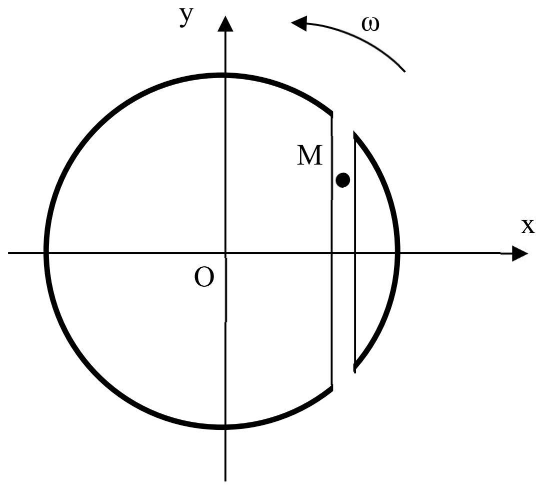
Référentiels non galiléens

Exercice 1 :

On considère un astéroïde sphérique homogène de centre O, de rayon R, de masse volumique ρ. Un tel astéroïde tourne autour de l'un de ses diamètres avec une vitesse angulaire ω constante par rapport à un référentiel galiléen.
Une cavité cylindrique de petite dimension ne perturbant pas la gravitation est creusée dans le plan équatorial à la distance OH = a du centre.
On abandonne à une des extrémités de la cavité un objet ponctuel de masse m qui peut glisser sans frottement dans la cavité



Données : $G = 6,67.10^{-11}\,\text{SI}$
$\rho = 2,70.10^{3}\,\text{kg.m}^{-3}$

La période de rotation de l'astéroïde sur lui-même est T = 10h

0- Monter que le champ de gravitation dans le tunnel vaut :

$$\vec{g}(r) = g_0 \frac{r}{R}\vec{u_r} \text{ avec } \overrightarrow{OM} = r\,\vec{u_r}$$ et g_0, le champ de gravité à la surface de l'astéroïde.

1- Donner la nature du mouvement de l'objet

2- Calculer la période T_0.

Exercice 2

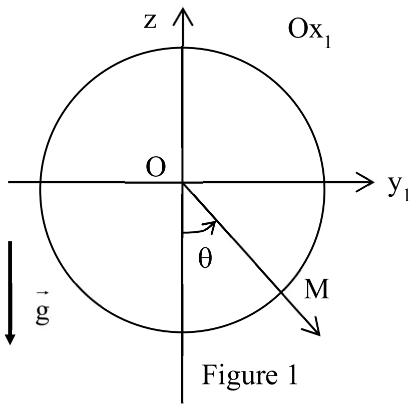


Figure 1

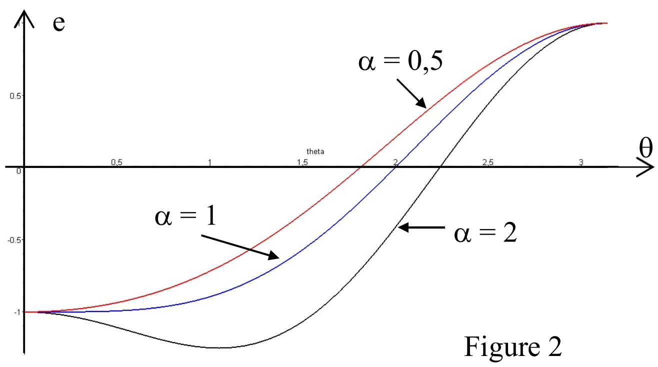


Figure 2

Une perle (assimilée à un point matériel de masse m) est enfilée sur un cercle métallique de rayon R qui tourne à la vitesse angulaire ω constante autour de son diamètre vertical Oz. Les frottements sont négligés. La position de M sur le cercle est repérée par l'angle $\theta = \left(-\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OM}\right)$. On posera $\omega_o^{\,2} = \frac{g}{R}$

1- Déterminer la (les) positions d'équilibre de la perle sur le cercle.

