = E_{m,circulaire} - E_{m,transfert} = \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}G\frac{mM}{r_A}}$

7- Dans le cas où $\alpha = \frac{\pi}{2}$, la relation obtenue à la question 5- devient $v_0^2 = 2GM\frac{\frac{1}{R}-\frac{1}{r_A}}{1-\left(\frac{R}{r_A}\right)^2}$.

Soit $\boxed{v_0 = \sqrt{2GM\frac{r_A}{R}.\frac{1}{r_A+R}}}$

8- On a alors en M_0 et A la vitesse orthogonale au rayon $\overrightarrow{OM}$: les points M_0 et A sont donc respectivement le **périgée et l'apogée de l'ellipse de transfert**.



Energie mécanique : $E_m = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{mM}{R} = GmM\frac{r_A}{R}.\frac{1}{r_A+R} - G\frac{mM}{R}$

$$\boxed{E_m = -G\frac{mM}{R}\left(1-\frac{r_A}{r_A+R}\right) = -G\frac{mM}{r_A+R}}$$

On retrouve la relation caractéristique des orbite elliptique $E_m = -G\frac{mM}{2a}$; M_0 et A étant le périgée et l'apogée de la trajectoire de transfert $2a = r_A + R$ est le grand axe de l'ellipse

9- Durée de transfert : une demie période de l'orbite elliptique de transfert
Or la relation trouvée à la question 2 se généralise au cas des orbites elliptiques :

$$\boxed{\Delta T = \frac{T}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^3\frac{4\pi^2}{GM}} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(R+\frac{h}{2}\right)^3\frac{4\pi^2}{GM}}}$$

$$\text{AN} : \Delta T = \frac{1}{2}\sqrt{\left(6400+\frac{270}{2}\right)^3.10^9\frac{4\pi^2}{6,67.10^{-11}.6.10^{24}}} = 2,6.10^3\,\text{s} = \underline{44\,\text{min}}$$

L'orbite de trasfert est proche d'une orbite circulaire (car h est faible devant R ; il est normale de trouver une durée proche d'une période de l'orbite circulaire.

10- $E_m = -G\frac{mM}{r_A+R} = \frac{1}{2}mv_A'^2 - G\frac{mM}{r_A}$ soit

$$v_A'^2 = 2GM\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_A+R}\right) = 2GM\frac{R}{r_A(r_A+R)} = 2GM\frac{R}{(R+h)(2R+h)} \approx \frac{GM}{R}\left(1-\frac{3}{2}\frac{h}{R}\right)$$

Donc à l'ordre 1 en $\frac{h}{R}$: $\boxed{v_A' = \sqrt{\frac{GM}{R}}\left(1-\frac{3}{4}\frac{h}{R}\right)}$

(sans approximation $\boxed{v_A' = \sqrt{\frac{GM}{R}\frac{1}{\left(1+\frac{h}{R}\right)\left(1+\frac{h}{2R}\right)}}}$

Energie à fournir en A : $\Delta E_m = \frac{1}{2} m\left(v_A^2 - v_A'^2\right) = \frac{GmM}{2R}\left(1 - \frac{1}{\left(1+\frac{h}{R}\right)\left(1+\frac{h}{2R}\right)}\right)$

En faisant le développement limité à l'ordre 1 : $\boxed{\Delta E_m = \frac{3}{4}\frac{GmM}{R}\frac{h}{R}}$

AN : $v_A' = \sqrt{\frac{6,67.10^{-11}.6.10^{24}}{6,4.10^{6}}}\left(1 - \frac{3}{4}\frac{270}{3400}\right) = 6,9.10^{3}\,\mathrm{m.s^{-1}}$

$\frac{\Delta E_m}{m} = \frac{3}{4}\frac{6,67.10^{-11}.6.10^{24}}{6,4.10^{6}}\frac{270}{6400} = 2,0.10^{6}\ \mathrm{J.kg^{-1}}$