

Exercice 3 : détermination d'une exoplanète -

A - Étude du mouvement du système {étoile, planète}

4.1. Cette relation découle de la définition du G.

$$\vec{0} = \pi_E \vec{GE} + \pi_P \vec{GP} = \pi_E \vec{GP} + \pi_E \vec{PE} + \pi_P \vec{GP}$$

par relation de Chasles

$$\text{donc } \vec{GP} = - \frac{\pi_E}{\pi_E + \pi_P} \vec{PE} = \frac{\pi_E}{\pi_E + \pi_P} \vec{EP}$$

On trouve que si $\pi_E \gg \pi_P$ $G \approx E$.

4.2. Principe fondamental de la dynamique appliqué à la planète dans le référentiel d'étude.

$$\pi_P \frac{d^2 \vec{GP}}{dt^2} = - G \frac{\pi_P \pi_E}{EP^3} \vec{EP}$$

$$\frac{\pi_P \pi_E}{\pi_E + \pi_P} \frac{d^2 \vec{GP}}{dt^2} = - G \frac{\pi_P \pi_E}{EP^3} \vec{EP}$$

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = - G \frac{\pi_E + \pi_P}{r^3} \vec{r}$$

4.3. En mouvement circulaire $\vec{r} = r_0 \vec{ur}$ de période $T = \frac{2\pi}{\dot{\theta}}$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = r_0 \dot{\theta} \vec{u\theta}$$

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = r_0 \ddot{\theta} \vec{u\theta} - r_0 \dot{\theta}^2 \vec{ur}$$

Donc
$$\begin{cases} -\lambda_0 \ddot{\theta} = -G \frac{\pi_E + \pi_P}{\lambda_0^2} \\ \lambda_0 \ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

Soit
$$\ddot{\theta} = \frac{G \pi_E + \pi_P}{\lambda_0^3} = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

$$\frac{\lambda_0^3}{T^2} = G \frac{\pi_E + \pi_P}{4\pi^2}$$

(équivalent de la 3^e loi de Kepler)

On a
$$\vec{GE} = \frac{\pi_P}{\pi_E + \pi_P} \vec{EP} = \frac{\pi_P}{\pi_E + \pi_P} \vec{GF}$$

Le mouvement de E (comme P) autour de G est homothétique de celui de F.

E tourne donc autour de G sur une orbite circulaire :

→ de rayon $\frac{\pi_P}{\pi_E + \pi_P} r = r_G$

→ de vitesse angulaire $\dot{\theta} = \left(G \frac{\pi_E + \pi_P}{\lambda_0^3} \right)^{1/2}$

→ de vitesse

$$v = \lambda_0 \dot{\theta}$$

$$= \frac{\pi_P}{\pi_E + \pi_P} \lambda_0 \left(G \frac{\pi_E + \pi_P}{\lambda_0^3} \right)^{1/2}$$

$$v = \frac{\pi_P}{\sqrt{\pi_E + \pi_P}} \sqrt{\frac{G}{\lambda_0}}$$

Autre expression

$$v = \frac{2\pi r_G}{T} = \frac{\pi_P}{\pi_E + \pi_P} \frac{2\pi \lambda_0}{T}$$

46- On note une évolution de la vitesse radiale de :

→ période : $\frac{68}{6}$ jours = $1,1 \cdot 10^6$ s

→ amplitude $\sim 5 \text{ km/h} = 1,5 \text{ ms}^{-1}$.

$$V = \underbrace{\frac{\pi_P \sin i}{(\pi_E + \pi_P)^{2/3}} \left(\frac{2\pi}{T} a \right)^{1/3}}_{\text{amplitude}} \sin i \sin \theta.$$

On peut simplifier $\sin i \approx 1$.
 $\pi_E + \pi_P \approx \pi_E$

$$V = \frac{\pi_P}{\pi_E^{2/3}} \left(\frac{2\pi}{T} a \right)^{1/3}$$

$$\begin{aligned} \pi_P &= V \pi_E^{2/3} \left(\frac{T}{2\pi a} \right)^{1/3} \\ &= 1,5 \times \left(2,4 \cdot 10^{29} \right)^{2/3} \left(\frac{1,1 \cdot 10^6}{2\pi \cdot 7 \cdot 10^{-11}} \right)^{1/3} \\ &= 1,5 \times 0,24^{2/3} \left(\frac{1}{2\pi \cdot 70} \right)^{1/3} 10^{20+2+4} \\ &= \underline{8 \cdot 10^{24} \text{ kg}} \end{aligned}$$

On trouve bien environ $1,3 \times$ masse de la Terre.
 (mais la précision des mesures est faible)