2- Discuter de la stabilité de l'équilibre. La figure 2 ci-dessus donne les représentations graphiques de $e(\theta) = -\left(\cos(\theta) + \frac{1}{2}.\alpha \sin^2(\theta)\right)$ pour 3 valeurs de $\alpha = \frac{\omega^2}{\omega_o^{\,2}}$

Exercice 3 : Basculement d'une caisse

Un camion contient dans sa cargaison une caisse homogène de hauteur h à section carrée de côté a. Le transporteur étourdi ne l'ayant pas attachée, on étudie le risque que la caisse se renverse suivant les mouvements du camion :

1ère situation

Le camion arrive avec une vitesse V_0 sur un feu qui vient de passer au rouge. Le conducteur freine alors brutalement, avec une décélération supposée constante.

1- Exprimer la distance de freinage minimale pour que la caisse ne bascule pas.

2ème situation

Le camion s'engage dans un virage dont le rayon de courbure est R.

2- Exprimer la vitesse maximale du camion afin que la caisse ne bascule pas.

Application numérique : $h = 2\,m$, $a = 1\,m$, $V_0 = 40\,km.h^{-1}$, $g = 9{,}8\,m.s^{-2}$ et $R = 20\,m$ h =

Exercice 4 : limite de Roche

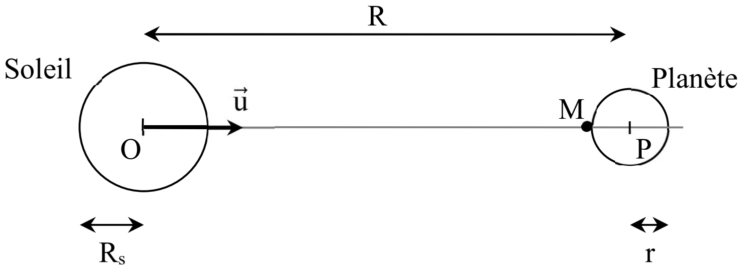
On se propose de déterminer, par un modèle simple, la distance en dessous de laquelle un satellite se disloque sous l'effet des « forces de marées » dues au Soleil.

On fera les hypothèses suivantes :

- Le Soleil est sphérique de centre O et homogène, de rayon $R_S = 7{,}0.10^5$ km, de masse $M_S = 2{,}0.10^{30}$ kg (et de masse volumique $\rho_S = 1{,}4.10^3$ kg.m^{-3})
- Le référentiel héliocentrique sera supposé galiléen.
- Le satellite sera une planète tellurique, sphérique de centre P, homogène, de rayon r, de masse M_P (et de masse volumique $\rho_P = 5{,}5$ kg.m^{-3})
- Le satellite n'est soumis qu'à l'attraction gravitationnelle du Soleil
- Le satellite est en orbite circulaire de rayon R autour du Soleil (avec $R \gg r$)

1- Définir le référentiel « planétocentrique » (par analogie avec le référentiel géocentrique). Est-il galiléen ?

2- On étudie un point M de masse m posé sur la surface de la planète à l'équilibre **dans le référentiel planétocentrique**. On suppose qu'à l'instant où on fait l'étude, le point M est aligné avec le centre du Soleil et de la Planète (voire la figure ci-dessous où les échelles ne sont pas respectées).



Déterminer la réaction du sol de la planète sur M.

3- A quelle condition le système décolle-t-il ?

Cette condition correspond à la dislocation de la planète

4- Montrer que le rayon limite R_{lim} de l'orbite de la planète en deçà duquel la planète se disloque vaut $R_{lim} = \left(2\frac{M_S}{M_P}\right)^{1/3} r$

Donner l'expression de R_{lim} en fonction des masses volumiques ρ_S, ρ_P et du rayon solaire R_S. Faire l'application numérique.

Exercice 5 : Ballon dans le référentiel terrestre non galiléen.

Un terrain de rugby placé à la latitude $\lambda = 45°$ est orienté Nord-Sud. Un joueur tente une pénalité à 40 m face aux poteaux. Le ballon par avec la vitesse $\overrightarrow{v_0}$ dans la direction du Nord faisant un angle $\alpha = 45°$ avec l'horizontale ; $\left\|\overrightarrow{v_0}\right\| = 20\,\mathrm{m.s^{-1}}$; on néglige la résistance de l'air et on se propose de déterminer l'influence du caractère non galiléen du référentiel terrestre sur le point de chute du ballon.

1- Choisir la base terrestre locale : Oz verticale ascendante du lieu, Oy tangent au méridien, vers le Nord, Ox tangent au parallèle vers l'Est ; projeter le PFD dans cette base.

2- Intégrer ce système d'équations une fois par rapport au temps. Justifier en calculant la vitesse angulaire de rotation de la terre autour de l'axe des pôles, que l'on peut considérer les termes en ω_e comme infiniment petit du premier ordre.

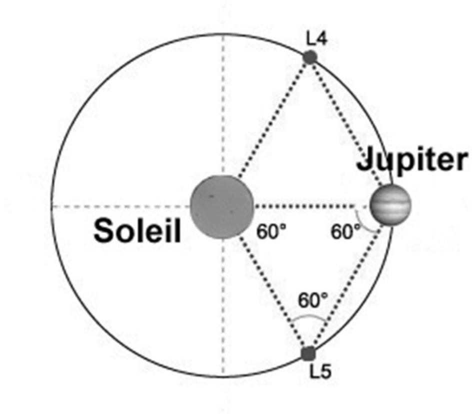
3- Montrer que les équations obtenues en ne considérant que les termes de premier ordre non nul sont :

$$\begin{cases} \dot{x} = -2\omega_e\left(\cos(\lambda)z - \sin(\lambda)y\right) \\ \dot{y} = v_0\cos(\alpha) \\ \dot{z} = -gt + v_0\sin(\alpha) \end{cases}$$

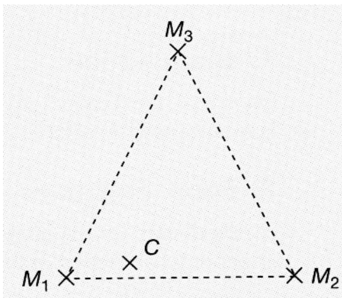
4- Calculer à l'aide des équations ci-dessus la déviation au point de chute littéralement en fonction de ω_e, v_0, α et λ, puis numériquement avec $g = 9{,}8\ \mathrm{m.s^{-1}}$. Conclure.

Exercice 6 : Points de Lagrange L_4 et L_5.

On constate qu'il existe sur la trajectoire de Jupiter deux points particuliers appelé point de Lagrange L_4 et L_5 (voir figure ci-contre), en rotation autour du Soleil à la même vitesse angulaire ω que Jupiter, où orbitent de grandes quantités d'astéroïdes, appelés « troyens »[1].



Afin de comprendre cette propriété, on se propose d'étudier trois masses m_1 , m_2 et m_3 en rotation dans un même plan et à la même vitesse angulaire autour d'un axe fixe, orthogonal à ce plan et passant par leur centre de masse C (voir figure ci-contre).



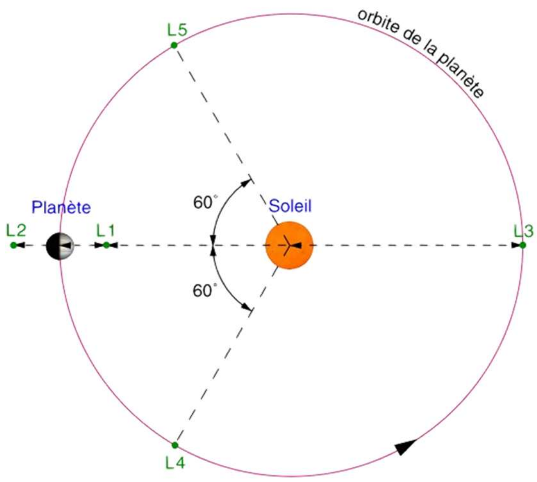
1- Montrer que si ces trois masses se situent aux trois sommets M_1 , M_2 et M_3 d'un triangle équilatéral de côté d, elles peuvent être en équilibre relatif les unes par rapport aux autres, pour une vitesse ω particulière que l'on exprimera en fonction de m_1 , m_2 , m_3, d et la constante de gravitation universelle G.

2- Utiliser ce résultat pour discuter l'existence des points de Lagrange L_4 et L_5 de Jupiter.[2]

---

[1] Les astéroïdes troyens portent ce nom du fait d'une convention qui les nomme d'après les personnages de la guerre de Troie. Les astéroïdes situés au point L_4 portent le nom d'un héros ou d'un concept grec et sont appelés « camp grec » ou « groupe d'Achille » (Achille, Nestor, Agamemnon, Odyssée, etc.). Ceux situés au point L_5 portent des noms de héros troyens et sont collectivement nommés « camp troyen » (Priam, Énée, etc.). Cependant, chacun des groupes possède un transfuge : Hector, nommé d'après le héros troyen Hector, est situé autour du point L_4 et inversement Patrocle, bien que portant le nom du héros grec Patrocle, est situé au point L_5. Pour compliquer la chose, le camp troyen est parfois nommé « groupe de Patrocle », cet astéroïde étant l'un des plus grands de cet ensemble…

[2] Plus généralement, on peut associer des points de Lagrange L_4 et L_5 à toute planète du système solaire. En outre, il existe également trois autres points de Lagrange notés L_1 , L_2 et L_3 et situés le long de l'axe Soleil-planète (schéma ci-contre). Tous les points de Lagrange constituent des positions d'équilibre relatif dans le champ de gravitation de la planète et du Soleil, au sens où nous l'avons défini dans cet exercice.
Indiquons enfin que tous ces points correspondent à des positions d'équilibre théoriquement instables ! Toutefois, pour un corps situé au voisinage de L_4 (ou L_5) et qui tend à s'éloigner, la force de Coriolis qui apparaît (on raisonne dans le référentiel non galiléen en rotation) maintient le corps au voisinage de L_4 (ou L_5) ; L_4 et L_5 sont ainsi appelés points de Lagrange « stables », tandis que L_1 , L_2 et L_3 , qui ne bénéficient pas de cette propriété, sont dits « instables ».



Exercice 7 : La poussée d'Archimède dans un référentiel non galiléen en rotation.

Un cristallisoir est fixé sur un plateau horizontal tournant autour d'un axe vertical avec une vitesse de rotation ω constante. On désigne par r la distance du « petit » volume d'eau à l'axe de rotation (figure 1).

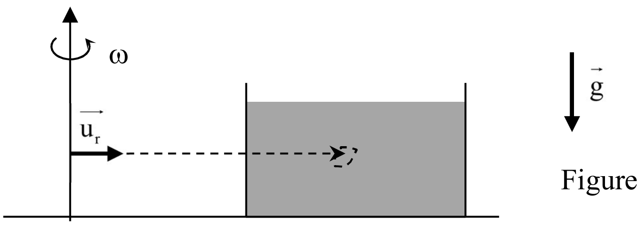


Figure 1

1- Quelle est la nouvelle résultante de forces de pression agissant sur le petit volume d'eau V.
En déduire la poussée d'Archimède subie par un solide placé en lieu et en place du volume d'eau V.

2- Un cylindre fermé, plein d'eau, tourne autour de son axe à la vitesse angulaire ω constante. Deux petites sphères de masses volumiques ρ_1 et ρ_2 ($\rho_1 < \rho_e < \rho_2$) sont respectivement attachées au plancher et au plafond par un fil sans masse.
Déterminer qualitativement la position d'équilibre des deux pendules dans le référentiel tournant.

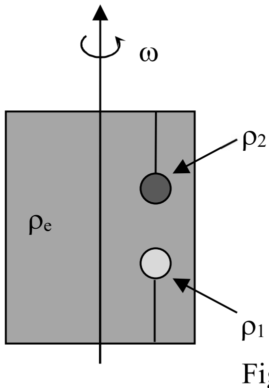


Figure 2

3- Une bougie est disposée sur un plateau tournant à une vitesse angulaire ω, à une distance d de l'axe de rotation. Elle est placée sous une cloche permettant la rentrée d'air frais et la sortie de l'air vicié. L'air est calme sous la cloche. La flamme représentée sur la figure 3 lorsque le plateau est au repos s'incline-t-elle vers l'intérieur, l'extérieur ou reste-t-elle verticale lorsque le plateau tourne ?

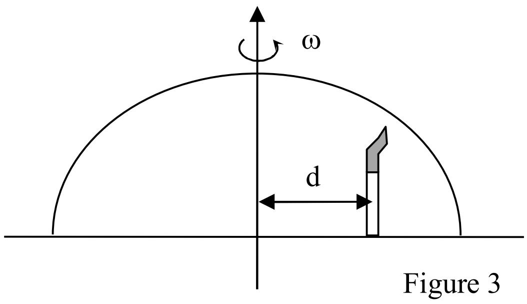


Figure 3